This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`

Sci 900.33 Bound

MAY 11 1962

Harvard College Library

FROM

SCIENCE CENTER LIBRARY

Sci 900.33

HARVARD COLLEGE LIBRARY
FEB 27 1904
CAMBRIDGE, MASS.

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN

DOOR DE

LEDEN VAN HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP

TER SPREUKE VOERENDE

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

NEGENDE DEEL.

1ste Stuk.

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1904.

Ter bevordering eener geregelde toezending van de drukwerken van het Genootschap, wordt den leden beleefd verzocht bij verhuizing hun nieuw adres op te geven aan Dr. D. COELINGH, Ondervoorzitter van het Genootschap, Amsterdam, Van

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarbij aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, Dr. D. COELINGH, Amsterdam, Van Breestraat 143, bij wien men ook klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in de toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenheid van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van twee zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderrichtinghe dienende tot het maecken vande reductien van de tacxcustingen tot gereede penningen, om dien-volgende te eysschen en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Heeren Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten, geteekend JOHAN DE WITT, 1671)]
in den handel *f* 6,00 . . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 1892
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen, tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, deel 1—8 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,00 . . . . voor de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle des publications mathématiques, deel 1—10, van elk twee stukken à *f* 4,00 en bij overcompleete stukken, per stuk *f* 2,00.

Tables des matières des volumes I—V . . . . *f* 2,00.
" " " " " VI—X . . . . *f* 3,00.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
FEB 27 1904
CAMBRIDGE, MASS.

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN.

Vraagstuk I.

K 2 d. Zijn, met betrekking tot de middens der zijden BC, CA, AB van driehoek ABC, de punten A′, B′, C′ symmetrisch met een punt P en de punten A_1, B_1, C_1 symmetrisch met de hoekpunten A, B, C, dan zullen de rechten door A, B, C evenwijdig met BB′, CC′, AA′ elkander in een punt Q snijden, zoodra P behoort tot de ellips welke A_1, B_1, C_1 bevat en haar middelpunt in het zwaartepunt van ABC heeft. Men vraagt dit te bewijzen en tevens de meetkundige plaats te bepalen van Q. (Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, Dr. A. J. A. PRANGE *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Gaan wij 100 vraagstukken terug (Dl. VIII, vr. I), dan lezen wij daar (met verandering van P in P′): „Als P′ een punt is van de bij driehoek ABC behoorende ellips van STEINER, vraagt men te bewijzen, dat de rechten, door A, B, C evenwijdig met BP′, CP′, AP′ getrokken, door een punt Q gaan, en de meetkundige plaats te bepalen van het punt Q."

Dit vraagstuk vormt de kern van het nieuwe vraagstuk; want de rechten BP′, CP′, AP′ in het eerste zijn in het laatste vraagstuk door BB′, CC′, AA′ aangeduid. Het zijn de rechten door B, C en A evenwijdig met B_1P, C_1P en A_1P getrokken.

Om dit in te zien merke men het volgende op. Ten opzichte van de middens van BC, CA, AB liggen A_1, B_1, C_1 symmetrisch met A, B, C. De hoekpunten van driehoek ABC zijn dus de middens der zijden van driehoek $A_1B_1C_1$, welke met eerstgenoemden driehoek homothetisch ligt ten opzichte van het

1382-63

gemeenschappelijk zwaartepunt G. De om de driehoeken $A_1B_1C_1$ en ABC beschreven ellipsen, welke G tot middelpunt hebben, zijn de bij die driehoeken behoorende ellipsen van STEINER. Op de eerste ligt het gegeven punt P, op de laatste het met P homothetisch geconstrueerde punt P'. De rechten BP', CP', AP' liggen homothetisch met de rechten B_1P, C_1P, A_1P en zijn er dus mede evenwijdig.

Evenwijdig met dezelfde rechten zijn echter ook BB', CC', AA'. Want ten opzichte van het midden van CA ligt B symmetrisch met B_1, en B' met P, zoodat BB' evenwijdig is met B_1P, enz.

Het vraagstuk is nu teruggebracht tot een ander, en men vindt als antwoord op de gestelde vraag, dat de meetkundige plaats van Q de bij driehoek ABC behoorende ellips van STEINER is.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA *en* Dr. H. VAN AUBEL.

Worden de barycentrische coördinaten van P door $(\alpha', \beta', \gamma')$ voorgesteld, dan zijn die van A', B', C' achtereenvolgens

$$(-\alpha', \gamma'+\alpha', \alpha'+\beta'), \quad (\beta'+\gamma', -\beta', \alpha'+\beta'),$$
$$(\beta'+\gamma', \gamma'+\alpha', -\gamma')$$

en de vergelijkingen der door A, B, C met BB', CC', AA' evenwijdig loopende rechten zijn

$$\left.\begin{aligned}(\alpha'+\beta')\beta+(\alpha'+2\beta'+\gamma')\gamma&=0,\\(\beta'+\gamma')\gamma+(\alpha'+\beta'+2\gamma')\alpha&=0,\\(\gamma'+\alpha')\alpha+(2\alpha'+\beta'+\gamma')\beta&=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad 1)$$

Door eliminatie van α, β, γ bekomt men, $\alpha'+\beta'+\gamma'=s'$ stellende, voor de voorwaarde dat die rechten door één punt gaan, de vergelijking

$$(s'-\alpha')(s'-\beta')(s'-\gamma')+(s'+\alpha')(s'+\beta')(s'+\gamma')=0$$

of, na ontwikkeling en weglating van den factor $\alpha'+\beta'+\gamma'$,

$$\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'+\alpha'\beta'+s'^2=0,$$

of

$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+3\beta'\gamma'+3\gamma'\alpha'+3\alpha'\beta'=0.$$

Deze vergelijking stelt de ellips voor die door de punten

$A_1(-1, 1, 1)$, $B_1(1, -1, 1)$, $C_1(1, 1, -1)$ gaat en $G(1, 1, 1)$ tot centrum heeft, dus de ellips van STEINER voor driehoek $A_1B_1C_1$.

Geeft men aan de vergelijkingen 1) den vorm

$$(\beta + \gamma)\alpha' + (\beta + 2\gamma)\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$
$$\alpha\alpha' + (\gamma + \alpha)\beta' + (\gamma + 2\alpha)\gamma' = 0,$$
$$(\alpha + 2\beta)\alpha' + \beta\beta' + (\alpha + \beta)\gamma' = 0,$$

dan verkrijgt men, door eliminatie van α', β', γ' en deeling door $\alpha + \beta + \gamma$, voor de meetkundige plaats van het punt Q de vergelijking

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0,$$

die de ellips van STEINER van driehoek ABC voorstelt.

Vraagstuk II.

K 1 c. Op de zijden van driehoek ABC beschrijft men buitenwaarts en binnenwaarts de gelijkzijdige driehoeken BCA′, CAB′, ABC′ en BCa', CAb', ABc', die tot middelpunten hebben I_a, I_b, I_c en i_a, i_b, i_c. Te bewijzen

a) dat de som der vierkanten van twee overeenkomstige zijden in de driehoeken $I_aI_bI_c$ en $i_ai_bi_c$ het derdedeel is van de som van de vierkanten der zijden van driehoek ABC;

b) dat de som van de vierkanten der zes zijden van de driehoeken A′B′C′ en $a'b'c'$ het vijfvoud is van de som der vierkanten van de zijden van driehoek ABC [1]).

Opgelosf *door* T. J. ALLERSMA, E. D. J. DE JONGH Jr., Dr. A. J. A. PRANGE *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Op de zijden $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ als basis beschrijve men buiten- en binnenwaarts gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken, de eerstgenoemde met de toppen P_a, P_b, P_c, de laatst-

[1]) Zooals door alle oplossers is opgemerkt, bevatte de oorspronkelijke opgaaf een onjuistheid.

genoemde met de toppen p_a, p_b, p_c. Zij ϕ een hoek van de basis in elk dier driehoeken en γ de hoek BCA van den gegeven driehoek, dan is $CP_a = Cp_a = \frac{a}{2\cos\phi}$, $CP_b = Cp_b = \frac{b}{2\cos\phi}$, $\angle P_aCP_b = \gamma + 2\phi$, $\angle p_aCp_b = \gamma - 2\phi$ en men heeft volgens den cosinusregel

$$\overline{P_aP_b}^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\phi} + \frac{b^2}{4\cos^2\phi} - \frac{2ab}{4\cos^2\phi}\cos(\gamma + 2\phi),$$

$$\overline{p_ap_b}^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\phi} + \frac{b^2}{4\cos^2\phi} - \frac{2ab}{4\cos^2\phi}\cos(\gamma - 2\phi).$$

Telt men deze vergelijkingen bij elkaar op en drukt men tevens $\cos\gamma$ in a, b en c uit, dan vindt men

$$\left.\begin{aligned}\overline{P_aP_b}^2 + \overline{p_ap_b}^2 &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\cos 2\phi}{2\cos^2\phi} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\cos 2\phi}{2\cos^2\phi}\end{aligned}\right\} \quad \ldots 1).$$

Voor $\phi = 30°$ is $\cos^2\phi = \frac{3}{4}$ en $\cos 2\phi = \frac{1}{2}$ en de vergelijkiug gaat over in

$$\overline{I_aI_b}^2 + \overline{i_ai_b}^2 = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Hiermede is de eerste stelling bewezen. Neemt men nu $\phi = 60°$, dan is $\cos^2\phi = \frac{1}{4}$ en $\cos 2\phi = -\frac{1}{2}$. De vergelijking 1) gaat dan over in

$$\overline{A'B'}^2 + \overline{a'b'}^2 = 3(a^2 + b^2) - c^2.$$

Men vindt verder door verwisseling van letters

$$\overline{B'C'}^2 + \overline{b'c'}^2 = 3(b^2 + c^2) - a^2,$$

$$\overline{C'A'}^2 + \overline{c'a'}^2 = 3(c^2 + a^2) - b^2$$

en door optelling van de laatste drie vergelijkingen

$$\overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'A'}^2 + \overline{a'b'}^2 + \overline{b'c'}^2 + \overline{c'a'}^2 = 5(a^2 + b^2 + c^2),$$

waarmede ook de tweede stelling bewezen is.

Vraagstuk III.

Q 2. In R_n is een simplex $S(n+1)$, d. w. z. een cel met $(n+1)$ hoekpunten, $(n+1)_2$ ribben, $(n+1)_3$ zijvlakken enz. ten grondslag gelegd aan een stelsel van barycentrische coördinaten. Van een tweede simplex $S'(n+1)$ zijn de coördinaten der hoekpunten achtereenvolgens

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1,n+1}),$$

$$(a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2,n+1}) \ldots (a_{n+1,1}, a_{n+1,2} \ldots a_{n+1,n+1}).$$

Te bewijzen, dat de inhoud I' van S' in den inhoud I van S wordt uitgedrukt door de betrekking

$$I' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} \ldots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} I.$$

(J. A. BARRAU.)

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

Als bekend wordt aangenomen de, naar analogie met R_2 en R_3 te bewijzen stelling, dat de inhouden van twee simplexen, waarvan de in een hoekpunt samenkomende ribben langs elkander vallen, met de producten dier ribben evenredig zijn.

Daar nu de te bewijzen stelling voor R_3 en R_3 bekend is, hebben we slechts aan te toonen dat ze voor R_n geldt indien ze voor R_{n-1} waar is.

Eenvoudigheidshalve zullen we hiertoe de geldigheid voor R_3 uit die voor R_2 afleiden, volgens eene methode echter, welke onveranderd voor de afleiding van R_n uit R_{n-1} kan worden gebezigd.

Zij PQRS het coördinaten-viervlak [algemeen: $S(n+1)$], $A_1A_2A_3A_4$ een tweede viervlak (simplex), waarvan de barycentrische coördinaten der hoekpunten gegeven zijn.

Projecteer die hoekpunten uit P op het vlak QRS [algem.: op de overstaande R_{n-1} van $S(n+1)$], dan vormen die projecties eene figuur $A'_1A'_2A'_3A'_4$, waarvan, bij beurtelingsche

weglating van een der punten, 4 driehoeken $A'_2A'_3A'_4$ enz. overblijven [algem.: $(n+1)$ simplexen $S(n)$ overblijven]

In het zijvlak QRS zijn nu de barycentrische coördinaten van

$$A'_1 : 0 , \frac{a_{12}}{1-a_{11}} , \frac{a_{13}}{1-a_{11}} , \frac{a_{14}}{1-a_{11}} \qquad \left[\text{algemeen: } \frac{a_{1,\,n+1}}{1-a_{11}}\right]$$

$$A'_2 : 0 , \frac{a_{22}}{1-a_{21}} , \frac{a_{23}}{1-a_{21}} , \frac{a_{24}}{1-a_{21}} \qquad \left[\text{algemeen: } \frac{a_{2,\,n+1}}{1-a_{21}}\right]$$

. . . . . .

Voor de inhouden der driehoeken $A'_2A'_3A'_4$, $A'_1A'_3A'_4$, $A'_1A'_2A'_4$ en $A'_1A'_2A'_3$, in verhouding tot driehoek PQR, mogen we nu den determinant der coördinaten stellen, dus

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{12}}{1-a_{11}} & \frac{a_{13}}{1-a_{11}} & \frac{a_{14}}{1-a_{11}} \\ \frac{a_{22}}{1-a_{21}} & \frac{a_{23}}{1-a_{21}} & \frac{a_{24}}{1-a_{21}} \\ \frac{a_{22}}{1-a_{21}} & \frac{a_{23}}{1-a_{31}} & \frac{a_{34}}{1-a_{31}} \end{vmatrix}$$

voor de verhouding van $A'_1A'_2A'_3$ tot QRS. Diezelfde verhouding bestaat echter tusschen de pyramide $PA'_1A'_2A'_3$ en het viervlak PQRS [algem.: tusschen de n-dimensionale pyramide met P tot top en $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ tot grondsimplex en het fundam. simplex.]

Vergelijken we nu de pyramiden $PA'_1A'_2A'_3$ en $PA_1A_2A_3$, waarvan de in P samenkomende ribben langs elkander vallen; hun verhouding is gelijk aan het product der verhoudingen

$$\frac{PA_1}{PA'_1} , \frac{PA_2}{PA'_2} , \frac{PA_3}{PA'_3} .$$

Deze verhoudingen zijn echter gelijk aan $(1-a_{11})$, $(1-a_{21})$, $(1-a_{31})$ zoodat door vermenigvuldiging van den gevonden determinant de noemers wegvallen en voor de verhouding $PA_1A_2A_3 : PQRS$ gevonden wordt

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} .$$

Nu is $A_1A_2A_3A_4 = PA_2A_3A_4 - PA_1A_3A_4 + PA_1A_2A_4 - PA_1A_2A_3$. Dus is de verhouding $A_1A_2A_3A_4 : PQRS$ gelijk aan den determinant

$$\pm \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

en daar ten slotte de som der barycentrische coördinaten van een punt gelijk is aan een, vindt men door de eerste kolom met de volgende kolommen te verminderen

$$I' : I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

in het algemeen dus het gevraagde.

Vraagstuk IV.

E 1 a. Men vraagt aan te toonen, dat de vergelijking

$$-\frac{1}{\Gamma(1+s)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\zeta(k-s)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+s-k)}$$

voor alle positieve waarden van s geldt. Hier stelt $\zeta(z)$ de functie $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots (z > 1)$ van RIEMANN voor.

(Dr. J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* Dr. J. C. KLUYVER *en* Dr. J. STEIN.

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

De Γ-functie en de ζ-functie kunnen, voor alle waarden van het argument z, aldus voorgesteld worden door lusintegralen

$$-\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \frac{1}{2\pi i e^{-i\pi z}} \int u^{-z-1} e^{-u} du,$$

$$-\frac{\zeta(-z)}{\Gamma(1+z)} = \frac{1}{2\pi i e^{-i\pi z}} \int \frac{u^{-z-1}}{e^u - 1} du.$$

De integratieweg loopt van $+\infty$ langs de reëele as tot in de nabijheid van 't nulpunt, draait éénmaal in negatieven zin om 't nulpunt, en keert weer langs dezelfde as terug naar $+\infty$. Verder moet arg. $u = 0$ zijn op het tweede rechtlijnige deel van den integratieweg.

Van deze definitiën uitgaande, schrijven wij achtereenvolgens

$$-\frac{1}{\Gamma(1+s)} = \frac{1}{2\pi i e^{-i\pi s}} \int u^{-s-1} e^{-u} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i e^{-i\pi s}} \int \frac{u^{-s-1}}{e^u - 1} (1 - e^{-u}) du =$$

$$-\frac{1}{2\pi i e^{-i\pi s}} \int \frac{u^{-s-1}}{e^u - 1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{i\pi k} u^k}{\Gamma(1+k)} du =$$

$$= -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2\pi i e^{i\pi(k-s)} \Gamma(1+k)} \int \frac{u^{k-s-1}}{e^u - 1} du =$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\zeta(k-s)}{\Gamma(1+k)\,\Gamma(1+s-k)},$$

mits deze reeks convergeere.

Voor $0 < s < k$ is

$$\text{mod.} \frac{\zeta(k-s)}{\Gamma(1+k)\,\Gamma(1+s-k)} < \text{mod.} \frac{\zeta(k-s)}{\Gamma(1-s+k)\,\Gamma(1+s-k)} =$$

$$= \text{mod.} \frac{\zeta(k-s) \sin \pi s}{\pi (k-s)}.$$

Daar $\zeta(k-s)$ bij toename van k zeer snel tot 1 nadert, naderen dus de termen der reeks tot nul. Het quotient van twee opeenvolgende termen u_{n+1} en u_n kunnen wij, bij zeer groote waarden van n, voorstellen door $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{s-n}{1+n}$, daar $\frac{\zeta(n-s+1)}{\zeta(n-s)} - 1$ van oneindig kleine orde is ten opzichte van $\frac{1}{n}$. De termen der reeks zijn dus afwisselend positief en negatief, terwijl de absolute waarde voortdurend afneemt en tot nul nadert. Derhalve convergeert de reeks voor $s > 0$.

Oplossing *van* Dr. J. C. KLUYVER.

Tot de beschouwde vergelijking kan men geraken door het onderzoek van eene functie $f_s(\theta)$, die men kan opvatten als eene uitbreiding van de functie van BERNOULLI.

Stelt men nl.

$$f_s(\theta) = -\frac{e^{\pi i s}}{2\pi i}\int_W \frac{e^{z(1-\theta)}-1}{e^z-1}\cdot\frac{dz}{z^{s+1}},$$

waarin s een positief getal, θ een argument tusschen 0 en 1 beteekent, en de integratieweg is een lus van $z=+\infty$ uit geslagen om $z=0$, dan zal deze functie voor geheele waarden van s niets anders zijn dan de functie van BERNOULLI met het rangnummer s. Maar voor elke waarde van s, geheel of niet, is $f_s(1)$ nul. Men heeft

$$f_s(\theta) = -\frac{e^{\pi i s}}{2\pi i}\int_W \frac{dz}{z^{s+1}}\left\{e^{-\theta z}+\frac{e^{-\theta z}-1}{e^z-1}\right\} =$$

$$= -\frac{e^{\pi i s}}{2\pi i}\int_W e^{-\theta z}z^{-s-1}dz - \frac{e^{\pi i s}}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\theta)^k}{k!}\int_W \frac{z^{k-s-1}dz}{e^z-1}$$

en volgens bekende integraalformules

$$f_s(\theta) = -\frac{e^{\pi i s}}{2\pi i}(e^{-2\pi i s}-1)\,\Gamma(-s)\,\theta^s -$$

$$-\frac{e^{\pi i s}}{2\pi i}(e^{-2\pi i s}-1)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\theta)^k}{k!}\,\Gamma(k-s)\,\zeta(k-s),$$

of

$$f_s(\theta) = -\frac{\theta^s}{\Gamma(1+s)} - \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\theta^k}{k!}\,\frac{\zeta(k-s)}{\Gamma(1+s-k)}.$$

Men heeft hierin te stellen $\theta=1$, en vindt

$$-\frac{1}{\Gamma(1+s)} = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\zeta(k-s)}{\Gamma(1+k)\,\Gamma(1+s-k)},$$

wat te bewijzen was.

Vraagstuk V.

M² 9 d. Bepaal de meetkundige plaats der gelijkzijdige hyperbolen, die evenwijdig zijn met een gegeven vlak en vier gegeven rechten snijden. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* Dr. C. STOLP, Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

1. *De vergelijking der meetkundige plaats.* Het coördinatenstelsel zij rechthoekig en het xy-vlak evenwijdig met het gegeven vlak, dat ondersteld wordt de vier rechten te snijden. Gebruik makende van de notaties

$$X_i = x_i + a_i z \quad , \quad Y_i = y_i + b_i z$$

kan men de vier gegeven rechten eenvoudig door de vergelijkingen

$$x = X_i \ , \ y = Y_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

voorstellen en een willekeurig punt P_i van één dier rechten door $P(X_i, Y_i, z)$ aanduiden. De gelijkzijdige hyperbool, die de rechten op een gegeven afstand z van het xy-vlak snijdt, heeft dan tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x^2 - y^2 & xy & x & y & 1 \\ X_1^2 - Y_1^2 & X_1Y_1 & X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2^2 - Y_2^2 & X_2Y_2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3^2 - Y_3^2 & X_3Y_3 & X_3 & Y_3 & 1 \\ X_4^2 - Y_4^2 & X_4Y_4 & X_4 & Y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Neemt men nu z veranderlijk, dan stelt deze vergelijking de gezochte meetkundige plaats voor, die, gelijk men ziet, een oppervlak van den zesden graad is. Voor de gevallen, dat het gegeven vlak evenwijdig is met één of twee van de gegeven rechten zal een afzonderlijk onderzoek worden ingesteld.

2. *Oneigenlijke hyperbolen.* De vergelijking 1), kortheidshalve geschreven in den vorm

$$A(x^2 - y^2) + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

stelt twee rechten op een afstand z van het xy-vlak voor, als voldaan is aan

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & -A & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Let men op de beteekenis der grootheden A, B, enz., dan ziet men, dat deze vergelijking van den veertienden graad is en de veranderlijke hyperbool dus veertien maal in twee rechten ontaardt.

De veertien waarden van z, die aan de laatste vergelijking voldoen, zijn evenwel eenvoudiger te bepalen als de veertien wortels van zeven vierkantsvergelijkingen. Zullen namelijk vier punten $P(X_i, Y_i, z)$ op twee elkaar loodrecht snijdende rechten liggen, dan moeten er òf drie op één van die twee rechten gelegen zijn en heeft men de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} X_i & Y_i & 1 \\ X_j & Y_j & 1 \\ X_k & Y_k & 1 \end{vmatrix} = 0, \ (i, j, k = 1, 2, 3, 4) \ . \ . \ . \ 3),$$

òf de rechten, die de punten twee aan twee verbinden, moeten loodrecht op elkaar staan, zoodat men heeft

$$(X_k - X_i)(X_j - X_k) + (Y_k - Y_i)(Y_j - Y_k) = 0. \ . \ . \ . \ . \ 4)$$

Van den eersten vorm zijn er *vier*, van den laatsten *drie* vergelijkingen.

3. *Bijzondere standen van het gegeven vlak.* In het algemeen bestaan er twee rechten m_1 en m_2, die vier willekeurig in de ruimte gegeven rechten l_i snijden. Laat nu het gegeven vlak evenwijdig zijn met één van die twee, bv. met m_1, dan kunnen wij deze rechte als y-as aannemen, zoodat de vergelijkingen van l_i worden $x = a_i z \equiv X_i$, $y = Y_i$. De grootheden X_i hebben nu den factor z gemeen en men kan, na de bovenste rij in het eerste lid van 1) met z vermenigvuldigd te hebben, de tweede en derde kolom door z deelen, waardoor de vergelijking 1) van den vijfden graad wordt. Daar nu de graad van elk der grootheden A, B enz. met de eenheid verminderd is, zal 2) een elfde-machtsvergelijking worden. In overeenstemming

hiermede ziet men, dat de vier vergelijkingen 3) een wortel $z = 0$ gemeen hebben, die voor het oppervlak als een enkele wortel in rekening te brengen is.

De deeling van 1) door z komt neer op de verwerping van het vlak $z = 0$ als deel der meetkundige plaats. Elk punt van dit vlak kan beschouwd worden als punt van een oneigenlijke hyperbool, daar men door dit punt een rechte kan trekken loodrecht op de rechte m_1, die de vier rechten l_i snijdt.

Is het gegeven vlak evenwijdig met beide rechten m_1 en m_2 dan zijn de vlakken, welke door die rechten evenwijdig met het gegeven vlak kunnen gelegd worden, oneigenlijke deelen der meetkundige plaats en is de laatste dus een oppervlak van den vierden graad.

Het gegeven vlak kan ook evenwijdig zijn met een der gegeven rechten, stel met l_4. Beschouwen wij nu eerst het vlak, dat door l_4 evenwijdig met het gegeven vlak gebracht kan worden. Door de snijpunten van de overige drie rechten met dit platte vlak gaat nu een bundel van gelijkzijdige hyperbolen die elk l_4 in twee punten zullen snijden. Dit vlak moet dus tweemaal als deel der gezochte meetkundige plaats in rekening gebracht worden.

Andere platte vlakken evenwijdig met het gegevene snijden de rechte l_4 in het oneindige, zoodat de richting van l_4 als richting van een der asymptoten van elke hyperbool te beschouwen is. Neemt men die richting aan als richting van de x-as of van de y-as, dan heeft de vergelijking van de gelijkzijdige hyperbool ($z =$ standv.) de gedaante

$$\Delta \equiv Axy + Bx + Cy + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5).$$

Laat men deze hyperbool voldoen aan de voorwaarde, dat zij door de drie punten $P(X_i, Y_i, z)$ gaat ($i = 1, 2, 3$), dan ziet men licht in, dat Δ niets anders is dan de minor van $X_4^2 - Y_4^2$ in het eerste lid van 1). De meetkundige plaats bestaat dus uit twee samenvallende platte vlakken en een oppervlak van den vierden graad.

De vergelijking 5) zal voor $z =$ standv. twee rechten voorstellen, wanneer voldaan is aan

$$AD - BC = 0.$$

De laatste vergelijking is van den zesden graad, zoodat er zes paar rechten evenwijdig met de x- en y-as bestaan, die de drie

rechten l_1, l_2, l_3 snijden. Men kan dan ook dezelfde zesdemachtsvergelijking aldus schrijven

$$(X_1 - X_2)(X_2 - X_3)(X_3 - X_1)(Y_1 - Y_2)(Y_2 - Y_3)(Y_3 - Y_1) = 0,$$

zoodat de zes wortels onmiddellijk bekend zijn.

Is eindelijk het gegeven vlak evenwijdig met de rechten l_3 en l_4 dan zal de meetkundige plaats enkel uit de twee door l_3 en l_4 gebrachte evenwijdige platte vlakken bestaan. De hyperbolen in het vlak door l_4 moeten voldoen aan de voorwaarde, dat een der asymptoten evenwijdig is met l_3; die van het vlak door l_3 aan de voorwaarde, dat een asymptoot evenwijdig is met l_4. Hyperbolen buiten de genoemde platte vlakken zouden asymptoten moeten hebben evenwijdig met beide rechten, wat in het algemeen onmogelijk is, omdat de asymptoten loodrecht op elkaar moeten staan.

Oplossing *van* Dr. H. de Vries.

I. Wij noemen de oneindig ver gelegen rechte van het gegeven vlak l_∞, en de gegeven rechten l_1, l_2, l_3, l_4. In ieder vlak door l_∞ ligt één gelijkzijdige hyperbool; de graad van het gezochte oppervlak is dus twee, vermeerderd met het getal dat aangeeft hoeveel malen de lijn l_∞, die natuurlijk op het oppervlak gelegen is, geteld moet worden; en dit getal is gelijk aan het aantal gelijkzijdige hyperbolen van het oppervlak die door een zelfde punt P_∞ van l_∞ gaan. Alle gelijkzijdige hyperbolen door P_∞ gaan echter tevens door het aan P_∞ loodrecht toegevoegde punt Q_∞ van l_∞; het bedoelde aantal is dus gelijk aan het aantal kegelsneden door twee punten P en Q, die op vier gegeven rechten l_1, l_2, l_3, l_4 rusten. Dit aantal kan op verschillende manieren bepaald worden, zooals uit het volgende zal blijken.

1. Alle kegelsneden door P en Q, die l_1, l_2, l_3 snijden, vormen een oppervlak O^4 met dubbelrechte PQ; want in ieder vlak door PQ ligt een kegelsnede van O, terwijl deze in de twee vlakken welke door de beide transversalen van PQ, l_1, l_2, l_3 bepaald worden, uiteenvalt in deze transversalen en de lijn PQ; het aantal kegelsneden door P en Q, die l_1, l_2, l_3, l_4 snijden, bedraagt dus vier.

2. Wij maken gebruik van het beginsel van het behoud van het aantal, en vereenvoudigen de figuur door l_1 in een

punt L_1 op PQ te laten rusten; in een willekeurig vlak door PQ moet dan de kegelsnede ontaarden, aangezien zij met PQ drie punten gemeen moet hebben; hieruit volgt dat er slechts twee vlakken bestaan, die zulke kegelsneden bevatten, nl. de vlakken die de lijn PQ met de beide snijlijnen van PQ, l_2, l_3, l_4 verbinden. In het vlak van PQ en l_1 echter is één werkelijke kegelsnede mogelijk; deze telt echter dubbel, daar zij de lijn l_1 tweemaal snijdt; het gezochte aantal is dus vier.

3. Wij passen het beginsel van het behoud van het aantal op andere wijze toe, door nl. l_1, l_2, l_3 in een vlak ε te brengen; in elk der drie vlakken door PQ en een der snijpunten van l_1, l_2, l_3 ligt dan een werkelijke kegelsnede, terwijl er slechts een bestaat die in een ander vlak gelegen is, nl. in het vlak door PQ en het snijpunt L_4 van l_4 met ε; deze bestaat uit de lijn PQ en den doorgang van het genoemde vlak op ε. Ook op deze wijze vinden wij dus voor het gezochte aantal vier.

Uit het bovenstaande volgt dat er 4 gelijkzijdige hyperbolen zijn, die door P_∞ en Q_∞ gaan en op l_1, l_2, l_3, l_4 rusten; het gezochte oppervlak is dus een O^6 met viervoudige rechte l_∞.

II. Bezit een O^n een $(n-2)$-voudige rechte, dan rusten op deze $(3n-4)$ paren van enkelvoudige rechten [1]); in ons geval bedraagt dit aantal dus 14. Deze 14 lijnenparen worden als volgt gevonden. Wij brengen een vlak door l_∞ en een van de twee transversalen van l_∞, l_1, l_2, l_3, en laten uit het snijpunt L_4 van dit vlak met l_4 de loodlijn neer op de genoemde transversaal $L_1L_2L_3$; dan ontstaat een lijnenpaar, dat op O^6 gelegen is, en het aantal op deze wijze gevonden lijnenparen bedraagt blijkbaar $4 \times 2 = 8$.

Het is echter ook mogelijk dat in een vlak door l_∞ twee van de verbindingslijnen der punten L_1, L_2, L_3, L_4 loodrecht op elkaar komen te staan; ook dan ontstaat een lijnenpaar dat op O^6 moet liggen. Snijden nu in een willekeurig door l_∞ gelegd vlak ε de verbindingslijnen L_1L_2 en L_3L_4 de lijn l_∞ in de punten P_∞ en Q_∞, en is P'_∞ op l_∞ loodrecht toegevoegd aan P_∞, dan is gemakkelijk in te zien dat de punten Q_∞ en P'_∞ bij draaiing van ε om l_∞ twee projectieve puntenreeksen door-

---

[1]) Zie J. DE VRIES „Rechte lijnen op oppervlakken met veelvuldige rechten". Versl. Kon. Akad. v. Wet. deel X, bl. 742.

loopen; want aan ieder punt P_∞ is één punt Q_∞ toegevoegd, en omgekeerd, en hetzelfde geldt voor Q_∞ en P'_∞. Nu gaat door elk der beide dubbelpunten dezer reeksen een snijlijn L_3L_4 van l_3 en l_4, en op deze staat dan de bijbehoorende lijn L_1L_2 loodrecht, waardoor dus 2 lijnenparen van O^6 ontstaan. Men kan echter evenzeer l_1 met l_3, l_2 met l_4, en eindelijk l_1 met l_4, l_2 met l_3 combineeren; in het geheel vindt men dus op deze wijze 6 lijnenparen. En hiermee zijn de 14 lijnenparen aangewezen.

De doorsnede van O^6 met ε_∞ bestaat uit l_∞ en een kegelsnede, waarvan men zich een denkbeeld kan vormen, wanneer men door een willekeurig punt der ruimte 4 lijnen trekt evenwijdig aan l_1, l_2, l_3, l_4, en nu opnieuw alle gelijkzijdige hyperbolen construeert die op deze rechten rusten en gelegen zijn in vlakken door l_∞; hierdoor ontstaat een quadratische kegel, die door ε_∞ in de bedoelde kegelsnede wordt gesneden.

III. De meetkundige plaats van de middelpunten der gelijkzijdige hyperbolen kan op de volgende wijze gevonden worden. De gelijkzijdige hyperbolen bepalen op l_∞ eene quadratische involutie, die de beide onbestaanbare cirkelpunten tot dubbelpunten heeft; hieruit volgt dat ons vraagstuk een bijzonder geval is van het volgende: de meetkundige plaats der kegelsneden te bepalen die op 4 gegeven lijnen rusten, en een gegeven lijn l snijden in puntenparen eener op die lijn gegeven quadratische involutie. Nu bestaan er (zie boven) 2 maal 4 kegelsneden die l in de dubbelpunten dier involutie aanraken; dus zijn er in ons geval 2 maal 4 kegelsneden, die l_∞ in de cirkelpunten aanraken. Deze kegelsneden zijn parabolen, kunnen echter ook als gelijkzijdige hyperbolen worden opgevat, en liggen dus op O^6. Immers wanneer men een willekeurig punt P in het vlak eener kegelsnede met haar oneindig ver gelegen punten verbindt, ontstaan twee lijnen die een hoek insluiten gelijk aan dien der asymptoten; doet men datzelfde in ons geval dan krijgt men een van de beide isotrope lijnen door P, dubbel geteld; maar deze staat loodrecht op zichzelf. De meetkundige plaats der middelpunten is een ruimtekromme R^9 met twee geïsoleerde viervoudige punten op l_∞, nl. de beide cirkelpunten, en dus van het geslacht nul, want ieder vlak door l_∞ bevat van deze kromme buiten l_∞ nog slechts één punt.

De meetkundige plaats der asymptoten is een O^{14} met twaalfvoudige rechte l_∞. In ieder vlak door l_∞ liggen nl. 2 asymptoten; verder gaan door ieder punt van l_∞ 4 hyperbolen, dus 4 asymptoten; maar bovendien stelt l_∞ voor elk der 8 kegelsneden die l_∞ aanraken, een asymptoot voor; de graad van het gezochte oppervlak is dus $2 + 4 + 8 = 14$.

De doorsnede van O^6 en O^{14} moet van den graad 84 zijn. Tot haar behooren in de eerste plaats de boven aangewezen 28 rechten van O^6. Daar verder gemakkelijk is in te zien dat de beide oppervlakken behalve deze 28 lijnen en buiten l_∞ geen punten gemeen kunnen hebben, moet l_∞ voor $84 - 28 = 56$ snijlijnen geteld worden. Dit is inderdaad het geval; want l_∞ is voor O^6 een viervoudige, voor O^{14} een twaalfvoudige rechte, en geldt dus als zoodanig reeds voor 48 snijlijnen; maar bovendien liggen in de 8 vlakken der l_∞ aanrakende kegelsneden ook nog de tweede asymptoten op l_∞, en dus ook op O^6; het getal 48 moet dus nog met 8 vermeerderd worden, en wordt inderdaad 56.

Ten slotte kan nog worden opgemerkt dat de graad van het oppervlak der asymptoten ook kan worden afgeleid uit het aantal van zijn snijpunten met een der lijnen l_1, l_2, l_3, l_4. Want l_1 snijdt dit oppervlak in de punten, waarin een lijn van elk der 14 lijnenparen van O^6 op haar rust, terwijl gemakkelijk is in te zien dat er geen andere snijpunten mogelijk zijn.

Vraagstuk VI.

P 1 e. Men beschouwt een verwantschap van twee punten P en P′, welke zoo geregeld is dat de barycentrische coördinaten van P t. o. v. een driehoek ABC achtereenvolgens gelijk zijn aan de barycentrische coördinaten van P′ t. o. v. een driehoek A′B′C′. Wanneer hebben twee overeenkomstige segmenten PQ en P′Q′ gelijke lengte? (J. NEUBERG.)

Oplossing *van* J. NEUBERG.

1. De absolute barycentrische coördinaten van P en Q zullen we door (m_1, m_2, m_3) en (m'_1, m'_2, m'_3) voorstellen.

Dan is

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1 \quad \text{en} \quad m'_1 + m'_2 + m'_3 = 1.$$

Hieruit volgt

$$(m_1 - m'_1) + (m_2 - m'_2) + (m_3 - m'_3) = 0.$$

De grootheden

$$\mu_1 = m_1 - m'_1 \ , \ \mu_2 = m_2 - m'_2 \ , \ \mu_3 = m_3 - m'_3$$

kunnen beschouwd worden als de coördinaten van het oneindig ver op PQ gelegen punt. Immers voor een punt M dezer rechte zijn de coördinaten voor te stellen door $am_k + a'm'_k$, waar dan $a : a' = \mathrm{MQ} : \mathrm{PM}$.

Om een uitdrukking te vinden voor den afstand PQ, voeren wij rechthoekige assen in. Worden P, Q, A, B, C achtereenvolgens aangewezen door (x, y), (x', y'), (x_1, y_1), (x_2, y_2) en (x_3, y_3), dan is blijkbaar

$$x = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 \ , \qquad x' = \Sigma\, m'_1x_1 \ ,$$

$$y = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 \ , \qquad y' = \Sigma\, m'_1y_1 .$$

Derhalve is

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = (\Sigma\,\mu_1x_1)^2 + (\Sigma\,\mu_1y_1)^2$$
$$= \Sigma\,\mu_1^2\,(x_1^2 + y_1^2) + 2\,\Sigma\,\mu_1\mu_2\,(x_1x_2 + y_1y_2).$$

Nu is $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$, dus

$$\mu_1^2 = -\,\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 \text{, enz.}$$

Men heeft dus

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = -\,\Sigma\,\mu_1\mu_2\,(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2).$$

Maar $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = c^2$, enz. derhalve

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = -\,c^2\mu_1\mu_2 - a^2\mu_2\mu_3 - b^2\mu_3\mu_1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 1).$$

2. Uit $\mathrm{PQ} = \mathrm{P'Q'}$ volgt nu

$$\frac{a^2 - a'^2}{\mu_1} + \frac{b^2 - b'^2}{\mu_2} + \frac{c^2 - c'^2}{\mu_3} = 0, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 2)$$

met de voorwaarde

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 3)$$

Hieruit vindt men de coördinaten van twee oneindig ver gelegen punten. In het vlak ABC zijn bijgevolg twee stelsels van even-

wijdige rechten, welke segmenten PQ bevatten, die aan de vraag voldoen.

Stelt men ter bekorting

$$a^2 - a'^2 = \alpha\,, \quad b^2 - b'^2 = \beta\,, \quad c^2 - c'^2 = \gamma\,,$$

en elimineert dan μ_3 tusschen

$$\alpha\mu_2\mu_3 + \beta\mu_3\mu_1 + \gamma\mu_1\mu_2 = 0 \quad \text{en} \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0\,,$$

dan vindt men

$$\mu_1 : \mu_2 = \{(\gamma - \alpha - \beta) \pm \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma)}\} : 2\beta.$$

De beide oplossingen zijn dus bestaanbaar als α, β, γ niet hetzelfde teeken hebben, of wanneer, voor het geval dat ze positief zijn, de grootheden $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ niet de zijden van een driehoek kunnen voorstellen.

3. We zullen op BC een punt M zoeken, zoo dat AM een van de boven aangewezen richtingen heeft. Is M′ op B′C′ het met M overeenstemmende punt, dan is dus AM = A′M′ en BM : MC = B′M′ : M′C′.

Op BC als basis beschrijven we den driehoek A_1BC gelijkvormig met A′B′C′. Dan is te voldoen aan $A_1M : A'M' = BC : B'C'$ en aan AM = A′M′, dus aan $A_1M : AM = BC : B'C'$; d. w. z. M is een der snijpunten van BC met een gemakkelijk te construeeren cirkel.

Is M gevonden, dan voldoet blijkbaar elk segment PQ evenwijdig met AM aan de vraag.

4. Is in het bijzonder $a = a'$, dus $\alpha = 0$, dan worden de beide richtingen aangewezen door $\mu_1 = 0$ en $\gamma\mu_2 + \beta\mu_3 = 0$; het eene stelsel loopt dus evenwijdig met BC (B′C′).

Plaatst men A′B′C′ zoo dat B′C′ met BC samenvalt, dan komen AP en A′P′ samen in een punt M van BC, bepaald door $BM : CM = m_3 : m_2$.

Is nu PQ evenwijdig met BC, en N het snijpunt van AQ en BC, dan heeft men

$$\frac{PQ}{MN} = \frac{AP}{AM} = \frac{A'P'}{A'M} = \frac{P'Q'}{MN},$$

zoodat inderdaad PQ = P′Q′.

Opmerking. Het meer algemeene vraagstuk, waarbij over-

eenkomstige segmenten een gegeven verhouding moeten hebben, geeft aanleiding tot soortgelijke beschouwingen. Een oplossing vindt men in mijn verhandeling „Sur un problème de JACOBI" (Bull. Soc. phys. math. de Kasan, 2e série, t. VI, 1902).

Vraagstuk VII.

Q 2. In een ruimte van vijf afmetingen zijn twee vlakken willekeurig aangenomen. Men projecteert alle punten van het eene vlak op het andere. Gevraagd de gebogen ruimte te onderzoeken, welke de meetkundige plaats der projecteerende lijnen is.

(Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* Dr. S. L. VAN OSS *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

Wij noemen het te projecteeren vlak ε_1, het vlak waarop geprojecteerd wordt ε_2; volgens het onderstelde moeten deze twee vlakken elkaar kruisen. De te onderzoeken ruimte wordt nu gevormd door alle loodlijnen, uit de punten van ε_1 op ε_2 neergelaten; door ieder punt van ε_1 gaat er één, en evenzoo door ieder punt van ε_2, omdat de beide vlakken willekeurig zijn, en dus de lineaire R_3, die door een willekeurig punt van ε_1 of ε_2 bepaald wordt en loodrecht op ε_2 is, met ε_2 of ε_1 slechts één punt gemeen heeft.

Zij P_2 het voetpunt in ε_2 van de loodlijn, uit een willekeurig punt P_1 van ε_1 neergelaten, en zij g_1 eene willekeurige rechte in ε_1 door P_1. Is verder U_2 het aan de oneigenlijke rechte u_2 van ε_2 loodrecht toegevoegde oneigenlijke vlak, dan bepaalt U_2 met g_1 een R_4, de projecteerende ruimte van g_1, en deze snijdt ε_2 volgens een rechte g_2 door P_2, de projectie van g_1 op ε_2; g_1 en g_2 moeten elkaar kruisen, omdat ε_1 en ε_2 elkaar kruisen, en de projecteerende stralen vormen een regelschaar eener hyperbolische paraboloïde, omdat tusschen de punten der beide puntenreeksen g_1, g_2 eene (1, 1) verwantschap bestaat, en de oneigenlijke punten dezer beide reeksen aan elkaar zijn toegevoegd; immers de loodlijn, uit het oneigenlijke punt van g_1 op ε_2 neergelaten, bevat twee verschillende oneigenlijke punten, is dus zelve eene oneigenlijke

rechte, en moet derhalve het oneigenlijke punt van g_2 opleveren. Draait nu g_1 om P_1, dan draait g_2 om P_2, en de hyperbolische paraboloïde doorloopt de te onderzoeken ruimte; deze is dus driedimensionaal, maar heeft om zich te kunnen ontwikkelen een R_5 noodig (zij bevat nl. de beide gegeven vlakken, en deze liggen niet in een R_4); wij zullen haar aanduiden door het symbool $R_3^{(g)}$.

Wij kunnen $R_3^{(g)}$ nog op een andere wijze ontstaan denken. Wanneer wij alle loodlijnen A_1A_2, B_1B_2, enz. uit de punten van ε_1 op ε_2 neergelaten, door de punten A_i, B_i, ... zoodanig verdeelen dat $\frac{A_1A_i}{A_2A_i} = \frac{B_1B_i}{B_2B_i} = \ldots = \lambda$, dan liggen de punten A_i, B_i, ... alle in een plat vlak [1]); $R_3^{(g)}$ ontstaat dus ook wanneer wij de ∞^1 vlakken construeeren die behooren bij alle waarden van λ van $-\infty$ tot $+\infty$; twee dezer vlakken zullen elkaar steeds kruisen, omdat anders $R_3^{(g)}$ in een R_4 zou liggen, en voor $\lambda = +1$ vindt men het vlak U_2 van hierboven.

Wij kunnen deze laatste ontstaanswijze nog anders uitdrukken. Beschouwen wij de drie loodlijnen $A_1A_2 = a$, $B_1B_2 = b$, $C_1C_2 = c$, uit 3 willekeurige punten A_1, B_1, C_1 van ε_1 op ε_2 neergelaten. De zooeven gebezigde punten A_i, B_i, C_i bepalen nu blijkbaar op a, b, c drie gelijkvormige puntenreeksen, en $R_3^{(g)}$ wordt gevormd door alle vlakken die drie toegevoegde punten dezer reeksen verbinden.

Deze laatste voortbrengingswijze kan nu weer dualistisch worden omgezet. De rechten a en b bepalen een R_3, die wij (ab) zullen noemen, en c kruist deze ruimte, omdat a, b, c noch in een R_4, noch in een R_3 gelegen zijn; (ab) bepaalt dus met ieder punt van c een R_4, en aangezien omgekeerd iedere R_4 door (ab) met c een punt gemeen moet hebben, verkrijgen wij op deze wijze een bundel van ruimten R_4 door (ab), die perspectief is met de puntenreeks op c. Een tweede dergelijke bundel heeft tot basisruimte de ruimte (bc), en is perspectief met de puntenreeks op a; een derde bundel zendt al zijne ruimten R_4 door (ca), en is perspectief met de puntenreeks op b. Deze 3 bundels zijn blijkbaar onderling projectief, en

---

1) Zie P. H. Schoute: „Mehrdimensionale Geometrie" I, Sammlung Schubert XXXV, p. 62.

drie aan elkaar toegevoegde R_4 snijden elkaar volgens een vlak van $R_3^{(g)}$, zoodat deze laatste ruimte kan worden opgevat als de meetkundige plaats van de snijvlakken van 3 onderling projectieve bundels van ruimten R_4 door de driedimensionale ruimten (ab), (bc), (ca). Zijn nl. A_i, B_i, C_i 3 toegevoegde punten der 3 reeksen a, b, c, dan zijn $(ab)\,C_i$, $(bc)\,A_i$, $(ca)\,B_i$ 3 toegevoegde R_4 der 3 ruimtenbundels. De beide eerste hebben het vlak $A_iB_iC_i$ en de lijn b, en dus de door deze beiden bepaalde R_3, de beide laatste hetzelfde vlak en de lijn c, en dus de door deze beiden bepaalde R_3, gemeen. Deze beide R_3 zijn verschillend, omdat anders b, c en het punt A_i in eenzelfde R_3, en dus b, c en a in eenzelfde R_4, zouden liggen, waaruit zou volgen dat ε_1 en ε_2 een punt gemeen moesten hebben; zij hebben dus niet meer dan het vlak $A_iB_iC_i$ gemeen, en hierdoor is de zooeven genoemde wijze van ontstaan aangetoond. In het bijzonder kan nog worden opgemerkt dat de ruimten R_4 door (ab), (bc) en (ca) achtereenvolgens evenwijdig met c, a en b, aan elkaar zijn toegevoegd, omdat de oneigenlijke punten der 3 puntenreeksen bijeen behooren.

Wij gaan nu de 3 bundels van R_4 snijden met een willekeurige R_3; dan ontstaan 3 in deze R_3 gelegen, onderling projectieve, vlakkenbundels, wier overeenkomstige vlakken elkaar snijden in de punten van een kubische ruimtekromme. Hieruit volgt deze hoofdeigenschap van $R_3^{(g)}$:

$R_3^{(g)}$ *wordt door iedere* R_3 *volgens eene kubische ruimtekromme, dus door ieder plat vlak in* 3 *punten gesneden.*

Er zijn dus m. a. w. 3 vlakken in $R_3^{(g)}$, die een gegeven vlak in een punt snijden, en hieruit volgt tevens de dualistische eigenschap: $R_3^{(g)}$ *bevat* 3 *vlakken, die met een gegeven vlak in een* R_4 *liggen.*

Wij zullen ten slotte $R_3^{(g)}$ snijden met de oneigenlijke ruimte U_4 van R_5. De doorsnede met eene willekeurige R_4 bestaat volgens bovenstaande hoofdeigenschap uit een oppervlak dat door iedere R_2 van die R_4 in 3 punten gesneden wordt; in U_4 valt dit oppervlak uiteen, daar wij reeds weten dat het vlak U_2 tot de doorsnede behoort; de rest wordt gevormd door de oneigenlijke rechten van alle vlakken van $R_3^{(g)}$ behalve U_2. Nu liggen op a, b, c 3 gelijkvormige puntenreeksen; de lijnen A_iB_i vormen dus een der regelscharen van een hyperbolische paraboloïde, en de oneigenlijke punten dezer lijnen liggen alle

op de lijn, die de oneigenlijke punten van A_1B_1 en A_2B_2 verbindt, en tevens U_2 snijdt; hetzelfde geldt voor de oneigenlijke punten van de rechten A_iC_i en de lijn die de oneigenlijke punten van A_1C_1 en A_2C_2 verbindt. Hieruit volgt dat de oneigenlijke rechten van alle vlakken van $R_3^{(g)}$ de eene regelschaar van een quadratisch oppervlak vormen dat U_2 volgens haar doorsnede met de door u_1 en u_2 bepaalde U_3 snijdt. Dit oppervlak vormt met U_2 de volledige doorsnede van $R_3^{(g)}$ met U_4. Ieder plat vlak in U_4 snijdt U_2 in een steeds bestaanbaar punt, en het quadratisch oppervlak in 2 punten die ook onbestaanbaar kunnen zijn of kunnen samenvallen, terwijl ook de gevallen niet buitengesloten zijn dat het snijpunt met U_2, en dus ook een van de snijpunten met het quadratisch oppervlak, op de snijlijn van U_2 met dit oppervlak, of dat zelfs alle drie de snijpunten op deze rechte gelegen zijn; $R_3^{(g)}$ kan dus door een R_3 volgens alle bekende typen van kubische ruimtekrommen gesneden worden, terwijl eindelijk deze kromme ontaardt voor de R_3 die een rechte van $R_3^{(g)}$ bevatten.

Vraagstuk VIII.

K 2 d. Stelt men de lijn van EULER van driehoek ABC, in normale coördinaten, door

$$x : y : z = (\sin B \sin C \operatorname{tg} \varphi - \cos B \cos C) : (\sin C \sin A \operatorname{tg} \varphi - \cos C \cos A) : \\ : (\sin A \sin B \operatorname{tg} \varphi - \cos A \cos B)$$

en de hyperbool van KIEPERT door

$$x \sin (A - \varphi) = y \sin (B - \varphi) = z \sin (C - \varphi)$$

voor, dan zijn de punten (φ_1) en (φ_2) dier hyperbool collineair met een punt (φ_3) der bedoelde rechte, als voldaan wordt aan

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_3 = 1.$$

(Dr. H. A. W. SPECKMAN.)

Opgelost *door* Dr. A. J. A. PRANGE, Dr. H. A. W. SPECKMAN *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Evenals in N°. 197 van Dl. VIII worden de snijpunten (ϕ_1)

en (ϕ_2) van de hyperbool van KIEPERT met de willekeurige rechte

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

bepaald uit de vierkantsvergelijking

$$L \sin^2 \phi - M \sin \phi \cos \phi + N \cos^2 \phi = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

waarin

$$L = \lambda \cos B \cos C + \mu \cos C \cos A + \nu \cos A \cos B,$$
$$M = \lambda \sin A + \mu \sin B + \nu \sin C,$$
$$N = \lambda \sin B \sin C + \mu \sin C \sin A + \nu \sin A \sin B.$$

Het snijpunt (ϕ_3) van 1) met de lijn van EULER vindt men door de substitutie der coördinaten van een willekeurig punt der laatste in 1), waardoor die vergelijking wordt

$$\lambda (\sin B \sin C \operatorname{tg} \phi - \cos B \cos C) + \mu (\sin C \sin A \operatorname{tg} \phi - \cos C \cos A) +$$
$$+ \nu (\sin A \sin B \operatorname{tg} \phi - \cos A \cos B) = 0$$

d. i. $\quad N \operatorname{tg} \phi - L = 0 \quad$ of $\quad \operatorname{tg} \phi_3 = L : N.$

Uit 2) volgt echter $\operatorname{tg} \phi_1 \operatorname{tg} \phi_2 = N : L$; derhalve is

$$\operatorname{tg} \phi_1 \operatorname{tg} \phi_2 \operatorname{tg} \phi_3 = 1.$$

Vraagstuk IX.

R 1 b. Een vlak stelsel beweegt zich in zijn eigen vlak. Bepaal de meetkundige plaats der punten, voor welke op een gegeven oogenblik de verhouding van den snelheidsvector tot den versnellingsvector standvastig is. (F. J. VAES.)

Opgelost *door* Dr. J. STEIN, F. J. VAES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

Zijn x en y de coördinaten van een punt P van het stelsel ten opzichte van een vast assenkruis, ξ en η zijn coördinaten ten opzichte van een tot het stelsel behoorend assenkruis, en is ϕ de hoek tusschen de x-as en de ξ-as, dan heeft men

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \cos \phi - \eta \sin \phi, \\ y &= y_0 + \xi \sin \phi + \eta \cos \phi. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Door differentiatie naar t vindt men hieruit

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'_0 - (\xi \sin\phi + \eta \cos\phi)\,\phi' = x'_0 - (y - y_0)\,\phi', \\ y' &= y'_0 + (\xi \cos\phi - \eta \sin\phi)\,\phi' = y'_0 + (x - x_0)\,\phi'. \end{aligned}\right\} \ldots . 2)$$

De snelheidspool (x_1, y_1) is dus bepaald door

$$0 = x'_0 - (y_1 - y_0)\,\phi' \quad \text{en} \quad 0 = y'_0 + (x_1 - x_0)\,\phi'.$$

Gebruik makende van deze betrekkingen, vindt men

$$x' = -(y - y_1)\,\phi' \quad \text{en} \quad y' = (x - x_1)\,\phi' \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Duidt men den afstand van P tot de snelheidspool P_1 door r aan, dan is de snelheid dus bepaald door

$$v = r\phi',$$

waaruit blijkt dat ϕ' de hoeksnelheid om P_1 voorstelt.

Differentiatie van 2) naar t levert nu de betrekkingen

$$\begin{aligned} x'' &= x''_0 - (\xi \cos\phi - \eta \sin\phi)\,\phi'^2 - (\xi \sin\phi + \eta \cos\phi)\,\phi'', \\ y'' &= y''_0 - (\xi \sin\phi + \eta \cos\phi)\,\phi'^2 + (\xi \cos\phi - \eta \sin\phi)\,\phi'', \end{aligned}$$

die men kan vervangen door

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x''_0 - (x - x_0)\,\phi'^2 - (y - y_0)\,\phi'', \\ y'' &= y''_0 - (y - y_0)\,\phi'^2 + (x - x_0)\,\phi'', \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

De versnellingspool P_2 (x_2, y_2) is dus aangewezen door

$$\begin{aligned} 0 &= x''_0 - (x_2 - x_0)\,\phi'^2 - (y_2 - y_0)\,\phi'', \\ 0 &= y''_0 - (y_2 - y_0)\,\phi'^2 + (x_2 - x_0)\,\phi''. \end{aligned}$$

Voor de ontbondenen der versnelling gelden dus ook de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -(x - x_2)\,\phi'^2 - (y - y_2)\,\phi'', \\ y'' &= -(y - y_2)\,\phi'^2 + (x - x_2)\,\phi'', \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

en de versnelling j is bepaald door

$$j = \rho \sqrt{\phi'^4 + \phi''^2},$$

waar ρ den afstand van P_2 tot P voorstelt.

De punten, waarvoor $v : j = c$ is, zijn derhalve te vinden uit de vergelijking

$$r\phi' = c\rho \sqrt{\phi'^4 + \phi''^2},$$

d. w. z. ze liggen op een cirkel ten opzichte waarvan de snelheidspool P_1 de inversie is van de versnellingspool P_2.

OPMERKING *van* F. J. VAES. Zet men in elk punt P de snelheid uit op de normaal van het vlak, dan liggen de uiteinden dezer segmenten op een kegel met de snelheidspool P_1 als top (*snelheidskegel*). Evenzoo kan men den *versnellingskegel* met P_2 als top invoeren. De projectie van de doorsnede dezer kegels levert de m. pl. der punten, waarvoor $v = j$ is. Vergroot men de versnellingen in reden van 1 tot c en zet de daardoor verkregen segmenten weer loodrecht op het vlak, dan ontstaat een nieuwe kegel, waarvan de doorsnede met den snelheidskegel tot projectie heeft de m. pl. der punten met $v = cj$.

Vraagstuk X.

M¹ 5 h. Uit een punt P van een vlakke kubische kromme trekt men de vier raaklijnen aan die kromme. De klasse te bepalen van de omhullende der zijden van den volledigen vierhoek, die de raakpunten tot hoekpunten heeft. (Dr. W. A. VERSLUYS).

Opgelost *door* Dr. J. STEIN, Dr. W. A. VERSLUYS, Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

Daar de algemeene vergelijking eener vlakke kubische kromme door eene lineaire transformatie herleid kan worden tot de gedaante:

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

zoo mogen wij ons tot de beschouwing van deze vergelijking bepalen. De coördinaten van een punt dezer kromme worden als functie van een parameter u ondubbelzinnig voorgesteld door

$$x = \wp u, \; y = \wp' u.$$

Zij $-2v$ de parameter van P; dan zijn de parameters der bedoelde raakpunten achtereenvolgens

$$v, \; v + \omega, \; v + \omega', \; v + \omega + \omega',$$

waar ω en ω' de halve perioden der elliptische functie voorstellen.

Noemen wij twee punten der kromme, waarvan de parameters eene halve periode verschillen, *correspondeerende* punten, dan heeft men blijkbaar 3 stelsels van correspondeerende punten, en het vraagstuk kan aldus gesteld worden: hoeveel lijnen, die twee correspondeerende punten van hetzelfde stelsel verbinden, gaan door een willekeurig punt (x_0, y_0) van het vlak?

Wij kiezen het stelsel $(u, u+\omega)$ en hebben dan u op te lossen uit

$$\frac{x_0 - \wp u}{x_0 - \wp(u+\omega)} = \frac{y_0 - \wp' u}{y_0 - \wp'(u+\omega)},$$

of uit

$$\wp u \wp'(u+\omega) - \wp' u \wp(u+\omega) + x_0\{\wp' u - \wp'(u+\omega)\} + y_0\{\wp(u+\omega) - \wp u\} = 0.$$

Het eerste lid is eene dubbelperiodieke functie met 3 polen voor $u = 0$ en 3 polen voor $u = \omega$; zij heeft dus 6 nulpunten, waarvan de som gelijk is aan $3\omega + 2m\omega + 2m'\omega'$. Daar de vergelijking niet verandert, als men u vervangt door $u + \omega$, kan men de nulpunten voorstellen door

$$v_1,\ v_1 + \omega,\ v_2,\ v_2 + \omega,\ v_3,\ v_3 + \omega.$$

Daar de wortels twee aan twee correspondeerende punten aanwijzen, is de omhullende van de derde klasse.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Noemen wij de raakpunten der raaklijnen uit P achtereenvolgens A, B, C, D, dan zijn AB, CD twee paren in één van de drie op de kubische kromme gelegen stelsels van toegevoegde puntenparen; AC, BD behooren dan tot het 2e, AD en BC tot het 3e stelsel. Projecteert men nu alle paren van het 1e stelsel uit A als centrum, dan ontstaat eene quadratische straleninvolutie, op wier beide dubbelstralen telkens een paar toegevoegde punten van dit stelsel gelegen is. Door A gaan dus 2 lijnen, die elk een puntenpaar uit het 1e stelsel bevatten; de lijn AB zelve is echter een derde, waaruit volgt dat de verbindingslijnen van alle puntenparen van het 1e stelsel een kromme van de 3e klasse omhullen. Hetzelfde geldt echter ook voor de beide andere stelsels; de in het vraagstuk bedoelde omhullende bestaat dus uit drie afzonderlijke krommen van de derde klasse.

Vraagstuk XI.

N² 1 g. Men vraagt het stelsel der rechten te onderzoeken, waarvan de projecties op twee onderling loodrechte vlakken, nadat de projectievlakken vereenigd zijn, symmetrisch liggen ten opzichte van een in het vlak van teekening willekeurig gekozen rechte.

(Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. C. STOLP *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Als coördinaatvlakken gebruiken wij de drie gewone projectievlakken en wel het eerste als xy-vlak, het tweede als xz-vlak, het derde als yz-vlak. Slaat men nu het tweede projectievlak zóó op het eerste neer, dat de positieve z-as met de negatieve y as samenvalt, dan kan men op de volgende wijze uit de vergelijkingen eener rechte die van hare projecties in het vlak van teekening afleiden.

Is de rechte in de ruimte gegeven door de vergelijkingen van het eerste en van het tweede projecteerend vlak, dan kan men de eerste vergelijking als die van de eerste projectie in het vlak van teekening beschouwen, terwijl men uit de tweede vergelijking die van de tweede projectie afleidt door eenvoudig z in $-y$ te veranderen.

De in de opgaaf bedoelde willekeurige rechte L_0 zij gegeven door de vergelijking

$$y - y_0 = x \operatorname{tg} \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 1)$$

Zij kan beschouwd worden als eerste en tweede projectie eener rechte L van het vlak dat den tweeden en vierden ruimtehoek middendoor deelt.

Nu kunnen de symmetrisch met L_0 liggende projecties eener rechte l met L_0 evenwijdig zijn. Ze hebben dan tot vergelijkingen

$$y - y_0 = x \operatorname{tg} \alpha + \lambda, \quad y - y_0 = x \operatorname{tg} \alpha - \lambda.$$

Verandert men in de tweede vergelijking y in $-z$ en telt men de vergelijkingen daarna bij elkaar op, dan is, onafhankelijk van λ,

$$y - z - 2y_0 = 2x \operatorname{tg} \alpha.$$

De rechten l van het stelsel, die evenwijdige projecties leveren, zijn dus evenwijdig met L en liggen alle in één plat vlak.

Laat nu l een rechte zijn, wier eerste en tweede projecties l_1 en l_2 niet evenwijdig zijn met L_0. Voor de symmetrische ligging ten opzichte van L_0 is dan vooreerst noodig, dat l_1 en l_2 door hetzelfde punt van L_0 gaan, waaruit volgt dat in de ruimte l de rechte L moet snijden. Zij P (ξ, η, ζ) dit snijpunt, dan heeft men voor l_1 en l_2 de vergelijkingen

$$y - \eta = (x - \xi) \operatorname{tg} \phi_1, \quad y - \eta = (x - \xi) \operatorname{tg} \phi_2.$$

Voor de symmetrische ligging van l_1 en l_2 ten opzichte van L_0 is verder noodig en voldoende, dat L_0 een paar overstaande door l_1 en l_2 gevormde hoeken middendoor deelt, zoodat men heeft $\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) = \alpha$ of $= \alpha \pm 90°$. Dit kan men ook uitdrukken door de enkele vergelijking $\operatorname{tg}(\phi_1 + \phi_2) = \operatorname{tg} 2\alpha$, of ook door

$$\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \phi_1 - \operatorname{tg} \phi_2 - \operatorname{tg} \phi_1 \operatorname{tg} \phi_2 \operatorname{tg} 2\alpha = 0.$$

De vergelijkingen voor l zijn nu dezelfde als voor l_1 en l_2 mits in de laatste y en η in $-z$ en $-\zeta$ veranderd worden; dus is $\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{y - \eta}{x - \xi}$ en $\operatorname{tg} \phi_2 = -\frac{z - \zeta}{x - \xi}$. Deze waarde van $\operatorname{tg} \phi_1$ en $\operatorname{tg} \phi_2$ in de vorige vergelijking overbrengende krijgt men na de verdrijving der breuken

$$(x-\xi)^2 \operatorname{tg} 2\alpha - (x-\xi)(y-\eta) + (x-\xi)(z-\zeta) + (y-\eta)(z-\zeta) \operatorname{tg} 2\alpha = 0 \quad .. 2).$$

Alle rechten, waarvoor ξ, η en ζ standvastig zijn, liggen dus op een quadratischen kegel. Het punt P (ξ, η, ζ), de top van den kegel, is een willekeurig punt van de rechte L.

Is $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$, dan kan het eerste lid van 2) ontbonden worden in twee factoren en men heeft

$$(x - \xi)(z - y + \eta - \zeta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Nu kan vooreerst $\alpha = 0$ zijn. De rechte $L_0 (y = y_0)$ is dan evenwijdig met de x-as, evenals de rechte $L (y = -z = y_0)$. Het punt (ξ, η, ζ) ligt op L, zoodat ook $\eta = -\zeta = y_0$. Uit 3) vindt men dus de twee vergelijkingen

$$x = \xi \text{ (willekeurig) en } z - y + 2y_0 = 0.$$

De eerste drukt uit, dat elke rechte, die de as van projectie loodrecht snijdt of kruist, tot het stelsel behoort; eerste en

tweede projectie vallen dan samen en zijn tevens symmetrisch met de rechte L_0, die evenwijdig met de as is. De tweede vergelijking stelt het platte vlak voor, waarin de overige rechten liggen (en waarvan tevens alle rechten tot het stelsel behooren).

In de tweede plaats kan $\alpha = 90°$ zijn. Laat men nu de y-as met L_0 samenvallen, dan wordt L bepaald door $x = 0$, $y = -z$, zoodat $\xi = 0$, $\eta = -\zeta$ is.

Uit 3) vindt men nu weer twee vergelijkingen die achtereenvolgens het vlak $x = 0$ en het stelsel evenwijdige vlakken $z - y + 2\eta = 0$ aanwijzen. Alle rechten van het eerste vlak geven projecties die met L_0 samenvallen. Van het stelsel evenwijdige vlakken vertegenwoordigt elk vlak een stralenbundel, die tot middelpunt heeft het snijpunt van dat vlak met de rechte $L\,(x = 0,\ y = -z)$.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

Men beschouwe de gegeven rechte als de beide samenvallende projecties eener rechte g_0; deze ligt dan in het vlak M dat den tweeden en vierden ruimtehoek middendoor deelt. Men late nu om een willekeurig punt S_0 van g_0 twee lijnen l', l'', zoodanig draaien dat zij steeds symmetrisch blijven ten opzichte van g_0, brenge verder door het punt S in de ruimte eene rechte a_H loodrecht op het horizontale vlak en eene rechte a_V loodrecht op het vertikale vlak aan, en verbinde eindelijk a_H en l' door een vlak, a_V en l'' door een tweede vlak. Dan beschrijven deze vlakken om de ribben a_H en a_V twee congruente vlakkenbundels, zoodat zij een orthogonalen kegel voortbrengen, die symmetrisch ligt ten opzichte van M, de rechten a_H, a_V en g bevat, en het vlak M, behalve in g, nog snijdt volgens eene rechte h wier beide samenvallende projecties in S loodrecht op g staan (immers van de rechte h liggen de beide projecties eveneens symmetrisch ten opzichte van g_0; daar zij echter tevens samenvallen ligt h zelve in M). Alle lijnen door S, wier beide projecties symmetrisch liggen ten opzichte van g_0, liggen dus op den zooeven genoemden orthogonalen kegel. Door het oneindig ver gelegen vlak wordt deze kegel gesneden volgens een kegelsnede k^2_∞, die de oneindig ver gelegen punten van g en h, en van de y- en z-as bevat. Beweegt zich het punt S langs de lijn g, dan verschuift deze kegel evenwijdig aan zich zelf;

de rechten, die aan de vraag voldoen laten zich dus samenvoegen tot congruente en evenwijdige orthogonale kegels, waarvan de toppen op g gelegen zijn, en die alle de lijn g zelve bevatten. Zij vormen blijkbaar een congruentie, nl. de congruentie der bisecanten der ontaarde kubische ruimtekromme, die uit g en k^2_∞ bestaat. Door ieder punt P der ruimte gaat er in het algemeen een, nl. de lijn door P en het punt dat het vlak Pg behalve G_∞ nog met k^2_∞ gemeen heeft. In ieder vlak liggen er drie, waarvan één op oneindigen afstand, terwijl de beide andere den doorgang van g op dat vlak met de doorgangen van k^2_∞ verbinden.

Vraagstuk XII.

M³ 6 i. Den graad te bepalen van de meetkundige plaats der middelpunten van alle kegelsneden, die op vijf in de ruimte gegeven kegelsneden rusten en hun vlakken door een gegeven rechte zenden. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

Wij noemen de gegeven rechte l, de gegeven kegelsneden k_i^2 ($i = 1 \ldots . 5$), en wijzen de snijpunten dezer krommen met een willekeurig door l gelegd vlak ε door K_i, K_i' ($i = 1 \ldots . 5$) aan. De graad der gezochte m.pl. is nu gelijk aan het aantal kegelsneden, die aan de in het vraagstuk gestelde voorwaarden voldoen, en tevens hun middelpunt op oneindigen afstand hebben, en dit aantal kan met behulp van de wet van het behoud van het aantal op elk der twee volgende wijzen gevonden worden.

I. Wij leggen de vlakken ε_1, ε_2, ε_3 van k_1^2, k_2^2, k^2_3 door l. Dan kunnen eigenlijke kegelsneden slechts in deze vlakken voorkomen, omdat in ieder ander vlak door l een kegelsnede van het bedoelde stelsel 3 van de 6 op l gelegen punten K_1, K'_1, K_2, K'_2, K_3, K'_3, moet bevatten en dus uiteen moet vallen in l en een andere rechte. Beschouwen wij nu het vlak ε_1. De in dit vlak gelegen 8 punten K_i, K_i' ($i = 2, 3, 4, 5$) kunnen op 16 verschillende manieren zoodanig in groepen van 4 worden saamgevat dat in elke groep slechts een punt van elke kegelsnede voorkomt; door de 4 punten van elke groep gaan

2 parabolen, zoodat in ε_1 32 parabolen van het stelsel liggen; deze snijden echter k_1^2 ieder in 4 punten, moeten dus elk viermaal geteld worden, waardoor wij het aantal 128 vinden. Daar hetzelfde voor de vlakken ε_2, ε_3 geldt, bedraagt het aantal parabolen $3 \times 128 = 384$.

In de andere vlakken ε door l kunnen volgens het bovenstaande slechts ontaarde kegelsneden liggen, waarvan l het eene bestanddeel is; de andere rechte moet dan met l evenwijdig zijn, omdat wij slechts kegelsneden zoeken waarvan het middelpunt op oneindigen afstand ligt. Nu gaan door het punt L_∞ van l vier rechten die k_4^2 en k^2_5 ieder in een punt snijden, en elke dezer rechten vormt met l eene kegelsnede die aan de vraag voldoet. Maar l bevat van elk der 3 kegelsneden k_1^2, k_2^2, k_3^2 2 punten, moet dus achtmaal in rekening gebracht worden, zoodat de 4 gevonden lijnenparen 32 kegelsneden vertegenwoordigen. Hierbij is echter nog het volgende op te merken: wanneer de basispunten van een kegelsnedenbundel 2 aan 2 op 2 evenwijdige lijnen liggen, bestaat een van de 2 parabolen van den bundel uit dit lijnenpaar; liggen echter de basispunten A, B, C op een rechte, en D er buiten, dan vallen de beide door deze 4 punten gaande parabolen samen in de figuur, gevormd door de lijn ABC en de lijn door D evenwijdig met ABC. Een zoodanig lijnenpaar vervangt dus *twee* parabolen. Deze bijzonderheid doet zich in ons geval voor bij elk der 32 boven gevonden kegelsneden; een van deze bestaat uit de lijn l, opgevat als verbindingslijn van K_1, K_2, K_3 en een lijn K_4K_5 evenwijdig met l; laten wij K_5 een oogenblik weg, dan geldt dit lijnenpaar voor 2 parabolen; door toevoeging van K_5 worden deze echter niet van elkaar gescheiden. In plaats van 32 vinden wij dus 64 kegelsneden, zoodat de graad der gezochte m. pl. $384 + 64 = 448$ wordt.

II. Wij brengen k_1^2, k_2^2, k_3^2 in een vlak V, dat l in een punt P snijdt. Eigenlijke kegelsneden zijn nu slechts mogelijk in de 12 vlakken ε die l met een der snijpunten van de 3 genoemde kegelsneden verbinden, en wel in elk dezer vlakken 16, wat dus in het geheel $12 \times 16 = 192$ kegelsneden oplevert. Immers gaat ε bijv. door één der snijpunten van k_1^2 en k_2^2, dan moet ieder der gezochte parabolen behalve dit punt nog een punt van k_3^2, k_4^2 en k_5^2 bevatten, en dit is $2 \times 8 = 16$ maal mogelijk.

Brengen wij ε door het snijpunt K_4 van k_4^2 met V, dan vormt de lijn PK_4 een aan de voorwaarden voldoende kegelsnede met elke der twee rechten door een der snijpunten K_5, K_5^1 evenwijdig met PK_4; deze rechte snijdt k_1^2, k_2^2, k_3^2 elk in 2 punten en moet dus achtmaal geteld worden, zoodat wij 16 parabolen vinden. Maar bovendien geldt ook hier weer de boven gemaakte opmerking, waardoor het aantal wordt opgevoerd tot 32. En daar V 4 snijpunten van k_4^2 en k_5^2 oplevert, vinden wij dus $4 \times 32 = 128$ parabolen.

Eindelijk vormen alle rechten, die k_4^2 en k_5^2 snijden en evenwijdig zijn met V, een regelvlak van den graad 8, zoodat 8 dezer rechten op l rusten. In het vlak ε door een dezer rechten wordt zij tot een parabool aangevuld door de snijlijn van ε met V, en deze parabool moet 16 maal geteld worden, 8 maal omdat de in V gelegen rechte k_1^2, k_2^2 en k_3^2 ieder tweemaal snijdt, en elk van deze 8 tweemaal volgens de opmerking onder I. Zoo vinden wij dus nog $16 \times 8 = 128$ parabolen. Ook op deze wijze wordt dus voor den gezochten graad $192 + 128 + 128 = 448$ gevonden.

Van het in het vraagstuk bedoelde oppervlak liggen in ieder vlak ε door l 32 kegelsneden; de m. pl. der middelpunten is dus eene ruimtekromme van den graad 448, die in 416 punten op l rust, m. a. w. onder de kegelsneden van het oppervlak hebben 416 hun middelpunt op l.

Opmerking *van* Dr. J. de Vries. De kegelsneden, die l tweemaal snijden en op 5 rechten rusten, vormen een oppervlak van den achtsten graad met zesvoudige rechte l. (zie b.v. mijn mededeeling in Versl. Kon. Akad. v. Wet. X, 195). Hieruit leidt men gemakkelijk af dat de in de opgave bedoelde kegelsneden een oppervlak van den graad $2^5 \times 8 = 256$ vormen dat 192 maal door l gaat.

Vraagstuk XIII.

R 8 a. In een lichaam van onveranderlijke gedaante neemt men twee rechten l_1, l_2 en op deze achtereenvolgens de punten P_1, P_2 willekeurig aan. Door een in P_1 langs l_1 aangebrachte impulsie verkrijgt P_2 eene zekere snelheid; hare ontbondene langs l_2 is even groot als de ontbondene langs l_1 van de snelheid, welke P_1 zal verkrijgen, als de impulsie in P_2 langs l_2 aangrijpt.

(Dr. P. Zeeman Gz.)

Opgelost *door* W. Mantel, Dr. J. Stein *en* Dr. P. Zeeman Gz.

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

Het lichaam hebbe tot massa de eenheid, terwijl ook de eenheid van impulsie worde aangebracht. De traagheidsmomenten om de hoofdassen OX, OY, OZ in het massa-middelpunt O zijn achtereenvolgens A, B, C; de coördinaten van P_1 en P_2 zijn $(x_1y_1z_1)$ en $(x_2y_2z_2)$; de richtingscoëfficiënten van l_1 en l_2 zijn $(a_1b_1c_1)$ en $(a_2b_2c_2)$.

Wordt de impulsie langs l_1 aangebracht, dan verkrijgt het lichaam een translatie in die richting met snelheid $= 1$, en een wenteling om een oogenblikkelijke as, gaande door 't zwaartepunt. De componenten der hoeksnelheid noemen wij p, q, r.

De ontbondene v_2 der snelheid van P_2 langs l_2, wordt nu voorgesteld door

$$v_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Voor de componenten p_1, q_1, r_1 der hoeksnelheid heeft men

$$p_1 = \frac{y_1c_1 - z_1b_1}{A}, \quad q_1 = \frac{z_1a_1 - x_1c_1}{B}, \quad r_1 = \frac{x_1b_1 - y_1a_1}{C}.$$

Dit substitueerende in de waarde voor v_2 verkrijgen wij

$$v_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + \frac{1}{A}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{B}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} +$$
$$+ \frac{1}{C}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Deze uitdrukking is symmetrisch ten opzichte van de aanwijzers 1 en 2; hiermee is het gestelde bewezen.

Vraagstuk XIV.

M² 2 g. Van een willekeurige ruimtekromme K is F de focaalkromme. Te bewijzen dat K de focaalkromme van F is.

(Dr. P. ZEEMAN GZ.)

Opgelost *door* Dr. H. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

De focaalkromme van K is de dubbelkromme van het gemeenschappelijk omgeschreven ontwikkelbaar oppervlak O_k van K en den absoluten cirkel in het oneindige, C_i; de volledige dubbelkromme van dit oppervlak bestaat uit K zelve en nog eene andere kromme F, en deze laatste is de focaalkromme van K. Door iedere raaklijn van F gaan dus 2 gemeenschappelijke raakvlakken van K en C_i. Bovendien is C_i eene r-voudige kromme op O_k, als r de rang der kromme K is.

Beschouwen wij nu het gemeenschappelijk omgeschreven ontwikkelbaar oppervlak O_f behoorende bij de beide krommen F en C_i. Iedere raaklijn van F wordt door 2 raaklijnen van C_i gesneden; door iedere raaklijn van F zijn dus slechts 2 vlakken mogelijk die F en C_i beide aanraken. Zooeven vonden wij echter bij de beschouwing van het oppervlak O_k door iedere raaklijn van F 2 vlakken die K en C_i beide aanraken; deze vlakken vallen dus samen met de beide nu gevonden raakvlakken van O_f, en hieruit volgt dat de oppervlakken O_k en O_f samenvallen. De volledige dubbelkromme bestaat uit de beide krommen K en F; dus is K de focaalkromme van F.

OPMERKING VAN Dr. P. ZEEMAN GZ. In sommige gevallen zal de focaalkromme F in twee of meer krommen F_1, F_2 enz. uiteenvallen. Dan zal de focaalkromme van F_1 bestaan uit de krommen K, F_2, enz.; evenzoo de focaalkromme van F_2 uit de krommen K, F_1, enz. Een welbekend voorbeeld daarvan is het volgende.

De focaalkromme der ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $z = 0$ bestaat uit de hyperbool $\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$, $y = 0$ en de imaginaire ellips $\frac{y^2}{c^2} + \frac{z}{a^2} + 1 = 0$, $x = 0$; de focaalkromme van de hyperbool $\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$, $y = 0$ valt uiteen in de beide ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $z = 0$ en $\frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} + 1 = 0$, $x = 0$.

Vraagstuk XV.

M² 2 g. Is P een punt der focaalkromme F van een ruimtekromme K, en r de raakkoorde (richtlijn) van P, dus de verbindingslijn der punten, waarin K geraakt wordt door een puntbol P, dan is (Pr) het normaalvlak van F in het punt P.

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. H. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

Is P een punt der focaalkromme, en projecteeren wij uit dit punt de gegeven kromme K en den absoluten cirkel in het oneindige, C_i, dan hebben, volgens de bepaling der focaalkromme, deze twee kegels 2 raakvlakken gemeen, en de snijlijn t dezer beide raakvlakken is de raaklijn in P aan de focaalkromme F. Verbinden wij de beide ribben, langs welke de beide kegels elkaar raken, door een vlak, dan is dit blijkbaar het poolvlak van de lijn t ten opzichte van den quadratischen kegel [P, C_i]; en dit vlak bevat de verbindingslijn r van de beide punten waar K dezen kegel raakt. Nu staat echter, zooals bekend is, bij den kegel [P, C_i] ieder poolvlak loodrecht op den bijbehoorenden poolstraal; dus staat ook het vlak (Pr) loodrecht op de raaklijn t in P aan F.

Vraagstuk XVI.

K 1 c. Als de punten A′, B′, C′ symmetrisch liggen met een punt P ten opzichte van de middens der zijden BC, CA, AB van driehoek ABC, vraagt men de meetkundige plaats van P te bepalen, als de loodlijnen, in A, B, C op AA′, BB′, CC′ getrokken, door een punt Q gaan. Bepaal ook de meetkundige plaats van Q.

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. R. H. VAN DORSTEN, J. GEEST, J. A. KERKHOVEN, F. SCHUH *en* Dr. H. A. W. SPECKMAN.

Oplossing *van* Dr. R. H. VAN DORSTEN.

Bij willekeurige ligging van P volgt gemakkelijk uit de constructie, dat AB′ en BA′ gelijk en evenwijdig zijn met PC;

derhalve deelen AA′ en BB′ elkaar middendoor in een punt S, dat dan tevens het midden van CC′ is.

Zullen de lijnen, die in A, B, C achtereenvolgens loodrecht op AS, BS, CS staan, elkaar in een punt Q snijden, dan moeten QABS, QBCS en QCAS koordenvierhoeken zijn. De meetkundige plaats van Q, en tevens van S, is dus de om ABC beschreven cirkel, terwijl Q en S altijd de uiteinden van een middellijn zijn.

Is nu D het midden van BC, dan volgt uit PD = DA′ en AS = SA′, dat AP evenwijdig is met SD en AP = 2SD. Hieruit volgt dat het zwaartepunt Z van driehoek ABC op PS ligt en PZ = 2ZS is. Daar Z het gelijkvormigheidspunt is van ABC en den driehoek A″B″C″, waarvan de zijden in A, B en C worden middendoor gedeeld, is de meetkundige plaats van P de omgeschreven cirkel van A″B″C″, d. i. de cirkel die het hoogtepunt van ABC tot middelpunt heeft, terwijl zijn straal gelijk is aan de middellijn van cirkel ABC.

OPMERKING. Deze oplossing verschilt slechts in bijzaken van de oplossingen der heeren KERKHOVEN, SCHUH en SPECKMAN.

(RED.)

Vraagstuk XVII.

K 1 d. Zijn D, E, F de middens der zijden van driehoek ABC, is P een willekeurig punt van het vlak, en trekt men AA′, BB′, CC′ loodrecht [1]) op en gelijk aan PD, PE, PF, dan zijn de driehoeken A′B′C′ en ABC gelijkvormig, en heeft men

$$\text{inh. } A'B'C' = \tfrac{5}{4} \text{ inh. } ABC.$$

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, J. A. BARRAU, C. A. CIKOT, Dr. R. H. VAN DORSTEN, J. A. KERKHOVEN, J. C. DE MASIER *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* J. A. BARRAU, C. A. CIKOT *en* F. SCHUH.

Trek A′K evenwijdig met en gelijk aan AB, zoodat

---

[1]) Zegt men dat de rechte MN loodrecht staat op de rechte PQ, dan wordt daarbij ondersteld dat, na draaiing van de figuur in een stand, waarin P en Q links en rechts liggen, de loodlijn MN van beneden naar boven gericht is

BK = AA′ = PD wordt. Verder is BB′ = PE en ∠KBB′ = ∠DPE, daar BK loodrecht staat op PD en BB′ op PE. Hieruit volgt, dat de driehoeken KBB′ en DPE congruent zijn, zoodat $KB' = DE = \frac{1}{2} AB$, en tevens KB′ loodrecht staat op ED en dan ook op A′K.

Men krijgt dus

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{A'K}^2 + \overline{KB'}^2 = \overline{AB}^2 + \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2 = \tfrac{5}{4}\overline{AB}^2,$$

$$A'B' = \tfrac{1}{2} AB \sqrt{5}.$$

Evenzoo is natuurlijk $B'C' = \frac{1}{2} BC \sqrt{5}$ en $C'A' = \frac{1}{2} CA \sqrt{5}$, zoodat de driehoeken ABC en A′B′C′ gelijkvormig zijn. Daaruit volgt

$$\frac{\text{Inh. } A'B'C'}{\text{Inh. } ABC} = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{5}{4}.$$

Opmerkingen van C. A. Cikot. 1. Vorm en orientatie van driehoek A′B′C′ zijn onafhankelijk van de plaats van P; zijn zijden maken met de overeenkomstige zijden van ABC een hoek β, bepaald door $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$.

2. Neemt men P in het zwaartepunt Z van ABC, dan bepalen ABC en A′B′C′ twee gelijkvormige stelsels met draaipunt (dubbelpunt) Z, dat dan ook zwaartepunt is van A′B′C′.

3. Maken AA′, BB′, CC′ een hoek α met PD, PE, PF, kan wordt inh. $A'B'C' = (\frac{5}{4} - \cos \alpha)$ inh. ABC. Men vindt dus den grootsten driehoek voor $\alpha = 180°$, den kleinsten voor $\alpha = 0°$.

Oplossing *van* Dr. R. H. van Dorsten.

Als α, β, γ de vectoren PD, PE, PF voorstellen, dan heeft men $PA = -\alpha + \beta + \gamma$, $PB = \alpha - \beta + \gamma$, $PC = \alpha + \beta - \gamma$, $PA' = PA + i\alpha = (i-1)\alpha + \beta + \gamma$, $PB' = \alpha + (i-1)\beta + \gamma$, $PC' = \alpha + \beta + (i-1)\gamma$. Dus $A'B' = PB' - PA' = \left(1 - \frac{i}{2}\right) AB$, $B'C' = \left(1 - \frac{i}{2}\right) BC$, $C'A' = \left(1 - \frac{i}{2}\right) CA$.

Hieruit volgt dat driehoek A′B′C′ gelijkvormig is met driehoek ABC, in verhouding van $\frac{1}{2}\sqrt{5} : 1$; hun inhouden verhouden zich dus als 5 tot 4.

Vraagstuk XVIII.

K 1 d. $A_1B_1C_1$ zij de eerste driehoek van BROCARD behoorende bij driehoek ABC. Als de loodlijnen in A, B, C op AA_1, BB_1, CC_1 getrokken de zijden BC, CA, AB in A', B', C' snijden, is de inhoud van driehoek A'B'C' het dubbel van den inhoud van driehoek ABC. (Dr. A. VAN AUBEL)

Opgelost *door* Dr. H. VAN AUBEL, Dr. R. H. VAN DORSTEN *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* F. SCHUH.

De snijpunten van AA_1, BB_1 en CC_1 met BC, CA en AB noemen wij A'', B'' en C''. Van A_1 zijn de barycentrische coördinaten $\beta+\gamma$, $\alpha+\beta$, $\gamma+\alpha$, waarin α, β en γ de cotangenten der hoeken A, B en C voorstellen. Van A'' zijn dus de coördinaten 0, $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, en men vindt

$$BA'' = \frac{\alpha+\gamma}{2\alpha+\beta+\gamma}\,a.$$

Zij D het voetpunt van de hoogtelijn door A, dan is

$$BD = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\,a,$$

$$AD = \frac{1}{\beta+\gamma}\,a,$$

$$A''D = BD - BA'' = \frac{(\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}{(2\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma)}\,a,$$

$$DA' = \frac{AD^2}{A''D} = \frac{2\alpha+\beta+\gamma}{(\beta^2-\gamma^2)(\alpha+\beta+\gamma)}\,a,$$

$$BA' = BD + DA' = \left[\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{2}{\beta^2-\gamma^2} - \frac{1}{(\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}\right]a.$$

Daar $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 1$ is, wordt

$$\frac{2}{\beta^2-\gamma^2} = \frac{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\beta^2-\gamma^2},$$

dus

$$BA' = \left[\frac{2\alpha+\beta}{\beta-\gamma} - \frac{1}{(\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}\right]a.$$

Hierin zijn segmenten langs BC positief gerekend van B naar C; let men op de teekens en de volgorde der letters, dan geldt deze afleiding voor alle gevallen. Door verwisseling van β en γ vindt men

$$CA' = \left[\frac{2\alpha + \gamma}{\gamma - \beta} - \frac{1}{(\gamma - \beta)(\alpha + \beta + \gamma)}\right] a,$$

positief gerekend van C naar B. Door cyclische letterverwisseling vindt men CB', AB', AC' en BC', bv.

$$BC' = \left[\frac{2\gamma + \beta}{\beta - \alpha} - \frac{1}{(\beta - \alpha)(\alpha + \beta + \gamma)}\right] c,$$

positief gerekend van B naar A.

Zijn nu I en I' de inhouden der driehoeken ABC en A'B'C', dan heeft men

$$\text{inh. } A'BC' + \text{inh. } C'AB' - \text{inh. } A'CB' = I + I'$$

of daar

$$\text{inh. } A'BC' = I \,.\, \frac{BA' \,.\, BC'}{ac}, \quad \text{enz.}$$

$$\frac{BA' \,.\, BC'}{ac} + \frac{CB' \,.\, CA'}{ba} + \frac{AC' \,.\, AB'}{ca} = 1 + \frac{I'}{I}$$

welke laatste vergelijking, als men op de teekens let, steeds juist is. Men heeft nu

$$\frac{BA' \,.\, BC'}{a \,.\, c} = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\left[(4\alpha\gamma+\beta^2)(\alpha-\gamma)+2\beta(\alpha^2-\gamma^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha-\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} - 4(\alpha-\gamma)\right] =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\left[\beta^2(\alpha-\gamma) - 2\beta(\alpha^2-\gamma^2) + \frac{\alpha-\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\right].$$

Door letterverwisseling en optelling vindt men

$$\frac{BA' \,.\, BC'}{a \,.\, c} + \frac{CB' \,.\, CA'}{b \,.\, a} + \frac{AC' \,.\, AB'}{c \,.\, a} =$$

$$= \frac{3}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\left[\beta^2(\alpha-\gamma) + \gamma^2(\beta-\alpha) + \alpha^2(\gamma-\beta)\right] = 3,$$

zoodat ten slotte

$$1 + \frac{I'}{I} = 3,$$

of

$$I' = 2I.$$

Vraagstuk XIX.

C 5. Men vraagt het symbool $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n$ in den vorm

$$p_0 \frac{d^n}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{d}{dx}$$

te ontwikkelen. (Dr. W. KAPTEYN.

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN, F. SCHUH *en* Dr. J. STEIN.

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

Stelt men $\frac{d^n}{dx^n} = D^n$, $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n = \Delta^n$, en gaat men uit van de bekende betrekkingen (vgl. FRENET, Recueil d'Ex., 3e Ed., no. 117)

$$D^n = x^n\Delta^n + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}\Delta^{n-1} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{k!\,2^k} x^{n-2k}\Delta^{n-k} + \ldots$$

$$D^{n-1} = x^{n-1}\Delta^{n-1} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-2k+2)}{(k-1)!\,2^{k-1}} x^{n-2k+1}\Delta^{n-k} + \ldots$$

. . . . . .

dan vindt men zonder moeite de eerste termen der gevraagde ontwikkeling

$$\Delta^n = \frac{1}{x^n} D^n - \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} D^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2!\,2^2} \frac{1}{x^{n+2}} D^{n-2} + p_3 D^{n-3} + \ldots + p_{n-1} D.$$

Derhalve is, voor $n \leqq 3$, de coëfficient p_k gelijk aan

$$(-1)^k \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n-k)}{k!\,2^k} \cdot \frac{1}{x^{n+k}}.$$

Eene eenvoudige becijfering leert, dat deze betrekking, indien zij geldig is voor $n = m$, ook doorgaat voor $n = m + 1$. Zij is dus algemeen geldig.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Men ziet gemakkelijk, dat p_0 den factor $\frac{1}{x^n}$, p_1 den factor $\frac{1}{x^{n+1}}$ enz. bevat; men kan dus stellen

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n = {}_nq_0 \frac{1}{x^n}\frac{d^n}{dx^n} - {}_nq_1 \frac{1}{x^{n+1}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots +$$

$$+ (-1)^{m-1}\,{}_nq_{m-1} \frac{1}{x^{n+m-1}}\frac{d^{n-m+1}}{dx^{n-m+1}} + (-1)^m\,{}_nq_m \frac{1}{x^{n+m}}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} +$$

$$+ \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\,{}_nq_{n-1} \frac{1}{x^{2n-1}}\frac{d}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

waarin de grootheden q constanten zijn. Door op beide leden dezer vergelijking de bewerking $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$ toe te passen, en de termen op te zoeken die $\frac{d^{n+1-m}}{dx^{n+1-m}}$ bevatten, vindt men

$${}_{n+1}q_m = {}_nq_m + (n+m-1)\,{}_nq_{m-1},$$

of als men n door $n-1$ vervangt,

$${}_nq_m = {}_{n-1}q_m + (n+m-2)\,{}_{n-1}q_{m-1}, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

terwijl men voor $m = 0$ heeft

$${}_nq_0 = {}_{n-1}q_0,$$

en voor $m = n - 1$

$${}_nq_{n-1} = (2n-3)\,{}_{n-1}q_{n-2},$$

hetgeen ook in de vergelijking 2) ligt opgesloten, als we ${}_nq_{-1}$

door nul vervangen. Door vergelijking 2) zijn dus alle q's af te leiden uit

$$_1q_0 = 1.$$

Voor $m = 0$ vindt men

$$_nq_0 = 1,$$

voor $m = 1$

$$_nq_1 = {}_{n-1}q_1 + n - 1,$$

of daar $_1q_1 = 0$ is,

$$_nq_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Door $m = 2$ te stellen vindt men

$$_nq_2 = {}_{n-1}q_2 + n \cdot {}_{n-1}q_1 = {}_{n-1}q_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2},$$

of daar $_2q_2 = 0$ is,

$$_nq_2 = \tfrac{1}{2}\{1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + (n-2)(n-1)n\} =$$
$$= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{2.4}.$$

Voor $m = 3$ vindt men verder

$$_nq_3 = {}_{n-1}q_3 + (n+1) \cdot {}_{n-1}q_2 = {}_{n-1}q_3 + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{2.4},$$

of daar $_3q_3 = 0$ is,

$$_nq_3 = \frac{1}{2.4}\{1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\} =$$
$$= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{2.4.6}.$$

Op deze wijze doorgaande, vindt men

$$_nq_m = \frac{(n-m)(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n+m-1)}{2.4.6\ldots(2m)} = \frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!\,m!\,2^m}.$$

Hieruit volgt dan

$$p_m = (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!\,m!\,2^m} \frac{1}{x^{n+m}},$$

zoodat de gevraagde ontwikkeling is

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n = \sum_{m=0}^{m=n-1} (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!\,m!\,2^m} \frac{1}{x^{n+m}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}.$$

Vraagstuk XX.

E 5. Men vraagt de juistheid aan te toonen van de betrekkingen

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^2+1} = 1 + z\int_0^1 \sin\left(\lg\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1-xz},$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} e^{-\frac{a}{n}} z^n = z\int_0^1 J_0\left(2\sqrt{a\log\frac{1}{x}}\right)\frac{dx}{1-xz}\ ^{1)},$$

die zonder bewijs voorkomen in een verhandeling van E. LE ROY, *Ann. de Toulouse*, 1900. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN *en* Dr. J. STEIN.

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

1. Stelt men $\lg\frac{1}{x} = y$, dan wordt

$$J_1 = \int_0^1 \sin\left(\lg\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1-xz} = \int_0^\infty \frac{\sin y}{e^y - z}\,dy.$$

Indien $z < 1$ is, kan men aldus ontwikkelen

$$J_1 = \frac{1}{z}\int_0^\infty \sin y\,(ze^{-y} + z^2e^{-2y} + z^3e^{-3y} + \ldots)\,dy =$$

$$\frac{1}{z}\left(\frac{z}{1^2+1} + \frac{z^2}{2^2+1} + \frac{z^3}{3^2+1} + \ldots\right) = \frac{1}{z}\left(-1 + \sum_0^\infty \frac{z^n}{n^2+1}\right).$$

2. Stelt men weer $\lg\frac{1}{x} = y$, dan wordt

$$J_2 = z\int_0^1 J_0\left(2\sqrt{a\lg\frac{1}{x}}\right)\frac{dz}{1-xz} = z\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ay})\,\frac{e^{-y}\,dy}{1-ze^{-y}}.$$

Nu is

$$\int_0^\infty e^{-ny}\left(1 - \frac{ay}{1^2} + \frac{a^2y^2}{(2!)^2} - \frac{a^3y^3}{(3!)^2} + \ldots\right)dy = \frac{1}{n}\,e^{-\frac{a}{n}}.$$

---

[1]) Ten gevolge van een vergissing van den redacteur bevatte het tweede deel der opgave een onjuistheid.

Verder is

$$J_0(2\sqrt{ay})\,\frac{e^{-y}}{1-ze^{-y}} =$$

$$= \left(1 - \frac{ay}{1^2} + \frac{a^2y^2}{(2!)^2} - \frac{a^2y^2}{(3!)^2}\ldots\right)(e^{-y} + ze^{-3y} + z^2e^{-5y} + \ldots).$$

Men vindt dus

$$J_2 = z\left(e^{-a} + \frac{z}{2}\,e^{-\frac{a}{2}} + \frac{z^2}{3}\,e^{-\frac{a}{3}}\ldots\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\,e^{-\frac{a}{n}}z^n.$$

Vraagstuk XXI.

D 4 a. Aan te toonen, dat de geheele functie

$$G(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}}$$

geen reëele nullen bezit, en dat voor $z > 0$ voldaan wordt aan

$$G(z) < e^{\frac{z}{e}}.$$

(Le Roy, *Ann. de Toulouse*, 1900.) (Dr. W. Kapteyn.)

Oplossing *van* Dr. W. Kapteyn *en* Dr. J. Stein.

Daar

$$\frac{1}{n+1)^{n+1}} = \int_0^\infty \frac{y^{n+1}e^{-(n+1)y}}{\Gamma(n+1)}\,dy,$$

wordt

$$G(z) = \sum_0^\infty \int_0^\infty \frac{z^n y^{n+1} e^{-(n+1)y}}{\Gamma(n+1)}\,dy = \int_0^\infty \left(ye^{-y}\,.\,\sum_0^\infty \frac{(zye^{-y})^n}{\Gamma(n+1)}\right)dy,$$

of

$$G(z) = \int_0^\infty ye^{-y}\,e^{zye^{-y}}\,dy.$$

Daar de integrand tusschen de grenzen 0 en ∞ voor reëele waarden van z altijd positief is, heeft $G(z)$ geen reëele nullen.

De maximum-waarde van ye^{-y} tusschen die grenzen is $\frac{1}{e}$ (voor $y = 1$); voor positieve waarden van z is dus $e^{zye^{-y}} < e^{\frac{z}{e}}$, en

$$G(z) < \int_0^\infty ye^{-y} e^{\frac{z}{e}} dy,$$

of

$$G(z) < e^{\frac{z}{e}}.$$

Vraagstuk XXII.

E 5. Men vraagt te bewijzen, dat

$$\int_0^\infty \frac{\text{bg tg}\, y}{e^{2\pi y} - 1} dy = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} \lg 2\pi \text{ [1]}.$$

(Dr. J. C. KLUYVER.)

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

Voor de integraal kan men schrijven

$$\int_0^\infty \frac{\text{bg tg}\, y}{e^{2\pi y} - 1} dy = \int_0^\infty \left(\sum_1^\infty e^{-2n\pi y} \text{bg tg}\, y \right) dy.$$

Door partieele integratie vindt men

$$\int_0^\infty e^{-2n\pi y} \text{bg tg}\, y\, dy = \frac{1}{2\pi n} \int_0^\infty \frac{e^{-2n\pi y}}{1 + y^2} dy.$$

Derhalve

$$\int_0^\infty \frac{\text{bg tg}\, y}{e^{2\pi y} - 1} dy = \int_0^\infty \left(\sum_1^\infty \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{e^{-2n\pi y}}{1 + y^2} \right) dy,$$

of als $2n\pi y = x$ gesteld wordt,

$$\int_0^\infty \frac{\text{bg tg}\, y}{e^{2\pi y} - 1} dy = \int_0^\infty \left(\sum_1^\infty \frac{e^{-x}}{\pi^2 (2n)^2 + x^2} \right) dx =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) dx = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} \lg 2\pi.$$

[1]) Door een rekenfout was het rechterlid niet geheel juist.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Uit de bekende vergelijking

$$\int_0 e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

volgt

$$\operatorname{bg\,tg} \frac{b}{a} = \int_a^\infty da \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{xe^{ax}} \, dx$$

Dus is ook

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{bg\,tg} \frac{y}{a}}{e^{2\pi y} - 1} dy = \int_0^\infty \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1} \int_0^\infty \frac{\sin yx}{xe^{ax}} \, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{xe^{ax}} \int_0^\infty \frac{\sin yx}{e^{2\pi y} - 1} dy.$$

Volgens Voorstel 116, Deel 6 der W. O. is dit gelijk aan

$$\int_0^\infty \frac{dx}{xe^{ax}} \left(- \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right),$$

of

$$\tfrac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{xe^{ax}}.$$

De laatste integraal is bekend door beschouwingen over de reeks van STIRLING. Haar waarde is

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{e^a \, \Gamma(a + 1)}{a^a \sqrt{2\pi a}}.$$

(Zie bv. SERRET, *Calcul intégral*, § 540.)

Voor $a = 1$ vindt men als waarde der voorgestelde integraal

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} \log 2\pi.$$

Vraagstuk XXIII.

D 2 b γ. Aan te toonen, dat men heeft

$$\sum_0^\infty \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{8n+6}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(Dr. J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* Dr. J. C. KLUYVER, Dr. J. STEIN, *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

Wij schrijven afzonderlijk

$$A=\sum_0^\infty\left(-\frac{1}{4}\right)^n\cdot\frac{1}{4n+1}=(\sqrt{2})\sum_0^\infty(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}\cdot\frac{1}{4n+1}=$$

$$=(\sqrt{2})\sum_0^\infty(-1)^n\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^{4n}dx=(\sqrt{2})\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{1+x^4}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{bg\,tg}\,2+\tfrac{1}{4}\log 5.$$

$$B=\sum_0^\infty\left(-\frac{1}{4}\right)^n\cdot\frac{1}{4n+2}=2\sum_0^\infty(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}\cdot\frac{1}{4n+2}=$$

$$=2\sum_0^\infty(-1)^n\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^{4n+1}dx=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{xdx}{1+x^4}=\mathrm{bg\,tg}\,\tfrac{1}{2}.$$

$$C=\sum_0^\infty\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{8n+6}=(\sqrt{2})\sum_0^\infty(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+3}\cdot\frac{1}{4n+3}=$$

$$=(\sqrt{2})\sum_0^\infty(-1)^n\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^{4n+2}dx=(\sqrt{2})\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^2dx}{1+x^4}=\tfrac{1}{2}\mathrm{bg\,tg}\,2-\tfrac{1}{4}\lg 5.$$

Dus is $A+B+C=\mathrm{bg\,tg}\,\frac{1}{2}+\mathrm{bg\,tg}\,2=\frac{\pi}{2}$.

Wil men de berekening der afzonderlijke integralen vermijden, dan telle men samen

$$A+B+C=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1+x^4}dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{1-x\sqrt{2}+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Zij

$$F(x)=\sum_0^\infty\left(-\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+2}}{4n+2}+\frac{x^{4n+3}}{8n+6}\right),$$

dan is $F(0) = 0$ en moet bewezen worden $F(1) = \frac{\pi}{2}$.

Door differentieering, sommeering en verdere herleiding verkrijgt men

$$F'(x) = \sum_0 \left(-\frac{1}{4}\right)^n (x^{4n} + x^{4n+1} + \tfrac{1}{2}x^{4n+2}) = (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2) \sum_0^\infty \left(-\frac{x^4}{4}\right)^n =$$

$$= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^4}{1 + \frac{1}{4}x^4} = \frac{1}{1 - x + \frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{1 + (1-x)^2} = -2\,\frac{d\,\mathrm{bg\,tg}\,(1-x)}{dx}.$$

Bijgevolg is

$$F(1) = \int_0^1 F'(x)\,dx = -2\int_0^1 d\,\mathrm{bg\,tg}\,(1-x) = \frac{\pi}{2}.$$

Opmerkingen. I. De substitutie $x = \frac{1}{2}$ in de bekende reeks voor $\mathrm{bg\,tg}\,x$ geeft

$$\mathrm{bg\,tg}\,(\tfrac{1}{2}) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdot (\tfrac{1}{2})^{2n+1} = \sum_0^\infty \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4n+2}.$$

Dit in verband brengende met de verkregen uitkomst, heeft men ook

$$\sum_0^\infty \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{8n+6}\right) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{bg\,tg}\,(\tfrac{1}{2}) = \mathrm{bg\,tg}\,(2).$$

II. Uit bovenstaand bewijs is gemakkelijk af te leiden, dat voor waarden van x tusschen $+1$ en -1

$$F(x) = 2\left\{\frac{\pi}{4} - \mathrm{bg\,tg}\,(1-x)\right\} = 2\,\mathrm{bg\,tg}\,\frac{x}{2-x} = \mathrm{bg\,tg}\,\frac{x(2-x)}{2(1-x)}.$$

Vraagstuk XXIV.

E 5. Men vraagt de waarde der door Euler bepaalde integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}, \text{ waar } 0 < m < 1.$$

(Dr. J. C. Kluyver.)

Opgelost *door* H. Bremekamp, Dr. J. C. Kluyver, E. J. M. van de Laarschot, W. Mantel, Dr. J. Stein *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

Door de substituties

$$u = \frac{x}{x + e^{ia}}, \quad z = 1 - e^{2ia}$$

gaat de hypergeometrische integraal $\int_0^\infty x^m (x + e^{ia})^{-1}(x + e^{-a})^{-1} dx$

over in den normaalvorm

$$e^{ia(m+1)} \int_0^1 u^m (1 - u)^{-m} (1 - uz)^{-1} du,$$

waarvoor wij schrijven:

$$e^{ia(m+1)} \, B(m + 1, -m + 1). \; F(1, m + 1, 2; z).$$

Hierin is

$$B(m+1, -m+1) = \frac{\Gamma(m+1).\Gamma(-m+1)}{\Gamma(m+1-m+1)} = \frac{m\Gamma m \Gamma(1-m)}{\Gamma 2} = \frac{m\pi}{\sin m\pi}.$$

Verder is

$$F(1, m+1, 2; z) = 1 + \frac{m+1}{1.2} z + \frac{(m+1)(m+2)}{3!} z^2 + \\ + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{4!} z^3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{mz} \{(1-z)^{-m} - 1\} = \frac{1}{m(1 - e^{2ia})} (e^{-2iam} - 1)$$

$$= \frac{1}{e^{ia(m+1)}} \cdot \frac{\sin ma}{\sin a}.$$

Het resultaat is dus

$$\int_0^\infty \frac{x^m \, dx}{x^2 + 2x \cos a + 1} = \frac{\pi}{\sin m\pi} \cdot \frac{\sin ma}{\sin a}.$$

Oplossing *van* H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT *en* W. MANTEL.

Integreer den gegeven differentiaalvorm, waarin x als complex getal gedacht wordt, over een gesloten weg, die in 't eerste

quadrant dicht bij O begint, boven de x-as naar $+\infty$ loopt, over een oneindig grooten cirkel naar $+\infty$, maar nu onder de x-as, daar onder langs tot dicht bij O in 't vierde quadrant en dan in een oneindig kleinen cirkel om O naar 't punt van uitgang terugkeert. Op den eersten rechtlijnigen weg is de integraal gelijk aan de gevraagde, I; op de kromme wegen komt er nul; op den rechten weg terug heeft x^m door 't draaien langs den grooten cirkel den factor $e^{2i\pi m}$ gekregen, de integraal is dus $-e^{2i\pi m}$I. In het geheel heeft men dus $(1-e^{2i\pi m})$I.

Deze waarde moet even groot zijn als bij de integratie om de polen $e^{i(\pi+a)}$ en $e^{i(\pi-a)}$; voor de eerste pool vindt men $-\frac{\pi}{\sin a}e^{mi(\pi+a)}$, voor de andere $+\frac{\pi}{\sin a}e^{mi(\pi-a)}$. Derhalve is nu $(1-e^{2i\pi m})\,\mathrm{I}=\frac{\pi}{\sin a}\left(e^{mi(\pi-a)}-e^{mi(\pi+a)}\right)$, waaruit

$$\mathrm{I}=\frac{\pi\sin ma}{\sin a\sin m\pi}.$$

Deze uitkomst blijft nog goed voor $m=0$. De waarde der integraal verandert niet als m van teeken verandert; de ware grenzen zijn dus

$$-1<m<+1.$$

Opmerking van Dr. C. Stolp.

Men vindt de verkregen uitkomst ook in de bekende integraaltafels van Bierens de Haan (T. 6, N°. 8) met verwijzing naar de Verh. Kon. Acad. v. Wet. VIII, 1862.

Vraagstuk XXV.

E 5. Bepaal de waarde der integraal

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+z^2}-\cos z\right)\frac{dz}{z}.$$

(Dr. J. C. Kluyver.)

Opgelost *door* H. Bremekamp, Dr. J. C. Kluyver, E. J. M. van de Laarschot *en* Dr. J. Stein.

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

1. Wij beschouwen de integraal als

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+z^2}-\cos z\right)\frac{dz}{z^{1-\varepsilon}}\;\ldots\;0<\varepsilon<1,$$

en splitsen in

$$\int_0^\infty\frac{dz}{(1+z^2)z^{1-\varepsilon}}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}\varepsilon};\int_0^\infty\frac{\cos z}{z^{1-\varepsilon}}dz=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}\varepsilon}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}.$$

Derhalve is

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+z^2}-\cos z\right)\frac{dz}{z}=\lim_{\varepsilon=0}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}\varepsilon}\cdot\left(1-\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon+\ldots}\left(1-\frac{1}{1-\varepsilon\Gamma'1+\ldots}\right)\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+z^2}-\cos z\right)\frac{dz}{z}=$$

$$=-\Gamma'1=C.$$

(C is de constante van EULER).

2. Men kan de integraal splitsen in twee stukken

$$\tfrac{1}{2}\left\{\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+iz}-e^{-iz}\right)\frac{dz}{z}+\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-iz}-e^{iz}\right)\frac{dz}{z}\right\}.$$

Hiervoor kan men schrijven

$$\tfrac{1}{2}\left\{\int_0^{-i\infty}\left(\frac{1}{1+iz}-e^{-iz}\right)\frac{dz}{z}+\int_0^{+i\infty}\left(\frac{1}{1-iz}-e^{iz}\right)\frac{dz}{z}\right\},$$

zooals eene eenvoudige beschouwing in het complexe vlak leert.

Beide integralen, en dus ook de gevraagde, zijn gelijk aan

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+z}-e^{-z}\right)\frac{dz}{z}=C,$$

welke laatste betrekking, als boven, door invoering eener hulpgrootheid ε, kan afgeleid worden.

Oplossing van H. BREMEKAMP en E. J. M. VAN DE LAARSCHOT.

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+z^2} - \cos z\right)\frac{dz}{z} = \lim_{\delta=0}\left\{\int_\delta^\infty \frac{dz}{z(1+z^2)} - \int_\delta^\infty \frac{\cos z}{z}\,dz\right\}$$

$$= \lim_{\delta=0}\left\{-\log\delta - \int_\delta^\infty \frac{\cos z}{z}\,dz\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Beschouwen we nu:

$$\int \frac{e^{-z}}{z}\,dz$$

langs den volgenden integratieweg: x-as van δ tot ∞, een kwartcirkel met $R = \infty$, y-as van $i\infty$ tot $i\delta$, een kwartcirkel met $R = \delta$ om O, dan is

$$\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_\delta^\infty \frac{e^{-iy}}{y}\,dy + \frac{\pi i}{2}.$$

Van beide leden het reëele stuk nemende, vinden wij

$$\int_\delta^\infty \frac{\cos y}{y}\,dy = e^{-x}\log x\Big|_\delta^\infty + \int_\delta^\infty e^{-x}\log x\,dx.$$

Derhalve

$$\lim_{\delta=0}\int_\delta^\infty \frac{\cos z}{z}\,dz = \lim_{\delta=0}(-\log\delta) + \int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx \quad . \quad . \quad (2)$$

Nu is $\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\log x\,dx = \Gamma'(p)$, waaruit:

$$\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = \Gamma'(1) = -C \text{ (const. v. EULER).}$$

Na substitutie in (2) en (1) vinden we nu

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+z^2} - \cos z\right)\frac{dz}{z} = C.$$

Vraagstuk XXVI.

J 2 c. Eenige personen spelen een spel, waarbij met dobbelsteenen wordt geworpen. Men kan van 1 tot n oogen werpen, terwijl de kans om i oogen te werpen p_i is, zoodat $\sum_1^n p_i = 1$. De

spelers werpen om beurten en ieder ontvangt telkens zooveel fiches als hij oogen werpt, uit een pot, die bij den aanvang P fiches bevat. Werpt een der spelers meer oogen dan er fiches in de pot zijn, dan geeft hij zooveel fiches aan een niet meewerpend persoon A, als de pot te weinig bevat. Werpt een speler juist zooveel oogen als er nog fiches in den pot zijn, dan ledigt hij den pot en het spel is uit. Bij den aanvang heeft A een mathematische hoop op winst, H_P. Men vraagt de limiet van H_P te bepalen voor $P = \infty$.

(E. A. J. H. MODDERMAN.)

Opgelost *door* E. A. J. H. MODDERMAN, Dr. A VAN THIJN *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* E. A. J. H. MODDERMAN.

Bepalen wij in de eerste plaats H_P wanneer $P < n$ is, zoodat A reeds bij den eersten worp kan winnen. Bij den eersten keer kunnen meer of minder dan P, of juist P oogen geworpen worden. Worden i oogen geworpen ($i > P$) waarvoor de kans p_i zij, zoo wint A $(i - P)$ fiches, wat hem eene mathematische hoop $\sum_{i=P+1}^{i=n} (i - P)p_i$ geeft. Bovendien blijft bij een worp van meer dan P oogen, waarvoor de kans is $\left(1 - \sum_{i=1}^{i=P} p_i\right)$, zijn hoop H_P nog onveranderd bestaan.

Worden juist P oogen geworpen, zoo is het spel geëindigd en heeft A verder niets te winnen. Worden er i geworpen ($i < P$), zoo behoudt A nog hoop op winst H_{P-i}. Dus is

$$H_P = \sum_{i=P+1}^{i=n} (i - P)p + \left(1 - \sum_{i=1}^{i=P} p_i\right) H_P + \sum_{i=1}^{i=P-1} p_i H_{P-i}.$$

Hieruit H_P oplossende, vindt men, in acht nemende dat $H_0 = 0$ is,

$$H_P = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=P} p_i} \left\{ \sum_{i=P}^{i=n} (i - P)p_i = \sum_{i=1}^{i=P} p_i H_{P-i} \right\} \quad \ldots . \quad (1)$$

Achtereenvolgens kan men met deze formule H_1, H_2 tot H_n berekenen.

Voor $P = n$ valt de eerste term der som tusschen accolades weg, terwijl de deeler de eenheid wordt.

Is in de tweede plaats $P > n$, zoo komt men, dezelfde redeneering als boven volgende, tot de volgende formule:

$$H_P = \sum_{i=1}^{i=n} p_i H_{P-i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

welke voor $P = n$ dezelfde uitkomst geeft als (1).

Om de limiet van H_P voor $P = \infty$ te bepalen, merken wij op, dat de uitdrukking

$$G_P = \sum_{i=1}^{i=n} q \; H_{P-i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dezelfde limiet heeft als H_P, onverschillig wat de coëfficiënten q_i zijn, mits

$$\sum_{i=1}^{i=n} q_i = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Immers men heeft dan $H_P = \sum_{i=1}^{i=n} q_i H_P$.

Door hiervan (3) af te trekken, vindt men

$$H_P - G_P = \sum_{i=1}^{i=n} q_i (H_P - H_{P-i})$$

Nadert nu H_P voor $P = \infty$ tot een limiet, dan nadert H_{P-i} tot dezelfde limiet, mits i eindig zij. Nu is i hoogstens n, de limiet van elk der termen van het 2e lid is dus 0, die termen zijn in eindig aantal (n), dus in $\lim (H_P - G_P) = 0$ of $\lim H_P = \lim G_P$.

Men zal nu trachten, de coëfficiënten q_i, die voorloopig behoudens (4) geheel willekeurig zijn, zoo te kiezen, dat G_P een constante wordt voor alle waarden van P. Die constante is dan blijkbaar tevens de limiet waartoe H_P nadert. Hiertoe is het noodig en voldoende, dat voor elke waarde van P

$$G_P = G_{P+1} \text{ is.}$$

Door hierin de waarden uit (3) te substitueeren, verkrijgt men na herleiding

$$q_1 H_P = \sum_{i=1}^{i=n} (q_i - q_{i+1}) H_{P-i},$$

mits men in de ontwikkeling den overtolligen coëfficiënt q_{n+1} door nul vervangt. Aan deze vergelijking kan, in verband

met (2), slechts dan voor alle waarden van P voldaan worden, indien

$$p_i = \frac{q_i - q_{i+1}}{q_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

is voor alle waarden van i tusschen 1 en n.

Dit geeft n vergelijkingen ter bepaling der coëfficiënten q. Er is er één te veel, want ook aan (4) moet voldaan zijn. De vergelijkingen (5) zijn echter niet onderling onafhankelijk. Immers, telt men ze samen, dan komt er:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_i - \sum_{i=2}^{i=n} q_i}{q_1} = 1,$$

aan welke gelijkheid blijkens de gegevens reeds voldaan wordt. [1])

Uit $(n-1)$ der vergelijkingen (5) en de vergelijking (4) kunnen dus de waarden q_1 tot q_n opgelost worden. Men vindt:

$$q_K = \frac{\sum_{i=K}^{i=n} p_i}{\sum_{i=1}^{i=n} i\, p_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waarin men aan K achtereenvolgens alle waarden van 1 tot n heeft te geven.

Ten slotte vindt men de gevraagde limiet H uit de afzonderlijke, volgens (1) te berekenen, waarden H_1 tot H_{n-1}, door in (3) n voor P te substitueeren, dus uit

$$H = \sum_{i=1}^{i=n} q_i \; H_{n-i},$$

waarin de coëfficiënten q door (6) bepaald zijn.

Opmerking. Het bovenvermelde spel lijkt op 't eerste gezicht eenigszins zonderling. Het komt echter, behoudens eenige kleine wijzigingen, die tot de zaak zelve niets afdoen, voor bij het bekende kinderspel „Klok en Hamer." De boven-

---

[1]) Het is duidelijk, dat als $\sum_{i=1}^{i=n} p_i > 1$ was, H_p onbepaald zou toenemen bij toename van P, en dat als $\sum_{i=1}^{i=n} p_i < 1$ was, H_p, voor $P = \infty$, 0 tot limiet zou hebben.

besproken mathematische hoop, is die van dengeen, die bij dat spel de kaart „het Huis" in bezit heeft. Om het onbepaalde van het vraagstuk weg te nemen, moest men de limiet, als boven besproken, beschouwen.

Past men de oplossing op dit spel toe, zoo blijkt de nadering der hoop tot de limiet zeer snel plaats te hebben, terwijl de limiet zelve tusschen 32 en 33 ligt. Zonder nadeel voor den betrokken speler kan dus de kaart „het Huis" bij den aanvang van het spel voor niet meer dan 32 fiches worden gekocht.

Oplossing van Dr. A. VAN THIJN *).

1. Bepalen we in de eerste plaats H_1, H_2 . . . . . H_n.

Zijn er p fiches in den pot ($p < n$) en beschouwt men alle mogelijke gevolgen van den eerstvolgenden worp, dan vindt men

$$H_p = \frac{1}{n}\left(H_{p-1} + H_{p-2} \ldots\ldots + H_1\right) + \frac{n-p}{n} H_p + \frac{1}{n}\left[1+2\ldots\ldots+(n-p)\right]. \quad (1)$$

Hieruit volgt

$$pH_p = H_{p-1} + H_{p-2} + \ldots\ldots + H_1 + [1 + 2 + \ldots\ldots + (n-p)]. \quad (2)$$

Is $(p+1)$ niet grooter dan n, dan vindt men evenzoo

$$(p+1)\,H_{p+1} = H_p + H_{p-1} + \ldots\ldots + H_1 + [1+2+\ldots\ldots(n-p-1)] \quad (3)$$

Uit (2) en (3) volgt

$$H_{p+1} - H_p = -\frac{n-p}{p+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nu is volgens (2)

$$H_1 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

dus volgens (4)

$$\left.\begin{aligned} H_2 &= \frac{n(n-1)}{2} - \tfrac{1}{2}(n-1), \\ H_3 &= \frac{n(n-1)}{2} - \tfrac{1}{2}(n-1) - \tfrac{1}{3}(n-2), \\ &\qquad \text{enz.} \\ H_n &= \frac{n(n-1)}{2} - \tfrac{1}{2}(n-1) - \tfrac{1}{3}(n-2) \ldots - \frac{1}{n} \end{aligned}\right\} (6)$$

*) Uit de opgaaf was de zinsnede „terwijl de kans om i oogen te werpen p_i is" weggevallen. Daardoor hebben de heeren Van Thijn en Schuh de vraag anders opgevat dan se bedoeld was.

2. Bepalen wij thans H_{n+1}, H_{n+2} enz.

Zijn er $(n+1)$ fiches in den pot en beschouwt men alle mogelijke gevolgen van den eerstvolgenden worp, dan vindt men:

$$H_{n+1} = \frac{1}{n}(H_n + H_{n-1} + \ldots . H_1) \ldots \ldots (7)$$

Evenzoo heeft men

$$H_{n+2} = \frac{1}{n}(H_{n+1} + H_n + \ldots \ldots H_2).$$

Wij hebben dus het volgende vraagstuk op te lossen:

Van n willekeurige getallen H_1, $H_2 \ldots . . H_n$ wordt het gemiddelde H_{n+1} genomen, daarna van de getallen H_2, $H_3 \ldots . H_{n+1}$ het gemiddelde H_{n+2} enz. Bepaal de limiet van de oneindig voortloopende reeks.

Blijkbaar is de limiet L een lineaire functie van $H_1, H_2 \ldots . H_n$,

$$L = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots . . \lambda_n H_n \ldots \ldots \ldots (8)$$

Begon men met n andere opeenvolgende termen der reeks, dan zou men toch tot dezelfde limiet komen; dus is ook

$$L = \lambda_1 H_2 + \lambda_2 H_3 + \ldots . . \lambda_n H_{n+1} \ldots \ldots \ldots (9)$$

Substitueert men hierin voor H_{n+1} de in (7) gevonden waarde, dan volgt uit de vergelijkingen (8) en (9)

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots . . \lambda_n H_n \equiv \frac{1}{n}\lambda_n H_1 + \left(\lambda_1 + \frac{1}{n}\lambda_n\right) H_2 + \ldots . \left(\lambda_{n-1} + \frac{1}{n}\lambda_n\right) H_n,$$

zoodat men heeft:

$$\lambda_1 = \frac{1}{n}\lambda_n$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{n}\lambda_n$$

$$\lambda_3 = \frac{3}{n}\lambda_n \text{ enz.}$$

Bijgevolg is

$$L = \frac{1}{n}\lambda_n (H_1 + 2H_2 + 3H_3 + \ldots . . + nH_n) \ldots (10)$$

Vervangt men hierin H_1, H_2, $H_3 \ldots . H_n$ door de termen H_{1+x}, H_{2+x}, $H_{3+x} \ldots . . H_{n+x}$ en laat men x onbepaald

grooter worden, dan naderen H_{1+x}, H_{2+x} enz. onbepaald tot L en dus gaat (10) over in:

$$L = \frac{1}{n} \lambda_n (L + 2L + 3L + \ldots . nL).$$

Hieruit volgt, dat

$$\lambda_n = \frac{2}{n+1}$$

is; deze uitkomst in (10) substitueerende vindt men

$$L = \frac{2}{n(n+1)} (H_1 + 2H_2 + \ldots . + nH_n) \ldots (11)$$

Substitueert men hierin de waarden van H_1, H_2 enz. uit verg. (5) en (6), dan vindt men

$$L = \frac{2}{n(n+1)} \left[\frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \right.$$

$$\left. - \left\{ \tfrac{1}{2}(n-1)(2+3\ldots+n) + \tfrac{1}{3}(n-2)(3+4\ldots+n) + \ldots \frac{1}{n} \cdot n \right\} \right]$$

of

$$L = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \left[\tfrac{1}{2}(n-1)^2(n+2) + \tfrac{1}{3}(n-2)^2(n+3) + \ldots \frac{1}{n} . 1^2 . (2n) \right] =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{p=2}^{p=n} \frac{1}{p} (n+p)(n-p+1)^2.$$

Nu is

$$\sum_{p=2}^{p=n} \frac{1}{p} (n+p)(n-p+1)^2 = \sum_{p=2}^{p=n} \left[\frac{n(n+1)^2}{p} - (n^2-1) - (n+2)p + p^2 \right];$$

neemt men hierbij in aanmerking, dat

$$\sum_{p=2}^{p=n} p = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \text{ en } \sum_{2}^{n} p^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - 1$$

is, dan vindt men voor L of H_∞

$$\frac{(3n+7)(n-1)}{6} - (n+1) \sum_{2}^{n} \frac{1}{p}.$$

Oplossing *van* F. SCHUH.

We beginnen met de mathematische hoop H_a van A te berekenen, voor het geval dat er nog a fiches in de pot zijn, $a \leqq n$. Worden er dan bij den eerstvolgenden worp b oogen gegooid, dan zijn er drie mogelijkheden:

1ste $b < a$; de hoop van A wordt daardoor H_{a-b};

2de $b = a$; het spel is uit en A krijgt niets;

3de $b > a$; A krijgt $(b - a)$ fiches en behoudt bovendien zijn hoop H_a op nog meer winst.

Men vindt nu de vergelijking

$$H_a = \frac{1}{n}(H_{a-1} + H_{a-2} + \ldots + H_2 + H_1) + \frac{1}{n}(1 + H_a + 2 + H_a + \ldots + n - a + H_a),$$

of

$$n\,H_a = H_{a-1} + H_{a-2} + \ldots + H_1 + (n-a)H_a + \tfrac{1}{2}(n-a)(n-a+1),$$

of

$$a\,H_a = H_{a-1} + H_{a-2} + \ldots + H_1 + \tfrac{1}{2}(n-a)(n-a+1) \quad . \; . \; (1)$$

Voor $a = 1$ levert dit

$$H_1 = \tfrac{1}{2}n(n-1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Vervangt men in (1) a door $a - 1$, dan vindt men

$$(a-1)H_{a-1} = H_{a-2} + H_{a-3} + \ldots + H_1 + \tfrac{1}{2}(n-a+1)(n-a+2).$$

Hiervan (1) aftrekkend, verkrijgt men

$$a(H_{a-1} - H_a) = n - a + 1,$$

of

$$H_{a-1} + H_a = \frac{n-a+1}{a}.$$

Uit (2) en (3) leidt men gemakkelijk af:

$$H_a = \tfrac{1}{2}n(n-1) - \left\{\frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \frac{n-3}{4} + \ldots + \frac{n-a+1}{a}\right\}$$

of

$$H_a = \tfrac{1}{2}n(n+1) + a - (n+1)\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{a}\right) \; . \; (4)$$

Dus is

$$H_n = \tfrac{1}{2}n(n+3) - (n+1)\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Om nu de hoop van A te berekenen als het aantal fiches P in de pot zeer groot is, bedenken we, dat het spel voortgaat zonder dat A wint, tot een oogenblik waarop voor het eerst de pot n fiches of minder bevat; zij k_a de kans dat, als dit voor het eerst gebeurt, er a $(a \leq n)$ fiches in de pot zijn, dan is de hoop van A

$$H_\infty = k_n H_n + k_{n-1} H_{n-1} \ldots + k_2 H_2 + k_1 H_1.$$

Het komt er nu op aan k_1, k_2 enz. k_n te berekenen. Zij x de kans, dat er gedurende het spel, vóór dat A nog iets gewonnen heeft, een oogenblik geweest is, waarop de pot a fiches bevatte, dan zal x voor alle waarden van a tusschen 1 en n even groot zijn, als het aanvankelijk aantal fiches maar groot genoeg is. Moet echter de pot niet alleen voor dat A nog gewonnen heeft eens a fiches bevat hebben, maar moet dit gebeurd zijn den eersten keer toen het aantal fiches tot n of minder gedaald was, dan moet bovendien de voorafgaande worp $n + 1 - a$ of meer oogen hebben aangewezen; hiervoor is de kans $\frac{a}{n}$. Hieruit volgt

$$k_a = \frac{a}{n} x.$$

Daar nu

$$k_1 + k_2 + \ldots . + k_n = 1$$

zijn moet, zoo is

$$x \times \frac{n+1}{2} = 1$$

dus

$$x = \frac{2}{n+1}$$

en

$$k_a = \frac{2}{n(n+1)} a,$$

waaruit volgt

$$H_\infty = \frac{2}{n(n+1)} \{H_1 + 2H_2 + 3H_3 \ldots + nH_n\} \ldots . \quad (6)$$

Nu vindt men, door in vergelijking (1) voor a de waarden te substitueeren van 1 tot en met n en op te tellen,

$$H_1 + 2H_2 + 3H_3 + \ldots nH_n = \tfrac{1}{2}\{1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + \tfrac{1}{2}(n-1)n\} +$$
$$+ n(H_1 + H_2 \ldots + H_n) - (H_1 + 2H_2 + 3H_3 + \ldots + nH_n),$$

of als men let op

$$H_1 + H_2 + H_3 + \ldots + H_n = nH_n,$$
$$2(H_1 + 2H_2 + 3H_3 + \ldots + nH_n) = \tfrac{1}{6}(n-1)n(n+1) + n(n+1)H_n.$$

Dit in vergelijking (6) substitueerend, vindt men:

$$H_\infty = \tfrac{1}{6}(n-1) + H_n,$$

of volgens (5)

$$H_\infty = \tfrac{1}{6}(3n^2 + 10n - 1) - (n+1)\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \quad (7)$$

Opmerking. Men kan vergelijking (6) ook op de volgende wijze afleiden. Analoog met vergelijking (1) heeft men voor $a > n$

$$nH_a = H_{a-1} + H_{a-2} + \ldots + H_{a-n} \quad \ldots\ldots (8)$$

Substitueert men hierin achtereenvolgens $a = n+1$, $a = n+2, \ldots$ $a = P$, en telt op, dan krijgt men

$$H_{P-n+1} + 2H_{P-n+2} + 3H_{P-n+3} + \ldots + nH_P =$$
$$= H_1 + 2H_2 + 3H_3 + \ldots + nH_n \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Het is nu echter gemakkelijk in te zien, dat als P groot genoeg is, H_{P-n+1}, H_{P-n+2}, ..., H_P meer en meer onderling gelijk zijn. Immers hoe meer fiches de pot aanvankelijk bevat, des te onverschilliger zal voor A het juiste aantal fiches zijn. Echter ook uit de vergelijkingen (8) leidt men licht af, dat het grootste verschil dat er tusschen twee der grootheden H_{a-1}, H_{a-2}, ..., H_{a-n} bestaat, onbepaald klein wordt, als a onbepaald toeneemt. Rangschikken we n.l. de grootheden H volgens hun aanwijzer, dan ligt iedere H tusschen de grootste en kleinste der n voorafgaanden in. Men kan nu uit een n-tal opvolgende H een volgend n-tal afleiden door weglating van de eerste dezer H en door achterplaatsing van een nieuwe volgende; zoolang de verschillen tusschen de H nog eindig zijn, moeten er oogenblikken komen waarop een H wordt weggelaten, die de grootste of de kleinste van het n-tal is; daardoor worden

de verschillen tusschen de H geringer, en wel een eindig bedrag, zoolang de verschillen zelf eindig zijn. Hieruit volgt, dat de verschillen der H onderling tot nul naderen. In vergelijking (9)

$$H_{P-n+1} = H_{P-n+2} = \ldots = H_P = H_\infty$$

stellend, vindt men:

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)\,H_\infty = H_1 + 2H_2 + 3H_3 + \ldots + nH_n.$$

Dit is de vergelijking (6).

Vraagstuk XXVII.

N⁴ 2 d. Zes gegeven rechten worden door een veranderlijk vlak ε in de punten A, B, C; A′, B′, C′ gesneden, terwijl de driehoeken ABC en A′B′C′ perspectief liggen. Men vraagt de klasse te bepalen van het oppervlak dat door ε wordt omhuld en den graad der meetkundige plaats van het perspectiviteitscentrum.

(J. Neuberg.)

Opgelost *door* F. Schuh *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

1. De klasse van het door ε omhulde oppervlak is het aantal vlakken ε, die men door eenige rechte l zoodanig kan leggen, dat de rechten AA′, BB′, CC′ samenkomen in een punt M.

De graad van de meetkundige plaats van M is het aantal punten, die men op eenige rechte zoodanig kan aannemen, dat de drie transversalen uit M naar de lijnenparen a, a'; b, b'; c, c' in een vlak ε liggen.

Deze beide getallen zijn dus even groot, zoo dat men slechts een van hen behoeft te zoeken.

2. Draait ε om l, dan beschrijven AA′ en BB′ twee hyperboloïden, die l gemeen hebben; derhalve doorloopt het snijpunt M van AA′ en BB′ een kubische ruimtekromme ρ^3, waarvan l een koorde is; haar steunpunten S en S′ zijn de coïncidenties der projectieve reeksen, welke AA′ en BB′ op l insnijden.

De rechte CC′ beschrijft een hyperboloïde, die ook door l gaat; zij ontmoet de kromme ρ^3, behalve in S en S′, in vier punten M, welke in bovenbedoelden zin perspectiviteitscontra zijn. Dit geldt niet voor de punten S, S′ omdat daar drie rechten AA′, BB′, CC′ samenkomen, die in het algemeen niet in een vlak liggen. Dus omhult ε een oppervlak van de *vierde klasse*, en doorloopt M een oppervlak van den *vierden graad.*

3. Elk vlak door a is een vlak ε; het punt A wordt dan bepaald door de rechte, die A′ met (BB′, CC′) verbindt. De zes gegeven rechten liggen dus op het door ε omhulde oppervlak.

Dit is ook het geval met de zes rechten, die elk twee paren der gegeven rechten snijden. Op elk vlak door een transversaal van a, a', b, b' snijden c en c' nl. punten C en C′ in, waarvan de verbindingslijn door deze transversaal in het overeenkomstige punt M wordt gesneden.

Het is gemakkelijk in te zien, dat de genoemde twaalf rechten ook behooren tot de meetkundige plaats van het punt M.

Vraagstuk XXVIII.

C 2 h. In het segment dat van een parabool wordt afgesneden door de koorde, welke de as in het brandpunt loodrecht snijdt, trekt men voerstralen door het brandpunt, welke met elkaar hoeken groot $\pi : n$ insluiten. Bepaal de grenswaarde van het arithmetisch gemiddelde dier voerstralen voor $n = \infty$, ook voor het geval dat de voerstralen het segment in n even groote sectoren verdeelen.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, Dr. R. H. VAN DORSTEN, F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing.

Is $\frac{1}{2}p$ de lengte van den voerstraal uit het brandpunt naar den top getrokken, ρ die van een voerstraal, welke met eerstgenoemden een hoek ϕ maakt, dan heeft men de vergelijking

$$\rho = \frac{\frac{1}{2}p}{\cos^2\frac{1}{2}\phi}.$$

Wanneer twee op elkaar volgende voerstralen den oneindig kleinen hoek $\frac{\pi}{n} = d\phi$ insluiten, dan is $\frac{1}{n} = \frac{d\phi}{\pi}$ en heeft men voor de gevraagde grenswaarde

$$L_1 = \lim . \frac{1}{n} \sum \rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho d\phi}{\pi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2} p d\phi}{\pi \cos^2 \frac{1}{2}\phi} = \frac{p}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\phi = \frac{2p}{\pi}.$$

Verdeelen de voerstralen het paraboolsegment S in n sectoren dS, dan is

$$\frac{\rho}{n} = \frac{\rho\, dS}{S} = \frac{\rho . \frac{1}{2} \rho^2 d\phi}{\frac{2}{3} p^2} = \frac{3p\, d\phi}{32 \cos^6 \frac{1}{2}\phi} = \frac{3p}{16} (1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\phi)^2\, d \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\phi,$$

en vindt men voor de gevraagde tweede grenswaarde

$$L_2 = \lim \frac{1}{n} \Sigma \rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{3p}{16} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\phi + \operatorname{tg}^4 \tfrac{1}{2}\phi)\, d \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\phi =$$

$$= \frac{3p}{16} \left(2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = 0{,}7\, p.$$

Vraagstuk XXIX.

K 1 c. Op de zijden van driehoek ABC beschrijft men buitenwaarts en binnenwaarts de gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken BCA′, CAB′, ABC′ en BCa', CAb', ABc', die tot zwaartepunten hebben I_a, I_b, I_c en i_a, i_b, i_c. Te bewijzen dat de verschillen der vierkanten van overeenkomstige zijden van A′B′C′ en $a'b'c'$ even groot zijn, en dat dit ook het geval is voor de driehoeken $I_aI_bI_c$ en $i_ai_bi_c$. (Dr. A. J. A. Prange.)

Opgelost *door* J. A. Barrau, Dr. R. H. van Dorsten, J. A. Kerkhoven, J. C. de Masier, Dr. A. J. A. Prange *en* F. Schuh.

Oplossing *van* J. A. Barrau.

Noem de middens van BC en AC achtereenvolgens D en E; stel $A'D = a'D = na$, dus $B'E = b'E = nb$.

Dan is de projectie van A'B' op AB gelijk aan

$$\tfrac{1}{2}c + nb \sin A + na \sin B = \tfrac{1}{2}c + \frac{4n}{c}O,$$

en de projectie van A'B' op een rechte, die AB loodrecht snijdt, gelijk aan

$$nb \cos A - na \cos B$$

(immers ED is evenwijdig met AB).

Voor de overeenkomstige projecties van $a'b'$ vindt men achtereenvolgens

$$\tfrac{1}{2}c - \frac{4n}{c}O \quad \text{en} \quad na \cos B - nb \cos A.$$

Men heeft dus

$$\overline{A'B'}^2 - \overline{a'b'}^2 = 8n\,O.$$

Voor de driehoeken $I_aI_bI_c$ en $i_ai_bi_c$ heeft men slechts overal n te vervangen door $\frac{1}{3}n$.

Vraagstuk XXX.

K 1 c. Op de zijden van driehoek ABC beschrijft men buitenwaarts en binnenwaarts de gelijkvormige driehoeken BCA', CAB', ABC', en BCa', CAb', ABc', die rechthoekig zijn in A', B', C', a', b', c'. Zijn I_a, I_b, I_c, i_a, i_b, i_c hun zwaartepunten, dan vraagt men te bewijzen, dat

a) de som der vierkanten van de zes zijden van A'B'C' en $a'b'c'$ gelijk is aan twee maal de som der vierkanten van de zijden van ABC;

b) de som der vierkanten van de zes zijden van $I_aI_bI_c$ en $i_ai_bi_c$ gelijk is aan $\frac{2}{3}$ van de som der vierkanten van de zijden van ABC.

(Dr. A. J. A. PRANGE.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. R. H. VAN DORSTEN, J. A. KERKHOVEN, W. MANTEL, J. C. DE MASIER, Dr. A. J. A. PRANGE *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* F. SCHUH.

We kunnen het vraagstuk uitbreiden tot het volgende, waarvan zoowel *a*) als *b*) bijzondere gevallen zijn.

Op de zijden van driehoek ABC beschrijft men buitenwaarts en binnenwaarts de gelijkvormige driehoeken BCP, CAQ, ABR en BCp, CAq en ABr. Men vraagt de som der vierkanten van de zes zijden van PQR en pqr uit te drukken in de som der vierkanten van de zijden van ABC.

We denken ons de driehoeken zoo aangebracht, dat BPCp, CQAq en ARBr parallelogrammen zijn. We kunnen de punten P, Q, R en p, q, r ook aldus construeeren: door de middens D, E en F der zijden van ABC worden lijnen Pp, Qq en Rr getrokken, zoodanig dat de hoek tusschen BC en Pp even groot is als tusschen CA en Qq en als tusschen AB en Rr. Uit D, E en F worden nu op deze lijnen naar weerskanten stukken uitgezet evenredig met de overeenkomstige zijde van ABC.

Stellen we de zijden van ABC door l, m, n, de hoeken door A, B en C voor; dan heeft men als k een constante is,

$$\mathrm{DP} = \mathrm{D}p = kl \quad , \quad \mathrm{EQ} = \mathrm{E}q = km.$$

Zij S het snijpunt van Pp en Qq, dan is CDSE een koordenvierhoek, dus $\angle \mathrm{ESD} = 180° - \mathrm{C}$. Uit driehoek PSQ volgt

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = (\mathrm{SD} + kl)^2 + (\mathrm{SE} + km)^2 + 2\,(\mathrm{SD} + kl)\,(\mathrm{SE} + km) \cos \mathrm{C}.$$

Blijkbaar vindt men $\overline{pq}^2$ door hier k in $-k$ te veranderen. Men krijgt dan

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{pq}^2 = \tfrac{1}{2}\, n^2 + 2k^2\,(2l^2 + 2m^2 - n^2),$$

terwijl men $\overline{\mathrm{QR}}^2 + \overline{qr}^2$ en $\overline{\mathrm{RP}}^2 + \overline{rp}^2$ door cyclische letterverschuiving vindt. Door optelling krijgt men nu

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{QR}}^2 + \overline{\mathrm{RP}}^2 + \overline{pq}^2 + \overline{qr}^2 + \overline{rp}^2 = (\tfrac{1}{2} + 6k^2)\,(l^2 + m^2 + n^2).$$

Deze uitkomst blijkt onafhankelijk te zijn van den hoek, waaronder de lijnen Pp, Qq en Rr op de zijden van ABC hellen.

a) Zijn de driehoeken BCP enz. rechthoekig, dan is $\mathrm{DP} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{BC}$ enz., dus $k = \tfrac{1}{2}$. Men heeft dan, als P enz. door A′ enz. worden vervangen,

$$\overline{\mathrm{B'C'}}^2 + \overline{\mathrm{C'A'}}^2 + \overline{\mathrm{A'B'}}^2 + \overline{b'c'}^2 + \overline{c'a'}^2 + \overline{a'b'}^2 = 2\,(l^2 + m^2 + n^2);$$

b) Zijn P, Q en R de punten I_a, I_b en I_c, dan is $\mathrm{DP} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{DA'} = \tfrac{1}{6}\,l$, dus $k = \tfrac{1}{6}$, zoodat men nu vindt

$$\overline{I_bI_c}^2 + \overline{I_cI_a}^2 + \overline{I_aI_b}^2 + \overline{i_bi_c}^2 + \overline{i_ci_a}^2 + \overline{i_ai_b}^2 = \tfrac{2}{3}(l^2 + m^2 + n^2).$$

Oplossing *van* Dr. R. H. VAN DORSTEN. [1])

Stel $\angle BCA' = \angle BCa' = \angle CAB' =$ enz. $= a$. Uit

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\overline{AB'} \times \overline{AC'} \times \cos \angle B'AC'$$

en $$\overline{b'c'}^2 = \overline{Ab'}^2 + \overline{Ac'}^2 - 2\overline{Ab'} \times \overline{Ac'} \times \cos \angle b'Ac',$$

volgt door optelling (waarbij de laatste termen wegvallen)

$$\overline{B'C'}^2 + \overline{b'c'}^2 = 2b^2 \cos^2 a + 2c^2 \sin^2 a.$$

Evenzoo wordt

$$\overline{C'A'}^2 + \overline{c'a'}^2 = 2c^2 \cos^2 a + 2a^2 \sin^2 a\,,$$

$$\overline{A'B'}^2 + \overline{a'b'}^2 = 2a^2 \cos^2 a + 2b^2 \sin^2 a\,,$$

dus

$$\overline{B'C'}^2 + \overline{C'A'}^2 + \overline{A'B'}^2 + \overline{b'c'}^2 + \overline{c'a'}^2 + \overline{a'b'}^2 = 2(a^2+b^2+c^2) \;..\; (a).$$

Stel verder

$$\angle BCI_a = \angle BCi_a = \angle CAI_b = \text{enz.} = \phi$$

en $$\angle CBI_a = \angle CBi_a = \angle ACI_b = \text{enz.} = \psi,$$

dan is

$$\overline{I_bI_c}^2 = \overline{AI_b}^2 + \overline{AI_c}^2 - 2\overline{AI_b} \times \overline{AI_c} \times \cos(A + \phi + \psi),$$

$$\overline{i_bi_c}^2 = \overline{Ai_b}^2 + \overline{Ai_c}^2 - 2\overline{Ai_b} \times \overline{Ai_c} \times \cos(A - \phi - \psi).$$

Door optelling vindt men hieruit

$$\overline{I_bI_c}^2 + \overline{i_bi_c}^2 + 2\overline{AI_b}^2 \times 2\overline{AI_c}^2 - 4\overline{AI_b} \times \overline{AI_c} \cos A \cos(\phi + \psi).$$

Nu is $AI_b = \frac{1}{3} b \sqrt{4 - 3\sin^2 a}$, $AI_c = \frac{1}{3} c \sqrt{4 - 3\cos^2 a}$, en

$$\cos(\phi + \psi) = -\cos AI_bC = -\frac{\overline{AI_b}^2 + \overline{CI_b}^2 - b^2}{2\overline{AI_b} \times \overline{CI_b}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(4 - 3\sin^2 a)(4 - 3\cos^2 a)}}.$$

[1]) In deze oplossing is ondersteld dat de driehoeken BCA' en BCa' elkaars spiegelbeelden zijn.

Dus wordt

$$\overline{I_bI_c}^2 + \overline{i_bi_c}^2 = \tfrac{2}{9}\, b^2 (4 - 3 \sin^2 a) + \tfrac{2}{9}\, c^2 (4 - 3 \cos^2 a) - \tfrac{8}{9}\, bc \cos A,$$

$$\overline{I_cI_a}^2 + \overline{i_ci_a}^2 = \tfrac{2}{9}\, c^2 (4 - 3 \sin^2 a) + \tfrac{2}{9}\, a^2 (4 - 3 \cos^2 a) - \tfrac{8}{9}\, ca \cos B,$$

$$\overline{I_aI_b}^2 + \overline{i_ai_b}^2 = \tfrac{2}{9}\, a^2 (4 - 3 \sin^2 a) + \tfrac{2}{9}\, b^2 (4 - 3 \cos^2 a) - \tfrac{8}{9}\, ab \cos C,$$

waaruit door optelling volgt

$$\overline{I_bI_c}^2 + \overline{I_cI_a}^2 + \overline{I_aI_b}^2 + \overline{i_bi_c}^2 + \overline{i_ci_a}^2 + \overline{i_ai_b}^2 = \tfrac{2}{3}\,(a^2 + b^2 + c^2) \ldots (b).$$

Vraagstuk XXXI.

K d 2. In normale coördinaten wordt de hyperbool van KIEPERT voorgesteld door

$$x \sin (A - \varphi) = y \sin (B - \varphi) = z \sin (C - \varphi),$$

en de verbindingslijn van hoogtepunt en symmediaanpunt door

$$x : (\sin B \sin C + \sin A \operatorname{tg} \varphi) =$$
$$y : (\sin C \sin A + \sin B \operatorname{tg} \varphi) =$$
$$z : (\sin A \sin B + \sin C \operatorname{tg} \varphi).$$

Als twee punten (φ_1) en (φ_2) dezer hyperbool in een rechte liggen met het punt (φ_3) der genoemde rechte lijn, heeft men

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_2 + \operatorname{ctg} \varphi_3 = 0.$$

(Dr. H. A. W. SPECKMAN.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. R. H. VAN DORSTEN, Dr. A. J. A. PRANGE, F. SCHUH, Dr. H. A. W. SPECKMAN *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Laat gegeven zijn de vergelijking eener willekeurige lijn l

$$lx + my + nz = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

benevens de vergelijkingen waardoor de hyperbool van KIEPERT, H,

$$x \sin (A - \phi) = y \sin (B - \phi) = z \sin (C - \phi) \ldots \quad (2)$$

en de verbindingslijn van hoogtepunt en symmediaanpunt, d,

$$x : (\sin B \sin C + \sin A \operatorname{tg} \phi) = y : (\sin C \sin A + \sin B \operatorname{tg} \phi) =$$
$$= z : (\sin A \sin B + \sin C \operatorname{tg} \phi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

worden voorgesteld.

Door eliminatie van x, y, z tusschen (1) en (2) vinden wij voor de snijpunten van l en H de vergelijking

$$P \cos 2\phi + Q \sin 2\phi = R,$$

of

$$(P - R) \cot^2 \phi + 2Q \cot \phi - (P + R) = 0, \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin

$$P = l \cos (B + C) + m \cos (C + A) + n \cos (A + B) =$$
$$= - l \cos A - m \cos B - n \cos C,$$

$$Q = l \sin (B + C) + m \sin (C + A) + n \sin (A + B) =$$
$$l \sin A + m \sin B + n \sin C,$$

$$R = l \cos (B - C) + m \cos (C - A) + n \cos (A - B).$$

Zijn ϕ_1 en ϕ_2 de waarden van ϕ, die met de beide snijpunten S_1 en S_2 van l en H overeenkomen, zoo volgt uit (4)

$$\cot \phi_1 + \cot \phi_2 = \frac{2Q}{R - P}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Door eliminatie van x, y, z tusschen (1) en (3) vindt men

$$\tfrac{1}{2}(R - P) \cot \phi + Q = 0.$$

Is ϕ_3 de waarde van ϕ, overeenkomende met het snijpunt S_3 van l en d, zoo is

$$\cot \phi_3 = - \frac{2Q}{R - P}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Uit (5) en (6) blijkt, dat voor de 3 snijpunten S_1, S_2, S_3, gelegen op een willekeurige lijn l, de volgende betrekking geldt

$$\cot \phi_1 + \cot \phi_2 + \cot \phi_3 = 0.$$

Vraagstuk XXXII.

N⁴ 2 h. Gegeven is een vlakke kromme van den n^{den} graad, C^n, met d dubbelpunten en k keerpunten.

Men vraagt te bepalen:

a) het aantal kegelsneden door vier gegeven punten, die C^3 aanraken;

b) het aantal kegelsneden door drie gegeven punten, die met C^3 drie op elkander volgende punten gemeen hebben;

c) het aantal parabolen door drie gegeven punten, welke C^3 aanraken.

Welke veranderingen ondergaan de bedoelde aantallen, wanneer een of meer der gegeven punten op C^3 gelegen zijn?

(Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* F. SCHUH *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Wij beantwoorden de volgende meer algemeene vraag, waarvan *a*) en *b*) bijzondere gevallen zijn.

Gegeven een C_n met d dubbelpunten en k keerpunten. Gevraagd het aantal krommen C_m, door $q = \frac{1}{2}m(m+3) - p$ gegeven punten, waarvan er r op de kromme C_n liggen, die die de kromme C_n buiten de gegeven punten $(p+1)$-puntig aanraken.

Daartoe beginnen we met het geval, dat C_n unicursaal en overigens zonder singulariteiten is, terwijl geen der q punten (x_1, y_1), (x_2, y_2) ... op C_n ligt. De parametervoorstelling van C_n is dan

$$x = \frac{\phi(\lambda)}{\chi(\lambda)}, \quad y = \frac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)},$$

waarin ϕ, ψ en χ n^{de}-graadsfuncties van λ zijn. De parameters der punten van C_n, waar een C_m, door de gegeven punten, $(p+1)$-puntig aanraakt, voldoen aan de vergelijking

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \chi^m, & \chi^{m-1}\phi, & \chi^{m-1}\psi, & \chi^{m-2}\phi^2, & \ldots & \psi^m \\ \frac{d(\chi^m)}{d\lambda} & \frac{d(\chi^{m-1}\phi)}{d\lambda} & & & & \\ \frac{d^2(\chi^m)}{d\lambda^2} & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \frac{d^p(\chi^m)}{d\lambda^p} & \frac{d^p(\chi^{m-1}\phi)}{d\lambda^p} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{d^p(\psi^m)}{d\lambda^p} \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \ldots & y_1^m \\ 1 & x_2 & \cdots & \cdots & \cdots & y_2^m \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_q & y_q & x_q^2 & \ldots & y_q^m \end{vmatrix} = 0 \ldots (1).$$

In dezen vorm geschreven, schijnt de vergelijking van hooger graad te zijn dan in werkelijkheid het geval is. Maakt men, door invoering van een 2den parameter $\mu = 1$, ϕ, ψ en χ homogeen, dan kan, door toepassing der bekende formule $n\phi = \lambda \frac{d\phi}{d\lambda} + \mu \frac{d\phi}{d\mu}$, vergelijking (1) vervangen worden door

$$\begin{vmatrix} \frac{d^p(\chi^m)}{d\mu^p} & \frac{d^p(\chi^{m-1}\phi)}{d\mu^p} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{d^p(\psi^m)}{d\mu^p} \\ \frac{d^p(\chi^m)}{d\mu^{p-1}d\lambda} & \frac{d^p(\chi^{m-1}\phi)}{d\mu^{p-1}d\lambda} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{d^p(\psi^m)}{d\mu^{p-1}d\lambda} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{d^p(\chi^m)}{d\lambda^p} & \frac{d^p(\chi^{m-1}\phi)}{d\lambda^p} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{d^p(\psi^m)}{d\lambda^p} \\ 1 & x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & y_1^m \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_q & \cdots & \cdots & \cdots & y_q^m \end{vmatrix} = 0 \ldots (2).$$

Hierin zijn de eerste $(p+1)$ rijen allen van den graad $(nm - p)$, zoodat de vergelijking (2), dus ook vergelijking (1), van den graad

$$(p+1)(nm-p)$$

in λ is. Dit is dus het gevraagde aantal als C_n $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dubbelpunten heeft. Nu vermindert ieder dubbelpunt van C_n het aantal krommen C_m, die aan de vraag voldoen als C_n geen dubbelpunten bezit, met een bepaald aantal ξ; immers een C_m, die door de gegeven punten en het dubbelpunt gaat en een der takken door het dubbelpunt p-puntig aanraakt, voldoet eenige malen oneigenlijk aan de vraag. Voor een C_n zonder dubbelpunten is het aantal dus gelijk aan

$$(p+1)(nm-p)+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\xi=\tfrac{1}{2}\xi n^2+$$
$$+\{m(p+1)-\tfrac{3}{2}\xi\}n+\{\xi-p(p+1)\}.$$

Hiervoor schrijven we ter bekorting an^2+bn+c of A_n.

Bestaat nu C_n uit twee algemeene krommen C_{n_1} en C_{n_2}, zoodat ze n_1n_2 dubbelpunten bezit, dan heeft men

$$A_n=A_{n_1}+A_{n_2}+n_1n_2\xi,$$

of

$$a(n_1+n_2)^2+b(n_1+n_2)+c=an_1^2+bn_1+c+an_2^2+bn_2+$$
$$+c+n_1n_2\xi,$$

of, daar $\xi=2a$ is,

$$c=0,$$

d.w.z.

$$\xi=p(p+1).$$

Hieruit volgt nu voor het gevraagde aantal de betrekking

$$A_n=\tfrac{1}{2}n(p+1)\{(n-3)p+2m\}.$$

Om den invloed van een keerpunt te vinden, merken we op, dat de beide parameterwaarden van een dubbelpunt in het algemeen niet aan de vergelijking (1) voldoen, de λ van een keerpunt echter wel; stel dat die parameter ζ maal voldoet.

Een keerpunt vermindert dan het gevraagde aantal met ζ als C_n een unicursale kromme is. Nu behoort echter een keerpunt tot de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dubbelpunten der unicursale kromme, zoodat het aantal A_n door de aanwezigheid van een keerpunt met $\xi+\zeta$ wordt verminderd.

Om ζ te vinden, stellen we dat het keerpunt wordt aangewezen door $\lambda=0$, en het gelegen is in den oorsprong O, met de X-as als raaklijn. Nu is ϕ deelbaar door λ^2, ψ door λ^3, maar χ niet deelbaar door λ.

Verder is ζ het aantal wortels $\lambda=0$ van vergelijking (1),

of de exponent der macht van λ, waardoor Δ deelbaar is. De machten van λ, waardoor de elementen der eerste rij deelbaar zijn, hebben dan achtereenvolgens tot exponenten 0, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 8, 9, 10, 11, 12, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 12 enz.

Om te maken, dat de p volgende elementen van iedere kolom minstens door dezelfde macht van λ deelbaar zijn als het eerste element dier kolom, vermenigvuldigen we de tweede rij met λ, de 3de rij met λ^2 enz. en de $(p+1)^{ste}$ rij met λ^p, dus in het geheel met $\lambda^{\frac{1}{2}(p+1)p}$. We rangschikken nu de kolommen naar de macht van λ, waardoor het eerste element deelbaar is. Wanneer bij twee opvolgende kolommen deze machten van λ gelijk zijn (zooals b.v. bij de 6de en 7de kolom), dan kan men, door de voorgaande kolom eenige malen bij de volgende op te tellen, bewerken dat de opvolgende elementen der eerste rij steeds door hoogere machten van λ deelbaar zijn. Wordt nu echter het eerste element der 7de kolom b.v. niet alleen deelbaar door λ^7, maar door een hoogere macht van λ, dan moeten we, om de volgorde der kolommen naar de machten van λ te handhaven, kolommen verwisselen. Worden deze bewerkingen voortgezet, dan zullen ten slotte de eerste $(p+1)$ elementen der s^{de} kolom deelbaar zijn door λ^s, behalve het eerste element van de eerste kolom, dat niet door λ deelbaar is. Ontwikkelt men den determinant nu naar sommen van producten van onderdeterminanten gevormd uit de eerste $(p+1)$ en de laatste q rijen, dan blijkt Δ deelbaar te zijn door een macht van λ met exponent $2+3+4+\ldots+(p+1) = \frac{1}{2}p(p+3)$. Vóór de vermenigvuldiging met $\lambda^{\frac{1}{2}p(p+1)}$ was Δ dus deelbaar door λ tot de macht $\frac{1}{2}p(p+3) - \frac{1}{2}p(p+1) = p$. Dus is $\zeta = p$ en wordt A_n door een keerpunt verminderd met

$$\xi + \zeta = p(p+1) + p = p(p+2).$$

Ligt één der gegeven punten, b.v. (x_1, y_1), op de C_n, dan voldoet de C_m, die in (x_1, y_1) de C_n $(p+1)$-puntig aanraakt en door de overige gegeven punten gaat, eenige keeren aan de vraag; stel ϑ-maal. Het aantal krommen C_m, die buiten de gegeven punten een $(p+1)$-puntige aanraking hebben, wordt dan voor ieder der op C_n gelegen gegeven punten met ϑ verminderd. Om ϑ te vinden, denken we voor het punt (x_1, y_1) $\lambda = 0$, terwijl we (x_1, y_1) met O laten samenvallen. Dan is $x_1 = y_1 = 0$, terwijl ϕ en ψ door λ deelbaar zijn,

maar χ niet. Van de $(p+2)^{de}$ rij zijn nu alle elementen, behalve het eerste, nul. Door ontwikkeling naar deze rij gaat vergelijking (1) dus over in:

$$\nabla \equiv \begin{vmatrix} \chi^{m-1}\phi & , \chi^{m-1}\psi & , \chi^{m-2}\phi^2 & \cdots & \psi^m \\ \frac{d(\chi^{m-1}\phi)}{d\lambda} & & & & \\ \frac{d^2(\chi^{m-1}\phi)}{d\lambda^2} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \frac{d^p(\chi^{m-1}\phi)}{d\lambda^p} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{d^p(\psi^m)}{d\lambda^p} \\ x_2 & , y_2 & , x_2^2 & & y_2^m \\ \vdots & & \vdots & & \\ x_q & \cdots & \cdots & \cdots & y_q^m \end{vmatrix} = 0.$$

Deze vergelijking behandelen we op dezelfde wijze als boven geschied is om ζ te vinden. We vermenigvuldigen de 2de rij met λ, de 3de rij met λ^2 enz., de $(p+1)^{ste}$ rij met λ^p, dus in het geheel met $\lambda^{\frac{1}{2}p(p+1)}$. Door onderlinge optelling en rangschikking der kolommen kan men evenals in het vorige geval bereiken, dat de eerste $(p+1)$ elementen van de s^{de} kolom deelbaar zijn door λ^s. Bij ontwikkeling naar producten van onderdeterminanten blijkt de determinant dan deelbaar te zijn door λ tot de macht $1+2+3+\ldots+$ $+(p+1)=\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$. Vóór de vermenigvuldiging is ∇ dus deelbaar door een macht van λ met exponent $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)-\frac{1}{2}p(p+1)=p+1$. De C_m, die in O de $(p+1)$-puntige aanraking uitvoert, voldoet dus $(p+1)$-maal aan de vraag, zoodat men heeft

$$\vartheta = p+1.$$

Voor het aantal krommen C_m, die aan de bij het begin van ons onderzoek gestelde vraag voldoen, wordt dus gevonden:

$$N_n = \tfrac{1}{2}n(p+1)\{(n-3)p+2m\} - p(p+1)d - p(p+2)k - (p+1)r \ldots (3)$$

Om vraag *a*) te beantwoorden, heeft men in vergelijking (3) te substitueeren $m=2$ en $p=1$. Men vindt dan

$$N_n = n(n+1) - 2d - 3k - 2r, \ldots\ldots (4)$$

waarin r een der waarden 0, 1, 2, 3 of 4 heeft.

Om vraag *b*) te beantwoorden, substitueert men $m = 2$ en $p = 2$. Men verkrijgt dan:

$$N_n = 3n(n-1) - 6d - 8k - 3r, \ldots\ldots (5)$$

waarin r een der waarden 0, 1, 2 of 3 heeft.

c) Wanneer de kromme C_m een aantal gegeven krommen C_{n_1} C_{n_2}, enz. twee- of meer-puntig moet aanraken, en door gegeven punten, moet gaan, waarvan eenige op de gegeven krommen kunnen liggen, dan wordt het aantal krommen C_m, die aan de vraag voldoen, voorgesteld door

$$N_{n_1} \times N_{n_2} \times \ldots.$$

hier is N_{n_1} het aantal krommen C_m, die met C_{n_1} de gevraagde aanraking vertoonen, door de gegeven punten gaan, en verder nog door zooveel willekeurige (niet op C_{n_1} gelegen) punten, dat C_m bepaald is. Immers de voorgeschreven aanraking met de kromme C_{n_1} geeft, in verband met het gaan door de gegeven punten waarvan er eenige op C_{n_1} zelf kunnen liggen, een aantal betrekkingen tusschen de coëfficienten van C_m, die terug te brengen zijn tot één betrekking van den graad N_{n_1} verbonden met lineaire betrekkingen. Zoo krijgt men dus, behalve lineaire vergelijkingen, betrekkingen van den graad N_{n_1}, N_{n_2} enz., waarvan het aantal oplossingen is $N_{n_1} \times N_{n_2} \times \ldots$

In vraag *c*) is nu voor de kegelsnede ($m = 2$) voorgeschreven 2-puntige aanraking met een C_n, en bovendien aanraking met een C_1 (de lijn in het oneindige), waarvoor vergelijking (3) $N_1 = 2$ levert.

Dus bedraagt het aantal parabolen door drie gegeven punten, die C_n aanraken,

$$N_n \times N_1 = 2n(n+1) - 4d - 6k - 4r \ldots (6)$$

waarin r een der waarden 0, 1, 2 of 3 heeft.

Oplossing *van* Dr. H. de Vries.

1. Wij noemen het vlak waarin C^n ligt ε, de gegeven punten A, B, C en D, trekken in ε door het punt C een willekeurige rechte g, en brengen door deze een willekeurig vlak ε_1. Door het punt C en in ε_1 trekken wij

weer een willekeurige rechte, nemen daarop de punten A_1 en B_1 naar willekeur aan en verbinden deze met de punten A en B door de rechten a en b. Wanneer wij nu nog het op g gelegen snijpunt van AB met ε_1 door C_1 aanduiden en twee punten van ε en ε_1 aan elkaar toevoegen, wanneer hun verbindingslijn de beide kruisende lijnen a en b snijdt, dan ontstaat de quadratische verwantschap, bedoeld in STEINER's „Systematische Entwickelung" (Allgemeine Anmerkung, Ges. Werke I, p. 407) waarvoor ABC en $A_1B_1C_1$ de beide fundamentale driehoeken zijn.

De kromme C^n gaat nu door deze quadratische transformatie over in een C_1^{2n} van den graad $2n$, met d dubbelpunten, k keerpunten, en bovendien nog drie n-voudige punten in de punten A_1, B_1, C_1; C_1^{2n} is dus van de klasse $2n(2n-1) - 3n(n-1) - 2d - 2k = n(n+1) - 2d - 3k$. Door het aan D toegevoegde punt D_1 kunnen dus $n(n+1) - 2d - 3k$ raaklijnen aan C_1^{2n} getrokken worden. Een rechte van ε_1 gaat echter door de transformatie over in een kegelsnee door A, B, C; aan alle rechten in ε_1 door D_1 zijn dus toegevoegd alle kegelsneden door A, B, C, D; derhalve bedraagt het aantal dezer kegelsneden, die C^n aanraken, $n(n+1) - 2d - 3k$.

2. Zal een kegelsnee door A, B, C met C^n drie opeenvolgende punten gemeen hebben, dan moet de aan deze kegelsnee toegevoegde rechte in ε_1 dezelfde eigenschap bezitten ten opzichte van C_1^{2n}, dus een buigraaklijn zijn; nu bezit de bij C_1^{2n} behoorende kromme van HESSE in elk der drie n-voudige punten een $(3n-4)$-voudig punt, terwijl de n raaklijnen in dit punt aan C_1^{2n} tevens raaklijnen zijn aan n takken der kromme van HESSE. Ieder n-voudig punt vervangt dus $n(3n-4) + n = 3n(n-1)$ buigpunten, zoodat het werkelijk aantal buigpunten van C_1^{2n} $3 \,.\, 2n(2n-2) - 9n(n-1) - 6d - 8k = 3n(n-1) - 6d - 8k$ bedraagt. Dit is dus tevens het aantal kegelsneden door A, B, C die C^n osculeeren; hierbij moet echter worden opgemerkt dat daarin niet begrepen zijn de kegelsneden die C^n in een der dubbel- of keerpunten aanraken.

3. Aan de oneindig ver gelegen rechte g_∞ van ε is in ε_1 een zekere, om $A_1B_1C_1$ beschreven hyperbool Q_1 toegevoegd [1]);

---

[1]) zie t a. p. bl. 413.

al naarmate dus eene rechte l_1 in ε_1 deze hyperbool snijdt, of raakt, of niet snijdt, zal de aan l_1 toegevoegde kegelsnee in ε eene hyperbool, parabool of ellips zijn. Nu heeft de kromme Q_1 met C_1^{2n} $2n(n+1) - 4d - 6k$ raaklijnen gemeen; dit getal levert dus tevens het aantal parabolen door A, B, C die C^n aanraken.

4. Ligt het punt A op C^n, dan zondert zich van C_1^{2n} de rechte B_1C_1 af; er blijft dus over eene C_1^{2n-1} met een n-voudig punt in A_1 en $(n-1)$-voudige punten in B_1 en C_1. Door nu geheel op dezelfde wijze te werk te gaan als hierboven vindt men b.v. voor het aantal kegelsneden door A, B, C, en die C_1^n osculeeren (echter niet in A zelf),

$$3n(n-1) - 6d - 8k - 3.$$

Voor $n = 2$ vindt men hieruit 3; neemt men aan dat B en C de beide cyclische punten zijn, dan volgt hieruit dat door ieder punt eener kegelsnee 3 kromtecirkels gaan, die in een ander punt osculeeren.

Vraagstuk XXXIII.

N⁴ 2 c. Den graad te bepalen van de meetkundige plaats der brandpunten van alle parabolen, welke in de vlakken van een bundel liggen en vier gegeven vlakken aanraken.

(Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

Wij noemen de gegeven vlakken ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 en beschouwen voorloopig slechts de eerste drie. Deze snijden een willekeurig vlak ε door l volgens een driehoek; de brandpunten der parabolen, die de zijden van dien driehoek aanraken, liggen, volgens eene bekende stelling, op den omgeschreven cirkel. Draait ε om l, dan doorloopt deze cirkel een oppervlak van den vijfden graad, dat de lijn l tot drievoudige rechte heeft.

De doorsnede van het bedoelde oppervlak met ε_∞ bevat nl. in de eerste plaats den absoluten cirkel in het oneindige; is P_∞ een punt van het oppervlak in ε_∞ maar buiten dien cirkel,

dan moet in het vlak door P_∞ en l een cirkel gelegen zijn, die om een zekeren driehoek beschreven is en tevens door P_∞ gaat. Dit is slechts mogelijk, indien de bedoelde cirkel in een lijnenpaar ontaardt, en dit geschiedt in de drie vlakken door l evenwijdig aan de snijlijnen l_{12}, l_{23}, l_{13} van ε_1, ε_2, ε_3. In het vlak ε door l evenwijdig aan l_{12} valt de bedoelde cirkel uiteen in de oneindig ver gelegen rechte l'_{12} en de snijlijn van ε met ε_3.

De doorsnede van ons oppervlak met ε_∞ bestaat dus uit een cirkel en de drie in het oneindig ver gelegen punt van l samenkomende rechten l_{12}, l_{23}, l_{13}; het is dus inderdaad een O^5 met drievoudige rechte l. Blijkbaar bevat O^5 de lijnen l_{12}, l_{23}, l_{13} en heeft in het snijpunt dier lijnen een dubbelpunt.

Bij de vlakken ε_1, ε_2, ε_4 behoort een tweede oppervlak O^5, en de doorsnede dezer beide oppervlakken is de in het vraagstuk bedoelde kromme. De graad dezer doorsnede is 25; daarvan gaat echter af 9 voor de lijn l, die op beide oppervlakken drievoudig is, 2 voor den absoluten cirkel, 1 voor de lijn l_{12}, die op beide oppervlakken ligt, en om dezelfde reden 1 voor de lijn l'_{12}. De gezochte meetkundige plaats is dus een ruimtekromme ρ^{12}, die in 11 punten op l rust, omdat elk vlak door l slechts een parabool bevat. Zij gaat door de hoekpunten van het viervlak $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4$.

Vraagstuk XXXIV.

N⁴ 2 c. Gevraagd wordt de graad der meetkundige plaats van de middelpunten der gelijkzijdige hyperbolen, die vier gegeven vlakken aanraken en in de vlakken van een bundel liggen.

(Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

1. We zullen eerst den graad bepalen van het oppervlak gevormd door de gelijkzijdige hyperbolen, die de vlakken ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 aanraken en de rechte l tot koorde hebben, of, wat op hetzelfde neerkomt, het aantal dezer hyperbolen zoeken die bovendien op een willekeurige rechte m rusten.

Dit aantal zal niet veranderen als we het snijpunt S van ε_1, ε_2, ε_3 op l plaatsen. Het is gemakkelijk in te zien, dat gelijkzijdige hyperbolen, die aan de vraag voldoen, slechts kunnen liggen in een vlak dat l verbindt met een der doorsneden van de vlakken ε_1, ε_3, ε_3 onderling. Laat het vlak door l en $d_{12} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2$ met ε_3, ε_4 en m gemeen hebben de rechten d_3, d_4 en het punt M. De kegelsneden, die d_{12}, d_3, d_4 raken en door M gaan, vormen een stelsel met index 4; zij snijden derhalve de oneindig ver gelegen rechte in puntenparen P, P′, welke in een verwantschap (4,4) zijn gerangschikt. Dit symmetrische puntenstelsel heeft 4 paren gemeen met de involutie der punten welke onderling loodrechte richtingen bepalen, d. w. z. tot het bedoelde stelsel van kegelsneden behooren 4 gelijkzijdige hyperbolen. Daar dit ook het geval is met de vlakken (ld_{13}) en (ld_{23}), voldoen 12 hyperbolen aan de gestelde voorwaarden, en is de boven bedoelde plaats een oppervlak O^{12}. Omdat in elk vlak door l twee gelijkzijdige hyperbolen liggen, is l een achtvoudige rechte van O^{12}.

2. Nu zoeken we den graad der kromme, die de meetkundige plaats is van de polen van l t.o.v. de hyperbolen van O^{12}. Daar l een achtvoudige rechte is, gaan door elk punt van l acht hyperbolen en zijn er 16 hyperbolen die l aanraken, zoodat hun polen t.o.v. l op deze rechte liggen. En daar elk vlak door l twee hyperbolen, dus twee niet op l gelegen polen draagt, is de meetkundige plaats der polen een ruimtekromme van den graad 18.

Hieruit volgt verder dat voor 18 hyperbolen de pool oneindig ver, dus het middelpunt op l ligt. En daar een willekeurig vlak door l twee niet op l gelegen middelpunten van hyperbolen bevat, is de in het vraagstuk bedoelde meetkundige plaats een ruimtekromme van den 20^{en} graad.

3. Alle kegelsneden die door ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 geraakt worden en gelegen zijn in het vlak dat l verbindt met het snijpunt S van ε_1, ε_2, ε_3, zijn dubbelrechten. Nu kan een dubbelrechte slechts dan als ontaarding van een gelijkzijdige hyperbool beschouwd worden als ze een der cirkelpunten I of J bevat. De beide isotrope rechten SI en SJ behooren dus tot de meetkundige plaats der middelpunten van gelijkzijdige hyperbolen, die aan de gestelde eischen voldoen. Deze meetkundige plaats bestaat dus uit 8 isotrope rechten en een ruimtekromme van den 12^{en} graad.

Vraagstuk XXXV.

N⁴ 2 e. Men beschouwt een ruimtekromme van den graad n, den rang r en de klasse k.

Gevraagd wordt

a) het aantal normalen door een gegeven punt;

b) de graad van het regelvlak dat door de binormalen wordt gevormd;

c) de graad van het regelvlak der hoofdnormalen.

(Dr. J. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

a) Het aantal normaalvlakken door een willekeurig punt is even groot als het aantal dier vlakken door het oneindig ver gelegen punt L_∞ der willekeurige rechte l. Hiertoe behooren vooreerst de normaalvlakken der punten, waarvan de raaklijnen loodrecht staan op l, dus gesneden worden door de oneindig ver gelegen snijlijn s_∞ der loodrecht op l geplaatste vlakken; het aantal dezer normaalvlakken is blijkbaar gelijk aan den rang r der gegeven kromme. Daar verder het oneindig ver gelegen vlak loodrecht staat op de n asymptoten der kromme, dus een n-voudig normaalvlak is, gaan door L_∞ $(n + r)$ normalen.

De normaalvlakken omhullen dus een oppervlak van de klasse $(n + r)$.

b) Den graad van het oppervlak der binormalen bepalen we met behulp van de formule $\varepsilon = e + g - p$, waar e voorstelt het aantal osculatievlakken door een willekeurig punt, dus k; g het aantal binormalen die op een willekeurige rechte rusten; p het aantal punten der kromme in een willekeurig vlak, dus n; ε het aantal keeren dat de binormaal van een punt samenvalt met het osculatievlak.

Nu is de binormaal te beschouwen als de poollijn van het osculatievlak met betrekking tot den minimaalkegel (kegel der isotrope rechten). Elk osculatievlak dat dien kegel aanraakt, bevat dus de overeenkomstige binormaal. Derhalve is $\varepsilon = 2k$, en vindt men voor den graad van het regelvlak der binormalen $g = n + k$.

c) Den graad van het oppervlak der hoofdnormalen vinden we uit de formule $\varepsilon = e + f - g$, waar e en f achtereenvolgens het aantal osculatievlakken en normaalvlakken door een willekeurig punt voorstellen en g het aantal hoofdnormalen is, die op een willekeurige rechte rusten. Blijkbaar is hier $\varepsilon = 0$, zoodat men vindt $g = n + r + k$.

Het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: „*Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*," opgericht in 1779, tracht de beoefening der Wiskunde te bevorderen door

a) het houden van vergaderingen,

b) het uitgeven van tijdschriften,

c) het uitgeven van een reeks vraagstukken ter oplossing voor de leden, later gevolgd door de oplossingen,

d) het uitschrijven van prijsvragen,

e) het inrichten eener boekerij, enz.

De vergaderingen worden zooveel mogelijk maandelijks te Amsterdam gehouden, in de maanden van October tot Maart.

Het tijdschrift „*Revue semestrielle des publications mathématiques*" tracht in den kortst mogelijken tijd beknopte opgaven te verschaffen omtrent de in de verschillende wiskundige tijdschriften opgenomen verhandelingen. Het verschijnt jaarlijks in twee stukken, ieder van ruim honderd bladzijden.

Het tijdschrift getiteld „*Nieuw Archief voor Wiskunde*" geredigeerd door Dr. J. C. Kluyver te Leiden, Dr. D. J. Korteweg te Amsterdam en Dr. P. H. Schoute te Groningen bevat wiskundige verhandelingen. Elke twee jaar verschijnt een deel, bestaande uit vier stukken van ongeveer vijf vel druks.

De voornaamste der door de leden ingezonden oplossingen van de voorgestelde vraagstukken worden gepubliceerd in de „*Wiskundige Opgaven*," geredigeerd door Dr. J. De Vries te Utrecht. Elk deel bevat de oplossingen van 200 vraagstukken in ruim 400 bladzijden; het verschijnt in twee of drie jaar en bij stukken van ongeveer vier vel druks.

Jaarlijks wordt door het Genootschap een twaalftal prijsvragen uitgeschreven. Zij, die na verloop van tijd tien prijsvragen hebben beantwoord, verkrijgen den titel van lid van verdienste.

De bibliotheek, waarvan de boeken op aanvraag bij Dr. C. P. Burger, bibliothecaris van de Universiteits-bibliotheek te Amsterdam, aan de leden worden verzonden, is op de hoogte van den tijd, daar het Genootschap in ruiling is met de voornaamste wiskundige genootschappen in het buitenland.

De *jaarlijksche contributie* van de leden der Vereeniging bedraagt *f* 5,00 (entrée *f* 1,00).

Zij, die nog geen lid zijn en mochten verlangen lid te worden, gelieven zich aan te melden bij den Ondervoorzitter, Dr. D. Coelingh, Van Breestraat 143, Amsterdam.

Sci-900.

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN

DOOR DE

LEDEN VAN HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP

TER SPREUKE VOERENDE

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

NEGENDE DEEL.
2de Stuk.

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1904.

Ter bevordering eener geregelde toezending van de drukwerken van het Genootschap, wordt den leden beleefd verzocht bij verhuizing hun nieuw adres op te geven aan Dr. D. COELINGH, Ondervoorzitter van het Genootschap, Amsterdam, Van Beestraat 143.

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarb aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, Dr. J COELINGH, Amsterdam, Van Breestraat 143, bij wien men o klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in d toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenh van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van tw zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderri tinghe dienende tot het maecken vande reductien van de ta custingen tot gereede penningen, om dien-volgende te eyssch en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Hee Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-rente naer proportie van Los-renten, geteekend JOHAN DE WITT, 167
in den handel *f* 6,00 . . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werk van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundig wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 18
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks deel 1—8 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,00 . . . . voor de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle des publications mathématiques, deel 1—10, van elk twee stukken à *f* 4,00 en bij overcompleete stukken per stuk *f* 2,00.

Tables des matières des volumes I—V . . . . *f* 2,00.
" " " " " VI—X . . . . *f* 3,00.

Vraagstuk XXXVI.

K 6 b. Gegeven is de vergelijking in bipolaire coördinaten r, s van een vlakke kromme. Men vraagt de bipolaire vergelijking van een cirkel, die de as loodrecht snijdt en de gegeven kromme in het punt (r_1, s_1) aanraakt. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, Dr. R. H. VAN DORSTEN, J. GEEST, F. SCHUH *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Zijn p en q de afstanden van het middelpunt van den cirkel tot de beide polen, en is t de straal van den cirkel, dan levert het theorema van STEWART de betrekking

$$qr^2 + ps^2 = (p + q)(t^2 + pq).$$

De vergelijking van een cirkel die de as loodrecht snijdt, is dus van den vorm

$$Ar^2 + Bs^2 + C = 0.$$

Heeft deze cirkel met de gegeven kromme de punten (r_1, s_1) en (r_2, s_2) gemeen, dan is zijn vergelijking dus

$$\begin{vmatrix} r^2 & s^2 & 1 \\ r_1^2 & s_1^2 & 1 \\ r_2^2 & s_2^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$(r_2 + r_1)(s^2 - s_1^2) = (s_2 + s_1)\frac{s_2 - s_1}{r_2 - r_1}(r^2 - r_1^2).$$

Laat men de beide punten samenvallen, dan gaat deze vergelijking over in

$$r_1(s^2 - s_1^2) = s_1\left(\frac{ds}{dr}\right)_1(r^2 - r_1^2),$$

of, als de gegeven kromme tot vergelijking heeft $f(r, s) = 0$, in

$$(r^2 - r_1^2)s_1\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_1 + (s^2 - s_1^2)r_1\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_1 = 0.$$

Vraagstuk XXXVII.

N⁴ 2 e. De punten van een kubische ruimtekromme worden gerangschikt in de viertallen A_k van een biquadratische involutie. Uit een punt O trekt men de rechte, welke A_kA_l en A_mA_n snijdt. Bepaal den graad van de meetkundige plaats dezer snijlijn.

(Dr. J. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

De kubische involutie, welke op de gegeven kromme wordt ingesneden door een vlakkenbundel, heeft zes paren gemeen met de gegeven biquadratische involutie. De verbindingslijnen A_kA_l vormen dus een regelvlak van den zesden graad.

Wij beschouwen de verwantschap tusschen de punten P en P′, welke een rechte l gemeen heeft met de vlakken OA_kA_l en OA_mA_n. Daar de rechte OP door zes rechten A_kA_l wordt gesneden, is deze verwantschap een (6, 6). Valt P′ in P, dan komen met OP nog slechts vier buiten deze rechte gelegen stralen OP′ overeen; elke coincidentie is dus een dubbele, zoodat er zes samenvallingen $P \equiv P'$ zijn.

De bedoelde meetkundige plaats is derhalve een kegel van den zesden graad.

Vraagstuk XXXVIII.

N⁴ 2 k. Men vraagt het aantal vlakke kubische krommen te bepalen, welke door een gegeven punt gaan en op tien gegeven rechten rusten. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* F. SCHUH *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* F. SCHUH.

We breiden de vraag uit tot de volgende:

Hoe groot is het aantal vlakke krommen van den n^{den} graad C_n, die door een gegeven punt P gaan en op $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ rechten rusten?

Om dit aantal, dat we A_n noemen, te vinden, denken we $(n+1)$ dier rechten, die we l noemen, in één vlak V gelegen

dat niet door P gaat. De overige $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-(n+1)=$ $=\frac{1}{2}n(n+1)$ rechten zullen we de rechten l' noemen. Overigens denken we alle gegevens zoo willekeurig mogelijk. De $\frac{1}{2}n(n+1)$ snijpunten der rechten l' met het vlak V noemen we de punten Q; de $\frac{1}{2}n(n+1)$ snijpunten der rechten l onderling noemen we de punten R.

Wanneer nu een kromme C_n alle rechten l buiten de punten R snijdt, dan heeft ze $(n+1)$ punten met V gemeen, zoodat, daar V niet door P gaat, C_n bestaan moet uit een in V gelegen rechte m en een kromme C_{n-1} door P, in het vlak door P en m. De volgende soorten krommen voldoen dus aan de vraag:

1) Een C_{n-1} door P, rustend op de $\frac{1}{2}n(n+1)$ rechten l' gecombineerd met de snijlijn van het vlak van C_{n-1} met V; het aantal dezer oplossingen is A_{n-1}.

2) Een C_{n-1} door P, gelegen in een vlak door een der punten Q, en rustend op de $\frac{1}{2}n(n+1)-1=\frac{1}{2}(n+2)(n-1)$ overige rechten l', gecombineerd met den doorgang van het vlak van C_{n-1} op V.

Daar er $\frac{1}{2}n(n+1)$ punten Q zijn, heeft men $\frac{1}{2}n(n+1)B_{n-1}$ oplossingen van deze soort, als B_n het aantal krommen C_n voorstelt, die in de vlakken van een bundel liggen, door een punt P van den drager p van den bundel gaan, en op $\frac{1}{2}n(n+3)$ rechten rusten.

3) Een C_{n-1} door P, gelegen in een vlak door P en twee der punten Q, en rustend op de $\frac{1}{2}(n^2+n-4)$ overige rechten l', gecombineerd met de snijlijn van het vlak van C_{n-1} met V.

Daar ieder paar punten Q één oplossing geeft, krijgt men van deze soort $\frac{1}{8}n(n+1)(n-1)(n+2)$ oplossingen.

4) Een C_n door P en een der punten R, b.v. R_{12}, rustend op de rechten l' en op de $\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$ overige rechten l.

Is D_n het aantal vlakke krommen C_n, gaande door twee gegeven punten P, en rustend op $\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$ rechten, dan levert ieder punt R dus C_n oplossingen. In het aantal $\frac{1}{2}n(n+1)D_n$ komt echter de kromme C_n die door P, R_{12} en R_{34} gaat, tweemaal voor, daar ze bij de krommen door P en R_{12} en nog eens bij de krommen door P en R_{34} in rekening wordt gebracht. Ieder der $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)=\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$ puntenparen R met vier verschillende indices levert één kromme, die dubbel in rekening gebracht is, zoodat men $\frac{1}{2}n(n+1)D_n-$

$-\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$ oplossingen van de vierde soort krijgt.

Men vindt dus voor het totaal aantal oplossingen

$$A_n = A_{n-1} + \tfrac{1}{2}n(n+1)B_{n-1} + \tfrac{1}{8}n(n+1)(n-1)(n+2) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}n(n+1)D_n - \tfrac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1),$$

of

$$A_n = A_{n-1} + \tfrac{1}{2}n(n+1)(B_{n-1} + D_n) + \tfrac{1}{2}(n-1)n(n+1) \ldots 1).$$

Bepaling van B_n. Van de $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegeven rechten denken we er $(n+1)$ in een vlak V gelegen, dat niet door P gaat. We noemen deze de rechten l; de overigen $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ de rechten l'. De $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ snijpunten der rechten l' met V noemen we Q, en de $\frac{1}{2}n(n+1)$ snijpunten der rechten l onderling noemen we R. Men krijgt nu de volgende soorten oplossingen:

1) Een C_{n-1} door P in een vlak door p, rustend op de $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ rechten l', gecombineerd met de snijlijn van het vlak van C_{n-1} en V; deze soort geeft B_{n-1} oplossingen.

2) Een C_{n-1} door P in een vlak door p en een der punten Q, rustend op de $\frac{1}{2}(n^2+n-4)$ overige rechten l', gecombineerd met de snijlijn van het vlak van C_{n-1} met V. Dit geeft $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ oplossingen.

3) Een C_n door P en een der punten R, b.v. R_{12}, gelegen in een vlak door p en R_{12}, rustend op de rechten l' en de $\frac{1}{2}(n-1)(n+4)$ overige rechten l. Dit geeft $\frac{1}{2}n(n+1)$ oplossingen.

Men vindt dus

$$B_n = B_{n-1} + \tfrac{1}{2}(n-1)(n+2) + \tfrac{1}{2}n(n+1) = B_{n-1} + n^2 + n - 1,$$

$$B_n = B_1 + \sum_2^n (n^2+n-1) = B_1 + \tfrac{1}{3}(n+3)(n^2-1),$$

of daar $B_1 = 1$ is,

$$B_n = \tfrac{1}{3}n(n^2+3n-1) \ldots\ldots 2).$$

Bepaling van D_n. Van de $\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$ gegeven rechten denken we er weer $(n+1)$ in één vlak V gelegen, dat door P gaat. We krijgen dan $\frac{1}{2}(n^2+n-4)$ punten Q en $\frac{1}{2}n(n+1)$

punten R. Op overeenkomstige wijze als boven vindt men

$$D_n = D_{n-1} + \tfrac{1}{2}(n^2 + n - 4) + \tfrac{1}{2} n (n + 1) = D_n + (n - 1)(n + 2),$$

$$D_n = D_1 + \sum_2^n (n - 1)(n + 2) = D_1 + \tfrac{1}{3}(n - 1) n (n + 4),$$

of daar $D_1 = 0$ is,

$$D_n = \tfrac{1}{3}(n - 1) n (n + 4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Substitueert men in 1) voor B_{n-1} en D_n de gevonden waarden, dan vindt men

$$A_n = A_{n-1} + \tfrac{1}{6} n (n+1)(n-1)(n+3)(2n-1) + \tfrac{1}{2}(n-1) n (n+1),$$

$$A_n = A_{n-1} + \tfrac{1}{6}(n - 1) n^2 (n + 1)(2n + 5),$$

$$A_n = A_1 + \tfrac{1}{6} \sum_2^n (n - 1) n^2 (n + 1)(2n + 5),$$

$$A_n = A_1 + \tfrac{1}{36}(n - 1) n (n+1)(n+2)(2n^2 + 8n + 3),$$

of daar $A_1 = 0$ is,

$$A_n = \tfrac{1}{36}(n - 1) n (n + 1)(n + 2)(2n^2 + 8n + 3) \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Dit is het gevraagde aantal.

Bij de vraag naar het aantal vlakke kubische krommen door een gegeven punt en rustend op 10 rechten, heeft men $n = 3$ te stellen, zoodat men voor het in de opgave gevraagde aantal vindt

$$A_3 = 150.$$

Opmerking van Dr. J. de Vries. In plaats van de aantallen B_n en D_n te bepalen, kan men, meer algemeen, zoeken het aantal $f(n, s)$ der krommen die door s gegeven punten der rechte p gaan en op $\tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - s$ rechten rusten.

Laat men $(n + 1 - s)$ dezer rechten op p rusten, dan bepaalt elk van hen met p een vlak, dat één C_n bevat, die, omdat ze een der gegeven rechten n-maal snijdt, voor n oplossingen in rekening moet gebracht worden.

Alle overige oplossingen worden gevormd door het samenstel van de rechte p met een C_{n-1}, waarvan het vlak door p gaat, en die op de $\tfrac{1}{2} n (n + 1)$ rechten rust, welke niet door p worden gesneden.

We hebben dus de betrekking

$$f(n, s) = n (n + 1 - s) + f(n - 1, 0).$$

Uit

$$f(n, 0) = n(n+1) + f(n-1, 0)$$

vindt men gemakkelijk

$$f(n, 0) = \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

Nu is

$$f(n, s) = \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2) - sn,$$

en hieruit vindt men voor $s = 1$ en $s = 2$ de aantallen B_n en D_n.

Vraagstuk XXXIX.

K 8 a. Gegeven zijn vier punten P_k van een vlak. Men construeert het punt Q_k, dat met P_k isogonaal verwant is ten opzichte van den driehoek $P_l P_m P_n$ Te bewijzen dat P_k het middelpunt is van den om $Q_l Q_m Q_n$ beschreven cirkel.

(Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. R. H. VAN DORSTEN, F. SCHUH, Dr. H. A. W. SPECKMAN *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing.

Uit de constructie volgt, dat de driehoeken $P_k P_l Q_m$ en $P_k P_l Q_n$ congruent zijn omdat ze een zijde gemeen en de aanliggende hoeken gelijk hebben. Dus is $P_k Q_m$ gelijk aan $P_k Q_n$. Evenzoo heeft men, wegens de congruentie der driehoeken $P_k P_m Q_n$ en $P_k P_m Q_l$, $P_k Q_n = P_k Q_l$. Derhalve is $P_k Q_n = P_k Q_l = P_k Q_m$, d. w. z. P_k is het middelpunt van den om $Q_n Q_l Q_m$ beschreven cirkel.

Vraagstuk XL.

M² 8 f. De meetkundige plaats der kegelsneden, welke een rechte l tweemaal snijden en op vijf gegeven rechten c_k rusten, is een oppervlak van den achtsten graad (zie b.v. *Versl. K. A. v. W.*, 1902, deel X, bl. 746). Als beeld van het op dit oppervlak gelegen punt P beschouwt men den doorgang van de rechte door P, die op l en op c_1 rust, met een gegeven vlak. Men vraagt naar de beelden van de rechten l en c_k, en naar de krommen van het oppervlak, waarvan de beelden rechte lijnen zijn.

(Dr. J. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

1. Elk punt P′ van het beeldvlak is het beeld van een bepaald punt P; immers l is een zesvoudige rechte van het oppervlak, dus heeft de rechte door P′ welke op l en op c_1 rust, nog slechts één punt met O^8 gemeen.

Elke kegelsnede van O^8 heeft tot beeld een rechte, n.l. den doorgang van haar vlak met het beeldvlak, dus een rechte r' door het snijpunt L met het beeldvlak.

Op r' liggen de beelden der snijpunten van de kegelsnede met l.

Elk punt Q van l behoort tot zes kegelsneden, heeft dus zes beelden, die gelegen zijn op de snijlijn van het beeldvlak met het vlak (Qc_1). Deze zes punten komen allen in L als Q in L komt; het beeld van de rechte l heeft dus in L een zesvoudig punt, en daar elke rechte r' door L twee beelden van punten Q draagt, is het beeld van l een kromme van den achtsten graad L^8 met zesvoudig punt L.

In verband met het voorgaande volgt hieruit, dat de doorgang C_1 der rechte c_1 een dubbelpunt van L^8 is, waarvan de raaklijnen bepaald worden door de snijpunten van l met de in het vlak $(C_1 l)$ gelegen kegelsnede.

De rechte c_k $(k = 2, 3, 4, 5)$ wordt afgebeeld door de kegelsnede welke de door l, c_1 en c_k bepaalde hyperboloïde op het beeldvlak insnijdt.

2. Een vlak γ door c_1 snijdt O^8 nog volgens een kromme van den zevenden graad; haar snijpunten met c_1 worden afgebeeld in zeven punten van den doorgang van γ, die natuurlijk door C_1 gaat. Deze beelden komen allen in L als γ met het vlak (Lc_1) samenvalt. Het raakvlak in C_1 levert ook zeven beeldpunten, maar een daarvan valt met C_1 samen. Bijgevolg is het beeld der rechte c_1 een kromme C^8_1 die zevenmaal door L en eenmaal door C_1 gaat.

De krommen C^8_1 en L^8 hebben 7×6 doorsneden in L en 2 in C_1; de overige 20 zijn de beelden van even zoovele rechten die op c_1 en l steunen en op het oppervlak O^8 gelegen zijn. Inderdaad bevat O^8 20 in lijnenparen ontaarde kegelsneden.

3. Een rechte s' van het beeldvlak is de afbeelding van de ruimtekromme σ^9, van den negenden graad, welke O^8, buiten

l en c_1 om, gemeen heeft met de door s', l en c_1 bepaalde hyperboloïde.

Daar de acht snijpunten van s' met de kromme L^8 beelden zijn van acht punten op l, rust σ^9 in acht punten op l. Het negende in eenig vlak ϕ door l gelegen punt van σ^9 heeft zijn beeld in het snijpunt van s' met den doorgang van ϕ.

Het beeld van c_k heeft twee punten met s' gemeen, dus is c_k een koorde van σ^9.

Vraagstuk XLI.

L^1 3 b. Een ellips wordt beschreven door een punt P in het vlak van een cirkel, die aan de binnenzijde over een cirkel met tweemaal grooteren straal rolt. Bepaal de punten van den rollenden cirkel, die de door P gaande middellijn der ellips en de daaraan toegevoegde middellijn beschrijven, en leid daaruit af een constructie voor richting en grootte der assen van een ellips, waarvan richting en grootte van twee toegevoegde middellijnen gegeven zijn.

(C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, T. J. ALLERSMA, H. BREMEKAMP, Dr. W. BOUWMAN, E. D. J. DE JONGH JR., J. A. KERKHOVEN, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, J. C. DE MASIER, F. SCHUH *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* J. A. KERKHOVEN.

Zij O (fig. 1) het middelpunt van den vasten, M dat van den rollenden cirkel. De rechte PM snijdt den laatsten in A_1 en B_1, die bij de bedoelde beweging de vaste rechten OA en OB zullen beschrijven, langs welke de assen der door P beschreven ellips vallen, en men heeft $OA = B_1P$, $OB = A_1P$.

Het punt P wentelt om het raakpunt C der cirkels, zijn raaklijn staat dus loodrecht op CP; de aan OP toegevoegde middellijn valt derhalve langs de loodlijn uit O op CP neergelaten. Daar elk punt van den kleinen cirkel een rechte doorloopt, die door O gaat, zullen de beide toegevoegde middellijnen beschreven worden door de punten P_1 en Q_1, waarin cirkel (M) door OP en CP wordt gesneden. Zooals bekend is, glijdt dan de rechte CQ_1 met haar uiteinden langs de vaste

lijnen OC en OQ_1. Valt zij langs OQ_1, dan komt P in Q; de voerstraal OQ is dus gelijk aan PC.

Zijn nu de toegevoegde voerstralen OP en OQ gegeven, dan vindt men derhalve de assen door de volgende constructie: Laat uit het punt P de loodlijn PQ_1 op OQ neer, verleng Q_1P met een stuk PC gelijk aan OQ en leg een cirkel door O, C en Q_1. De uiteinden A_1 en B_1 der door P in dien cirkel getrokken middellijn liggen op de assen der ellips; de stukken PA_1 en PB_1 zijn de op OB en OA af te zetten voerstralen.

Opmerking van C. van Aller. Men kan elke ellips op twee wijzen beschreven denken door een punt van het vlak van een cirkel met tweemaal grooteren straal. In het eene geval, het geval van fig. 1, is de middellijn van den rollenden cirkel $= a + b$ en ligt het beschrijvende punt P *binnen* dezen cirkel; in het tweede geval is de middellijn van den rollenden cirkel $= a - b$ en ligt het beschrijvende punt *buiten* den cirkel. De laatste beschouwing geeft aanleiding tot een tweede constructie voor de richting en de grootte der assen als twee toegevoegde middellijnen gegeven zijn en die in fig. 2 is uitgevoerd. De constructie stemt geheel overeen met de voorgaande; ze wijkt er slechts in zooverre van af, dat de halve middellijn OQ van uit het punt P op de loodlijn, die uit P op OQ is getrokken, in de tegengestelde richting van zooeven is afgezet.

Hieruit blijkt tevens dat het onnoodig is de *richting* te omschrijven waarin OQ op de loodlijn PQ_1 moet worden afgezet, daar zoowel aan de eene, als aan de andere richting een constructie voor de assen van de ellips beantwoordt.

Vraagstuk XLII.

K 2 d. Door een punt P in het vlak van driehoek ABC, waarvan $A_1B_1C_1$ de eerste driehoek van Brocard is, trekt men, evenwijdig met AA_1, BB_1, CC_1, drie rechten die BC, CA, AB in A′, B′, C′ snijden. Bepaal de meetkundige plaats van P voor het geval, dat A′, B′, C′ in één rechte liggen. (Dr. H van Aubel.)

Opgelost *door* T. J. Allersma, Dr. H. van Aubel, Dr. A. J. A. Prange *en* F. Schuh.

Oplossing *van* F. SCHUH.

1. De punten A_1, B_1 en C_1 vormen een barycentrische groep. We zullen het vraagstuk uitbreiden door voor A_1, B_1 en C_1 een willekeurig barycentrisch drietal te nemen, waarvan de barycentrische coördinaten zijn $A_1\,(p, r, q)$, $B_1\,(r, q, p)$, $C_1\,(q, p, r)$. Zijn x, y en z de loopende barycentrische coördinaten, dan is de vergelijking van de lijn AA_1

$$qy = rz,$$

terwijl, daar $x + y + z = 0$ de lijn in het oneindige voorstelt, het oneigenlijke punt van AA_1 tot coördinaten heeft

$$-(q + r),\ r,\ q.$$

Zijn ξ, η, ζ de barycentrische coördinaten van P, dan is de vergelijking der lijn PA′

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \\ -(q+r) & r & q \end{vmatrix} = 0.$$

Voor de coördinaten p_1, q_1, r_1 van het punt A′ heeft men dus

$$p_1 : q_1 : r_1 = 0 : \{\xi r + \eta(q + r)\} : \{\xi q + \zeta(q + r)\},$$

en voor de barycentrische coördinaten van B′ en C′

$$p_2 : q_2 : r_2 = \{\eta r + \xi(p + r)\} : 0 : \{\eta p + \zeta(p + r)\},$$
$$p_3 : q_3 : r_3 = \{\zeta q + \xi(p + q)\} : \{\zeta p + \eta(p + q)\} : 0.$$

De punten A′, B′ en C′ liggen op één rechte, als voldaan wordt aan

$$\begin{vmatrix} 0 & , \xi r + \eta(q + r) & , \xi q + \zeta(q + r) \\ \eta r + \xi(p + r) & , 0 & , \eta p + \zeta(p + r) \\ \zeta q + \xi(p + q) & , \zeta p + \eta(p + q) & , 0 \end{vmatrix} = 0,$$

of aan

$$(pq + qr + rp)(\xi + \eta + \zeta)\{(p + q)\xi\eta + (q + r)\eta\zeta + (r + p)\zeta\xi\} = 0.$$

Hieraan is voor ieder punt P voldaan, als $pq + qr + rp = 0$ is, dus als de punten A_1, B_1 en C_1 op de ellips van STEINER liggen. Is dit niet het geval, dan liggen de punten A′, B′ en C′ op één rechte, als

$$\xi + \eta + \zeta = 0 \text{ of als } (p+q)\xi\eta + (q+r)\eta\zeta + (r+p)\zeta\xi = 0 \text{ is.}$$

De meetkundige plaats van P bestaat dus uit de lijn in het oneindige en uit een kegelsnede door de punten A, B en C.

Dat de lijn in het oneindige tot de meetkundige plaats behoort, was te voorzien, want als P in het oneindige ligt, zullen ook A′, B′ en C′ in het oneindige, dus op één rechte liggen. Dat de meetkundige plaats de punten A, B en C bevat, was ook te voorzien, want als P in A ligt, komen ook B′ en C′ in A en liggen A′, B′ en C′ op één rechte.

2. Als men aan p, q en r verschillende waarden geeft, kan men alle kegelsneden door A, B en C verkrijgen. Immers men vindt de kegelsnede

$$l\eta\zeta + m\zeta\xi + n\xi\eta = 0$$

door te stellen

$$p : q : r = (-l + m + n) : (l - m + n) : (l + m - n).$$

De kegelsneden, die men voor verschillende barycentrische drietallen verkrijgt, vormen dus een net met de basispunten A, B en C.

De kegelsnede is een ellips, als de snijpunten met de lijn in het oneindige $\xi + \eta + \zeta = 0$ onbestaanbaar zijn, dus voor

$$qr + rp + pq > 0,$$

d. w. z. als de punten A_1, B_1 en C_1 binnen de ellips van STEINER liggen.

3. Zijn A_1, B_1 en C_1 de hoekpunten van den eersten driehoek van BROCARD, dan is

$$p : q : r = (\beta + \gamma) : (\gamma + \alpha) : (\alpha + \beta) = a^2 : b^2 : c^2,$$

waarin α, β en γ de cotangenten van de hoeken en a, b en c de zijden van driehoek ABC voorstellen. Behalve de lijn in het oneindige wordt dan de meetkundige plaats

$$(2\alpha + \beta + \gamma)\,\eta\zeta + (\alpha + 2\beta + \gamma)\,\zeta\xi + (\alpha + \beta + 2\gamma)\,\xi\eta = 0$$

of

$$(b^2 + c^2)\,\eta\zeta + (c^2 + a^2)\,\xi\zeta + (a^2 + b^2)\,\xi\eta = 0.$$

Nu heeft men

$$qr + rp + pq < 0,$$

zoodat de kegelsnede een ellips is. Haar middelpunt heeft tot coördinaten

$$a^2(b^2+c^2) : b^2(c^2+a^2) : c^2(a^2+b^2),$$

is dus het midden der rechte van BROCARD.

OPMERKING. De meetkundige plaats is de omgeschreven cirkel $a^2\eta\zeta + b^2\zeta\xi + c^2\xi\eta = 0$ van driehoek ABC, als voldaan wordt aan $(q+r):(r+p):(p+q) = a^2 : b^2 : c^2 = (\beta+\gamma):(\gamma+\alpha):(\alpha+\beta)$, of aan $p : q : r = \alpha : \beta : \gamma$.

Vraagstuk XLIII.

K 8 a. I_1, I_2, I_3, I_4 zijn de middelpunten der vierkanten $A_1A_2B_1C_1$, $A_2A_3B_2C_2$, $A_3A_4B_3C_3$, $A_4A_1B_4C_4$, die buitenwaarts beschreven worden op de zijden van vierhoek $A_1A_2A_3A_4$.

Te bewijzen, dat de som der vierkanten op de zijden van $I_1I_2I_3I_4$ gelijk is aan de som der vierkanten op de zijden van $A_1A_2A_3A_4$ vermeerderd met het viervoud van den inhoud van $A_1A_2A_3A_4$, terwijl de som der vierkanten op de diagonalen van $B_1B_2B_3B_4$ gelijk is aan het drievoud van de som der vierkanten op de diagonalen van $A_1A_2A_3A_4$ vermeerderd met het achtvoud van den inhoud van $A_1A_2A_3A_4$. (Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, J. A. BARRAU, E. D. J. DE JONGH Jr. *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* F. SCHUH.

1. We noemen de voetpunten der loodlijnen uit I_1, I_2, I_3 en I_4 op de bijbehoorende zijden van vierhoek $A_1A_2A_3A_4$ neergelaten, M_1, M_2, M_3 en M_4, en de hoeken van genoemden vierhoek α_1, α_2, α_3 en α_4. Om I_1I_2 te vinden, beschouwen we de gebroken lijn $I_1M_1A_2M_2I_2$. Haar projectie op de lijn I_1M_1 is gelijk aan

$$\tfrac{1}{2}(a_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_2 \cos \alpha_2),$$

haar projectie op A_1A_2 aan

$$\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2 \cos \alpha_2 + a_2 \sin \alpha_2).$$

waarin $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3$, $a_3 = A_3A_4$ en $a_4 = A_4A_1$ is. Men vindt dus

$$\overline{I_1I_2}^2 = \tfrac{1}{4}(a_1 + a_2 \sin a_2 + a_2 \cos a_2)^2 + \tfrac{1}{4}(a_1 - a_2 \cos a_2 + a_2 \sin a_2)^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \sin a_2) = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2^2) + 2 \text{ inh. } A_1A_2A_3.$$

Door cyclische letterverschuiving en optelling vindt men hieruit

$$\overline{I_1I_2}^2 + \overline{I_2I_3}^2 + \overline{I_3I_4}^2 + \overline{I_4I_1}^2 = a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 + 4 \text{ inh. } A_1A_2A_3A_4.$$

2. Om B_1B_3 te vinden, projecteeren we de gebroken lijn $B_1A_2A_4B_3$ op A_2A_4 en op een richting loodrecht op A_2A_4. Zijn D_1 en D_3 de voetpunten der loodlijnen uit A_1 en A_3 op A_2A_4 neergelaten, dan zijn de projecties der bedoelde gebroken lijn gelijk aan $A_1D_1 + A_2A_4 + A_3D_3$ en $A_2D_1 + D_3A_4 = A_2A_4 - D_1D_3$. Bij de laatste projectie moet op het teeken gelet worden. Men vindt nu

$$\overline{B_1B_3}^2 = (A_1D_1 + A_2A_4 + A_3D_3)^2 + (A_2A_4 - D_1D_3)^2 =$$
$$= 2\overline{A_2A_4}^2 + (A_1D_1 + A_3D_3)^2 + \overline{D_1D_3}^2 + 2\overline{A_2A_4}(A_1D_1 + A_3D_3) -$$
$$- 2\overline{A_2A_4} \cdot \overline{D_1D_3} =$$
$$= 2\overline{A_2A_4}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + 4 \text{ inh. } A_1A_2A_3A_4 - 2\overline{A_2A_4} \cdot \overline{D_1D_3}.$$

Door alle indices cyclisch één te verschuiven vindt men nog

$$\overline{B_2B_4}^2 = 2\overline{A_3A_1}^2 + \overline{A_2A_4}^2 + 4 \text{ inh. } A_1A_2A_3A_4 - 2\overline{A_3A_1} \cdot \overline{D_2D_4},$$

waarin D_2 en D_4 de projecties van A_2 en A_4 op A_1A_3 voorstellen, en D_2D_4 positief gerekend wordt van A_3 naar A_1. Door optelling vindt men

$$\overline{B_1B_3}^2 + \overline{B_2B_4}^2 = 3(\overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_2A_4}^2) + 8 \text{ inh. } A_1A_2A_3A_4 -$$
$$- 2(\overline{A_2A_4} \cdot \overline{D_1D_3} + \overline{A_3A_1} \cdot \overline{D_2D_4}).$$

Nu is $\overline{A_2A_4} \cdot \overline{D_1D_3} = -\overline{A_3A_1} \cdot \overline{D_2D_4} = \overline{A_2A_4} \cdot \overline{A_1A_3} \cos A_3EA_4$, waarin E het snijpunt der diagonalen A_1A_3 en A_2A_4 voorstelt. Men vindt dus

$$\overline{B_1B_3}^2 + \overline{B_2B_4}^2 = 3(\overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_2A_4}^2) + 8 \text{ inh. } A_1A_2A_3A_4.$$

Vraagstuk XLIV.

K 1 d. Uit een punt P van het vlak van driehoek ABC trekt men drie rechten evenwijdig aan de zijden BC, CA, AB. De

medianen AD, BE, CF worden door de eerste in A_1, A_2, A_3, door de tweede in B_3, B_1, B_2, door de derde in C_2, C_3, C_1 gesneden. Te bewijzen

a) dat de driehoeken $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ elk viermaal zoo groot zijn als $A_1B_1C_1$;

b) dat de driehoeken $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ABC gelijken inhoud hebben als P op de ellips van STEINER ligt.

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, J. A. BARRAU, Dr. A. J. A. PRANGE *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

1. Daar (fig. 3) A_2A_3 evenwijdig met BC en D het midden is van BC, is A_1 het midden van A_2A_3.

Daar verder

$$\triangle PA_1B_3 \sim \triangle CDA \text{ en } \triangle PA_1C_2 \sim \triangle BDA,$$

zoo is

$$PA_1 : CD = A_1B_3 : DA \text{ en } PA_1 : BD = A_1C_2 : DA;$$

en daar CD = BD is, volgt hieruit

$$A_1B_3 = A_1C_2.$$

Hieruit blijkt, dat

A_1 is het midden van A_2A_3 en van B_3C_2,
B_1 is het midden van B_2B_3 en van C_3A_2,
C_1 is het midden van C_2C_3 en van A_3B_2.

Dus is

$$B_1A_1 \parallel B_2C_2 \text{ en } B_2C_2 = 2A_1B_1,$$
$$C_1B_1 \parallel C_2A_2 \text{ en } C_2A_2 = 2B_1C_1,$$
$$A_1C_1 \parallel A_2B_2 \text{ en } A_2B_2 = 2C_1A_1.$$

Bijgevolg heeft men

$$\triangle B_2C_2A_2 \sim \triangle A_1B_1C_1 \text{ en } \triangle A_2B_2C_2 = 4 \triangle A_1B_1C_1.$$

Evenzoo

$$\triangle C_3A_3B_3 \sim \triangle A_1B_1C_1 \text{ en } \triangle A_3B_3C_3 = 4 \triangle A_1B_1C_1.$$

Dus

$$\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_3B_3C_3 = 4 \triangle A_1B_1C_1.$$

2. Een $\triangle$ ABC en de ellips van STEINER kunnen beschouwd worden als de projecties van een gelijkzijdigen $\triangle\, abc$ (fig. 4) en den omgeschreven cirkel; de zwaartelijnen AD, BE, CF van $\triangle$ ABC zijn tevens de projecties der zwaartelijnen ad, be, cf van $\triangle\, abc$.

Zijn verder A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 de projecties van a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3; g, h, i de punten waarin pa_1, pb_1, pc_1 den cirkel andermaal snijden, dan zijn a_1, b_1, c_1 de middens van pg, ph, pi; derhalve is

$$\triangle\, ghi = 4 \triangle\, a_1 b_1 c_1.$$

Verder is

$$\text{boog } ih = 2 \angle iph = 120^\circ \text{ en boog } gh = 2 \angle gph = 120^\circ,$$

bijgevolg is $\triangle\, ghi \cong \triangle\, abc$ en $\triangle\, abc = 4 \triangle\, a_1 b_1 c_1$.

Nu is ook

$$\triangle\, \mathrm{ABC} = 4 \triangle\, \mathrm{A_1B_1C_1},$$

dus volgens 1.

$$\triangle\, \mathrm{A_2B_2C_2} = \triangle\, \mathrm{A_3B_3C_3} = \triangle\, \mathrm{ABC}.$$

Vraagstuk XLV.

M¹ 1 b. Twee gelijke cirkels worden zoo geplaatst, dat de gemeenschappelijke inwendige raaklijnen hoeken van 45° met de lijn der middelpunten maken. Deze cirkels stellen een meridiaandoorsnede van een torus voor. Verder is gegeven een omwentelingscylinder, die een der genoemde raaklijnen tot beschrijvende lijn heeft, terwijl zijn as door het middelpunt van een der cirkels gaat.

Onderzoek de bijzondere punten der projectie van de snijkromme dezer oppervlakken op een vlak dat de as van den torus loodrecht snijdt, en op een vlak evenwijdig met hun assen.

(Dr. J. CARDINAAL.)

Oplossing *van* F. SCHUH.

Wij nemen de as van den torus als X as van een rechthoekig coördinatenstelsel aan, de verbindingslijn der middelpunten M_1 en M_2 der beide cirkels als Y-as, zoo dat M_1 op de positieve Y-as ligt en de Z-as loodrecht op beide. Is r de straal der

gegeven cirkels, dan wordt de vergelijking van den torus

$$\phi(x, y, z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^2 - 8r^2(y^2 + z^2) = 0. \quad . \quad . \quad 1)$$

Gaat de as van den cylinder door M_1, gelijke hoeken met de positieve X- en Y-as makend, dan wordt de vergelijking van den cylinder

$$\psi(x, y, z) \equiv (x - y)^2 + 2(x - y) r \sqrt{2} + 2z^2 = 0. \quad . \quad . \quad 2)$$

De beschrijvende lijn door den oorsprong O raakt den cirkel (M_1) in A_1 en den cirkel (M_2) in A_2; de andere beschrijvende lijn in het vlak XOY raakt alleen den cirkel M_1 in een punt B.

De projectie der snijkromme op het vlak YOZ wordt gevonden door uit 1) en 2) x te elimineeren, en is, evenals de ruimtekromme zelf, van den 8sten graad. De projectie op het vlak XOY vindt men door z te elimineeren; dit geeft een kromme van den 4den graad, die dubbel geteld moet worden, daar de ruimtekromme symmetrisch is ten opzichte van het XOY-vlak; er zijn nu parasitische gedeelten dier projectie te verwachten.

De projectie op YOZ. Op drie verschillende wijzen kunnen bijzondere punten in die projectie ontstaan.

A. *De ruimtekromme zelf heeft een bijzonder punt* P. Dit kan ontstaan doordat een der beide oppervlakken een bijzonder punt heeft, of doordat beide oppervlakken elkaar raken.

a. Een der oppervlakken heeft een bijzonder punt. De cylinder heeft een bijzonder punt in het oneindige van zijn as; dit ligt echter niet op den torus. De torus heeft den imaginairen bolcirkel tot dubbelkromme. Van dien cirkel bevat de cylinder alleen de snijpunten met een vlak, loodrecht op zijn as; dit zijn de cyclische punten van het vlak $x + y = 0$. De raakvlakken in die punten aan den cylinder zijn de vlakken door zijn as en de isotrope lijnen van het vlak $x + y = 0$, welke die as snijden, dus de beide minimaalvlakken door die as. Daar de cylinder den bolcirkel in die punten raakt, heeft de ruimtekromme daar tangentiëele punten. De raaklijnen in die bijzondere punten liggen in de minimaalvlakken door de as van den cylinder, en loopen dus noch aan de X-as, noch aan de Z-as evenwijdig, zoodat ook de projectie op YOZ in de imaginaire projecties dier cyclische punten twee tangentieele punten heeft. De cyclische punten projecteeren zich op XOY

als de punten in het oneindige van de lijn $x + y = 0$; de projectie op XOY heeft dus een gewoon dubbelpunt in het oneindige met twee verschillende asymptoten. Dit dubbelpunt ligt op het parasitisch gedeelte dier projectie, daar het ontstaan is uit onbestaanbare punten der ruimtekromme.

b. De beide oppervlakken raken elkaar in een punt P. De normalen van den torus snijden de as van den torus, en de normalen van den cylinder de as van den cylinder. Vallen de normalen samen, dan liggen ze dus òf in het vlak door beide assen, dus in XOY, òf gaan door het snijpunt C dier assen. Ligt de gemeenschappelijke normaal in XOY, dan is P een der raakpunten van de doorsneden van XOY met torus en cylinder, dus een der punten A_1, A_2 en B. Gaat de gemeenschappelijke normaal door C, dan ligt P in een vlak door C loodrecht op de as van den cylinder. Het punt P kan dan niets anders zijn dan A_2.

De eenige door raking gevormde bijzondere punten der ruimtekromme zijn dus $A_1\,(\frac{1}{2}r\sqrt{2}, \frac{1}{2}r\sqrt{2}, 0)$, $A_2\,(-\frac{1}{2}r\sqrt{2}, -\frac{1}{2}r\sqrt{2}, 0)$ en $B\,(-\frac{1}{2}r\sqrt{2}, \frac{3}{2}r\sqrt{2}, 0)$.

Om het punt A_1 te onderzoeken verleggen we den oorsprong naar A_1 door de substitutie

$$x = x' + \tfrac{1}{2}r\sqrt{2} \quad , \quad y = y' + \tfrac{1}{2}r\sqrt{2} \quad , \quad z = z'.$$

Is het ons alleen om de raaklijnen in A_1 te doen, dan kunnen we de termen van den 3den en hoogeren graad verwaarloozen. Vergelijking 1) levert dan

$$3x'^2 - y'^2 - 2z'^2 + 2x'y' + 2r(x' - y')\sqrt{2} = 0 \quad . \; . \; . \; a).$$

Uit 2) volgt

$$x - y = r(\sqrt{2})\left\{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3).$$

Daar $x - y$ en z in de nabijheid van A_1 klein zijn, moet het positieve teeken worden gekozen, zoodat men bij benadering vindt

$$x' = y' - \tfrac{1}{2}\frac{z'^2}{r}\sqrt{2},$$

terwijl a) levert

$$y'^2 - z'^2 = 0.$$

Hieruit ziet men, dat de raaklijnen in de projectie van A_1 op YOZ gelijke hoeken met de Y- en Z-as maken. De projectie op XOY heeft in de projectie van A_1 geen dubbelpunt, omdat de projecties der beide takken samenvallen; de raaklijn in de projectie van A_1 maakt gelijke hoeken met de positieve X- en Y-as, en gaat dus door O.

Om A_2 te onderzoeken, substitueeren we

$$x = x' - \tfrac{1}{2} r \sqrt{2} \quad , \quad y = y' - \tfrac{1}{2} r \sqrt{2} \quad , \quad z = z',$$

waardoor vergelijking 1) levert

$$3x'^2 - y'^2 - 2z'^2 + 2x'y' - 2r(x' - y')\sqrt{2} = 0,$$

hetgeen in verband met $x' = y' - \frac{1}{2}\frac{z'^2}{r}\sqrt{2}$ levert

$$y'^2 = 0.$$

De raaklijnen in het dubbelpunt vallen dus samen, en loopen evenwijdig aan de Z-as. Om dit punt nader te onderzoeken zullen we ook de termen van den 3^{den} en 4^{den} graad behouden, daarbij echter steeds x' en y' tegenover z' verwaarloozen. Uit 3) volgt nu

$$x' = y' - \frac{z'^2\sqrt{2}}{2r}\left(1 + \frac{z'^2}{4r^2}\right),$$

waardoor vergelijking 1) levert

$$8r^2y'^2 - 12z'^2y'r\sqrt{2} + 7z'^4 = 0,$$

zoodat men vindt

$$2ry'\sqrt{2} = 3z'^2 \pm z'^2\sqrt{2} = z'^2(3 \pm \sqrt{2}).$$

Hieruit ziet men, dat door het dubbelpunt twee bestaanbare takken gaan, die elkaar raken.

Om B te onderzoeken substitueeren we

$$x = x' - \tfrac{1}{2} r \sqrt{2} \quad , \quad y = y' + \tfrac{3}{2} r \sqrt{2} \quad , \quad z' = z.$$

Nu volgt uit 3)

$$x' - y' = r(\sqrt{2})\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{z'^2}{r^2}}\right).$$

Daar $x' - y'$ en z' klein zijn, moet het negatieve teeken gekozen worden, zoodat men bij benadering vindt

$$x' = y' + \tfrac{1}{2}\frac{z'^2}{r}\sqrt{2}.$$

Door deze substituties levert 1)

$$3y'^2 - z'^2 = 0,$$

zoodat door B twee bestaanbare takken gaan. De projectie op YOZ heeft dus in de projectie van B een gewoon dubbelpunt. Daarentegen geeft de projectie op XOY geen bijzonder punt, omdat de projecties der beide takken samenvallen; de raaklijn in de projectie van B maakt gelijke hoeken met de positieve X- en Y-as.

B. *De raaklijn aan de ruimtekromme in een punt* P *loopt evenwijdig aan de* X-*as.* Dit is het geval als de raakvlakken aan beide oppervlakken in P evenwijdig aan de X-as loopen, hetgeen alleen dan geschiedt, als P op den grootsten of den kleinsten parallelcirkel van den torus ligt, en tegelijkertijd op een van twee diametraal tegenover elkaar gelegen beschrijvende lijnen van den cylinder; daar deze echter de bovengenoemde cirkels niet snijden, is er geen punt P, waar de raaklijn evenwijdig aan de X-as loopt.

C. *Twee verschillende punten van de ruimtekromme hebben dezelfde projectie op* YOZ. De vraag is nu voor welke waarden van y en z de twee wortels x van de vergelijking $\psi = 0$ tevens aan $\phi = 0$ voldoen. Beschouwen we alleen de bestaanbare dubbelpunten, die zoo ontstaan, dan is de vraag gemakkelijk te beantwoorden. Een bestaanbare rechte evenwijdig aan de X-as snijdt den torus in twee paar symmetrisch ten opzichte van YOZ gelegen punten, waarvan òf één paar bestaanbaar is, en het andere door toegevoegd onbestaanbare punten gevormd wordt, òf beide paren uit toegevoegd onbestaanbare punten bestaan. Ligt nu zulk een onbestaanbaar snijpunt met den torus tevens op den cylinder, dan is dit ook het geval met het toegevoegd onbestaanbare punt; hieruit volgt, dat als een paar snijpunten met den torus tevens op den cylinder ligt, dit een paar punten zijn moet symmetrisch ten opzichte van YOZ. Dergelijke puntenparen liggen echter alleen dan op den cylinder als $y = r\sqrt{2}$ is.

Nu snijdt het vlak $y = r\sqrt{2}$ den torus volgens

$$(x^2 + z^2 + 3r^2)^2 - 8r^2(z^2 + 2r^2) = 0,$$

en den cylinder volgens

$$x^2 + 2z^2 - 2r^2 = 0.$$

Voor de snijpunten van deze doorsneden is nu

$$z^4 - 18r^2z^2 + 9r^4 = 0,$$

of

$$z = \pm r(\sqrt{6} \pm \sqrt{3}).$$

De projectie der ruimtekromme op YOZ heeft dus vier dubbelpunten op de lijn $y = r\sqrt{2}$, die door M_1 evenwijdig aan de Z-as loopt. De punten

$$y = r\sqrt{2} \quad , \quad z = \pm r(\sqrt{6} - \sqrt{3})$$

zijn projecties van bestaanbare puntenparen der ruimtekromme; door hen gaan dus twee bestaanbare takken. De punten

$$y = r\sqrt{2} \quad , \quad z = \pm r(\sqrt{6} + \sqrt{3})$$

zijn projecties van toegevoegd onbestaanbare puntenparen; zij zijn dus geïsoleerde punten der projectie.

Verder heeft de projectie op YOZ nog onbestaanbare dubbelpunten, die de projecties zijn van twee verschillende, niet toegevoegde, onbestaanbare punten der ruimtekromme. Om deze te vinden hebben we de voorwaarden op te schrijven, dat de twee wortels x van 1) ook voldoen aan 2), dus dat $\phi(x, y, z)$ deelbaar is door $\psi(x, y, z)$, wanneer beide als functies van x beschouwd worden. Schrijft men 1) en 2) in de vormen

$$x^4 + Cx^2 + D = 0, \quad x^2 + Ax + B = 0,$$

dan zijn deze voorwaarden

$$A(C - 2B + A^2) = 0 \quad \text{en} \quad D - B(C - B + A^2) = 0.$$

Hieraan wordt voldaan door

$$A = 0 \quad , \quad D - BC + B^2 = 0,$$

en door

$$C = 2B - A^2 \quad , \quad D = B^2.$$

In het eerste geval vindt men

$$y = r\sqrt{2} \quad \text{en} \quad z^4 - 18r^2z^2 + 9r^4 = 0,$$

dus de boven gevonden bestaanbare dubbelpunten.

In het tweede geval vindt men

$$z^2 = 2y^2 - 2yr\sqrt{2} + 5r^2$$

en

$$3z^4 + 2y^2z^2 - 4y^3r\sqrt{2} - 8yz^2r\sqrt{2} + 14y^2r^2 + 6z^2r^2 - r^4 = 0,$$

dus na eliminatie van z,

$$2y^4 - 6y^3r\sqrt{2} + 19y^2r^2 - 14yr^3\sqrt{2} + 13r^4 = 0.$$

Men vindt dus acht onbestaanbare dubbelpunten, die twee aan twee symmetrisch liggen ten opzichte van de Y-as, en toegevoegd imaginair zijn.

De projectie op YOZ heeft dus in het geheel 17 bijzondere punten, waarvan drie dubbel moeten geteld worden; ze is derhalve van het geslacht drie.

De projectie op XOY. Door eliminatie van z^2 uit 1) en 2) vindt men voor haar de vergelijking

$$(x+y)^4 - 4(x+y)^2(x-y)r\sqrt{2} + 4(7x^2 - y^2 - 10xy)r^2 + 24(x-y)r^3\sqrt{2} + 4r^4 = 0.$$

De vergelijking laat zich vereenvoudigen door de substitutie

$$x = \tfrac{1}{2}(\xi + \eta)\sqrt{2}, \quad y = \tfrac{1}{2}(-\xi + \eta)\sqrt{2}.$$

Men vindt dan

$$\eta^4 - 4\eta^2\xi r + 2(4\xi^2 - \eta^2 + 4\xi\eta)r^2 + 12\xi r^3 + r^4 = 0.$$

De bijzondere punten dier kromme ontstaan nu weer op drie manieren:

A. *Uit de bijzondere punten der ruimtekromme.*

De cyclische punten der ruimtekromme leveren het punt in het oneindige op de lijn $x + y = 0$, of $\eta = 0$. Dit punt wordt een bijzonder punt, waarvan de beide raaklijnen met de lijn in het oneindige samenvallen. De beide takken zijn echter onbestaanbaar. Immers verwaarloost men de termen, die klein zijn ten opzichte van andere, die men behoudt, als men bedenkt dat ξ groot is ten opzichte van η, dan wordt de vergelijking $\eta^4 - 4\eta^2\xi r + 8\xi^2r^2 = 0$ verkregen, of $\eta^2 = 2\xi r(1 \pm i)$, waaraan niet door bestaanbare waarden voldaan kan worden.

Men heeft dus een geisoleerd punt, waar twee toegevoegd onbestaanbare takken elkaar aanraken.

De dubbelpunten A_1 en B der ruimtekromme geven op XOY geen bijzondere punten, daar de projecties van beide takken samenvallen, en geen der beide raaklijnen in het dubbelpunt evenwijdig aan de Z-as loopt. Anders is het daarentegen met

het punt A_2 ($x = y = -\frac{1}{2} r \sqrt{2}$; $\xi = 0$, $\eta = -r$); beide raaklijnen in A_2 loopen evenwijdig aan de Z-as, staan dus loodrecht op het vlak van projectie, zoodat in de projectie een bijzonder punt te verwachten is. Om dit punt te onderzoeken, substitueeren we $\xi = \xi'$, $\eta = -r + \eta'$.

Dan wordt

$$\eta'^4 - 4\eta'^3 r - 4\xi\eta'^2 r + 4r^2(\eta'^2 + 2\xi^2 + 4\xi\eta') = 0,$$

waaruit men terstond afleidt, dat de raaklijnen in het dubbelpunt bestaanbaar en verschillend zijn.

B. *De raaklijn aan de ruimtekromme in een punt* P *loopt evenwijdig aan de* Z-*as*. Dan loopen de raakvlakken in P aan torus en cylinder evenwijdig met de Z-as, hetgeen alleen het geval is als P in XOY ligt, dus een der snijpunten van de meridiaankrommen van torus en cylinder is. Deze gemeenschappelijke punten zijn de punten A_1, A_2 en B, die we reeds onderzocht hebben, en verder de twee imaginaire snijpunten van de beschrijvende lijn door B met den cirkel (M_2). Daar de tak door B symmetrisch is ten opzichte van XOY, heeft de projectie op XOY in B geen bijzonder punt. Evenmin geven de genoemde imaginaire punten dubbelpunten der projectie.

C. *Twee verschillende punten der ruimtekromme, niet symmetrisch gelegen ten opzichte van het* X-Y-*vlak, hebben dezelfde projectie op* XOY. Dit geval kan zich niet voordoen, daar een lijn evenwijdig aan de Z-as den cylinder slechts in twee punten snijdt, die symmetrisch ten opzichte van XOY liggen.

In het geheel vinden we dus een dubbel te tellen en een gewoon dubbelpunt; de projectie op XOY is dus een kromme van het geslacht nul.

Vraagstuk XLVI.

M¹ 5 c. Een rechte hoek, waarvan het hoekpunt met het dubbelpunt van een folium van DESCARTES samenvalt, wentelt om zijn hoekpunt. Bepaal de omhullende van de verbindingslijn der snijpunten van de beenen met de kromme. (Dr. J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, T. J. ALLERSMA, H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH, M. J. VAN UVEN, Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* M. J. VAN UVEN *en* Dr. J. DE VRIES.

Wanneer de dubbelpuntsraaklijnen van een rationale kubische kromme loodrecht op elkander staan, dan vormen de beide in het dubbelpunt gelegen punten D_1 en D_2 een paar van de quadratische involutie, welke de beenen van een om het dubbelpunt wentelenden rechten hoek op de kromme bepalen.

Is P_1, P_2 een paar dier involutie, S het snijpunt der kromme met de rechte P_1P_2, dan snijdt de stralenbundel, die S tot top heeft, op de kromme een involutie in, waarvan P_1, P_2 en D_1, D_2 twee paren zijn Deze involutie verschilt dus niet van de eerst genoemde, zoodat de rechten, welke elk een paar X_1, X_2 dragen, door een punt der kromme moeten gaan.

Bij het folium van DESCARTES wordt een paar der bedoelde involutie gevormd door het raakpunt der asymptoot en het punt S op de lus dat op gelijke afstanden van de dubbelpuntsraaklijnen ligt. Daar de verbindingslijn dier punten de kromme in het punt S aanraakt, is S tevens de omhullende der rechten X_1X_2.

OPMERKING. Een willekeurige quadratische involutie op een rationale kubische kromme heeft tot „directiekromme" (omhullende der verbindingsrechten van puntenparen) een kegelsnede. Hier ontaardt deze omhullende in twee punten, n.l. het punt S en het dubbelpunt (immers de rechte D_1D_2 is onbepaald).

Oplossing *van* C. VAN ALLER, T. J. ALLERSMA, H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH *en* Dr. H. DE VRIES.

De kromme wordt op rechthoekige assen voorgesteld door de vergelijking

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

De rechte $y = \lambda x$ snijdt haar in 3 punten, waarvan de abscissen bepaald worden door

$$(1 + \lambda^3)\, x^3 - 3a\lambda x^2 = 0.$$

Ziet men van de beide wortels $x = 0$ af, dan vindt men dus

$$x = \frac{3a\lambda}{1 + \lambda^3} \quad , \quad \text{en hieruit} \quad y = \frac{3a\lambda^2}{1 + \lambda^3}.$$

Als men hierin λ vervangt door $-\frac{1}{\lambda}$, vindt men voor het niet met O samenvallende snijpunt der kromme met de rechte $\lambda y = -x$, die in O loodrecht staat op $y = \lambda x$,

$$x = \frac{3a\lambda^2}{1-\lambda^3} \text{ en } y = -\frac{3a\lambda}{1-\lambda^3}.$$

De verbindingslijn dezer beide punten heeft tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3a\lambda & 3a\lambda^2 & 1+\lambda^3 \\ 3a\lambda^2 & -3a\lambda & 1-\lambda^3 \end{vmatrix} = 0,$$

of, na deeling door $3a\lambda(1+\lambda^2)$,

$$(1+\lambda-\lambda^2)x - (1-\lambda-\lambda^2)y - 3a\lambda = 0.$$

In deze vergelijking komt λ in de tweede macht voor, zoodat het schijnt of door ieder punt twee verbindingslijnen gaan, en deze dus een kegelsnede omhullen. Men ziet echter gemakkelijk in dat de vergelijking onveranderd blijft indien men λ door $-\frac{1}{\lambda}$ vervangt; maar deze beide waarden behooren bij de beenen van eenzelfden rechten hoek, en geven dus aanleiding tot slechts één verbindingslijn.

De gezochte omhullende is dus een punt, en wel, zooals gemakkelijk blijkt, het op de kromme gelegen punt $x = y = \frac{3}{2}a$.

Vraagstuk XLVII.

K 8 b. Zooals bekend is, gaan de omgeschreven cirkels der vier driehoeken welke elk door drie zijden van een vierhoek bepaald worden, door één punt F, dat met de middelpunten dier cirkels door een cirkel φ wordt verbonden. Is de gegeven vierhoek in een cirkel ψ beschreven, dan ligt F in één rechte met de snijpunten der overstaande zijden. Men vraagt te bewijzen dat dan ook het middelpunt van ψ op den cirkel φ ligt. (C. A. CIKOT.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, H. BREMEKAMP, C. A. CIKOT, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, E. D. J. DE JONGH JR. *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* E. D. J. DE JONGH Jr.

1. Zij (fig. 5) ABCD de gegeven koordenvierhoek, M het middelpunt van ψ. Cirkel ϕ is bepaald door de middelpunten N en O en het punt F. Verbinden wij F met E en G, dan is $\angle CFE = \angle ABC$ en $\angle CFG = \angle ADC$, dus $\angle CFE + \angle CFG = 180°$ en de punten E, F, G liggen in een rechte.

2. Daar MN en MO achtereenvolgens loodrecht staan op BC en CD, is $\angle M = 180° - \angle BCD$. Verder heeft men $\angle EFN = 90° - \frac{1}{2}\angle ENF = 90° - \angle ECF$; evenzoo $\angle GFO = 90° - \angle GCF$. Dus is $\angle NFO = \angle ECF + \angle GCF = \angle BCD = 180° - \angle M$; hieruit volgt dat cirkel ϕ ook door M gaat.

Vraagstuk XLVIII.

K 13 c γ. Als er een bol bestaat, die drie in een vlak gelegen ribben van een viervlak en de verlengden der overige ribben aanraakt, dan bezit dat viervlak de volgende eigenschappen:

a) de verschillen der overstaande ribben zijn even groot;

b) de verschillen der overstaande standhoeken zijn even groot;

c) de verbindingslijnen der raakpunten van overstaande ribben gaan door één punt;

d) door één punt gaan ook de vier rechten, die elk een hoekpunt verbinden met het snijpunt der rechten, die, in het overstaande zijvlak, elk een hoekpunt vereenigen met het punt waar de overstaande zijde den ingeschreven (aangeschreven) cirkel aanraakt.

(C. A. CIKOT.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, C. A. CIKOT, E. D. J. DE JONGH Jr., J. C. DE MASIER, F. SCHUH *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing.

1. Als a, b, c, d de lengten der raaklijnen voorstellen uit A, B, C, D aan den bedoelden bol getrokken, en deze den ingeschreven cirkel van driehoek BCD bevat, dan heeft men blijkbaar $AB - CD = (a - b) - (c + d)$, $AC - BD = (a - c) - (b + d)$ en $AD - BC = (a - d) - (b + c)$; hieruit volgt terstond de juistheid van *a*).

2. Wij brengen vlakken door het middelpunt van den bol

en de zes ribben. De vlakken die door BC, CD, DB gelegd zijn, maken blijkbaar gelijke hoeken α met het zijvlak BCD. Evenzoo maken de vlakken, die de ribben van vlak ABC projecteeren, gelijke hoeken δ met dit zijvlak. Duidt men door β en γ de hellingshoeken der overeenkomstige projecteerende vlakken op ACD en ABD aan, en door (AB) den standhoek op de ribbe AB enz., dan heeft men achtereenvolgens

$$180^\circ - (CD) = \alpha + \beta \ , \ (AB) = \gamma + \delta,$$
$$180^\circ - (DB) = \alpha + \gamma \ , \ (AC) = \beta + \delta,$$
$$180^\circ - (BC) = \alpha + \delta \ , \ (AD) = \beta + \gamma,$$

Derhalve is

$$(AB) - (CD) = (AC) - (BD) = (AD) - (BC) = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 180^\circ.$$

3. De zes vlakken, welke elk een ribbe verbinden met het op de overstaande ribbe gelegen raakpunt, snijden elkaar volgens 15 rechten, waarvan evenwel viermaal drie in een rechte samenvallen. Immers de rechten, die B, C, D met de raakpunten op CD, DB, BC verbinden, gaan door één punt A'; dus hebben de drie door AB, AC, AD gelegde vlakken de rechte AA' gemeen. Op overeenkomstige wijs blijkt, dat de vlakken door BA, BC, BD een rechte BB' gemeen hebben, enz. Nu liggen de rechten AA' en BB' in het vlak dat AB met het raakpunt van CD verbindt, enz. De rechten AA', BB', CC', DD' snijden elkaar twee aan twee, zij gaan derhalve door één punt S.

Door S gaan nu alle doorsneden der boven genoemde zes vlakken, dus ook de rechten, die telkens twee raakpunten van overstaande ribben verbinden.

Opmerkingen. I. S is het middelpunt van vier evenwijdige krachten, groot $-\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ en achtereenvolgens aangrijpende in A, B, C, D. (F. S.)

II. De polen der zijvlakken t. o. v. den bol vormen een viervlak, waarvoor de boven bewezen eigenschappen gelden, mits men onder *a*) en *b*) het woord „verschillen" door „sommen" vervangt. (H. D. V.)

Vraagstuk IL.

D 1 b γ. Als men heeft

$$a_0 I_0(z) + a_1 I_1(z) + a_2 I_2(z) + \ldots = f(z),$$

vraagt men de som te bepalen van de reeks

$$a_1 I_1(z) + 4a_2 I_2(z) + 9a_3 I_3(z) + \ldots$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN *en* M. J. VAN UVEN.

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

In het gebied, waarin de gegeven gelijkheid geldt, is ook voldaan aan de gelijkheid, die ontstaat wanneer men de eerste differentieert. Men heeft dus

$$a_0 \frac{dI_0}{dz} + a_1 \frac{dI_1}{dz} + a_2 \frac{dI_2}{dz^2} + \ldots = f'(z),$$

en

$$a_0 \frac{d^2 I_0}{dz^2} + a_1 \frac{d^2 I_1}{dz^2} + a_2 \frac{d^2 I_2}{dz^2} + \ldots = f''(z).$$

Derhalve vindt men

$$f''(z) + \frac{1}{z} f'(z) + f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(\frac{d^2 I_n}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dI_n}{dz} + I_n \right).$$

Volgens de differentiaalvergelijking der BESSEL'sche functies heeft men

$$\frac{d^2 I_n}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dI_n}{dz} + I_n = \frac{n^2}{z^2} I_n,$$

derhalve is

$$\sum_0^\infty n^2 a_n I_n(z) = z^2 f''(z) + z f'(z) + z^2 f(z).$$

Oplossing *van* M. J. VAN UVEN.

Naast

$$f(z) \equiv a_0 I_0(z) + a_1 I_1(z) + a_2 I_2(z) + \ldots = \sum_0^\infty a_n I_n(z)$$

stellen we

$$\phi(z) \equiv a_1 I_1(z) + 4a_2 I_2(z) + 9a_3 I_3(z) + \ldots = \sum_0^\infty n^2 a_n I_n(z).$$

Door de bekende eigenschap der BESSEL'sche functies,

$$nI_n(z) = \frac{z}{2}\{I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z)\},$$

toe te passen, kunnen we $n^2 I_n(z)$ als volgt herleiden.

$$n^2 I_n(z) = \frac{z}{2}\{nI_{n-1}(z) + nI_{n+1}(z)\}$$

$$= \frac{z}{2}\{(n-1)I_{n-1}(z) + (n+1)I_{n+1}(z) + I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z)\}$$

$$= \frac{z}{2}\left[\frac{z}{2}\{I_{n-2}(z) + I_n(z)\} + \frac{z}{2}\{I_n(z) + I_{n+2}(z)\} + I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z)\right]$$

$$= \frac{z}{2}\left[\frac{z}{z}\{I_{n-2}(z) - 2I_n(z) + I_{n+2}(z)\} + 2zI_n(z) + I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z)\right].$$

Uit de bekende formule

$$\frac{dI_n(z)}{dz} = \tfrac{1}{2}\{I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z)\}$$

leiden we door differentiatie af

$$4\frac{d^2 I_n(z)}{dz^2} = I_{n-2}(z) - 2I_n(z) + I_{n+2}(z).$$

Derhalve krijgen we

$$n^2 I_n(z) = \frac{z}{2}\left\{\frac{z}{2} \cdot 4\frac{d^2 I_n(z)}{dz^2} + 2zI_n(z) + 2\frac{dI_n(z)}{dz}\right\}$$

$$= z^2 I_n(z) + z\frac{dI_n(z)}{dz} + z^2\frac{d^2 I_n(z)}{dz^2},$$

zoodat

$$\phi(z) \equiv \sum_0^\infty a_n n^2 I_n(z) = z^2 \sum_0^\infty a_n I_n(z) + z\sum_0^\infty a_n \frac{dI_n(z)}{dz} +$$

$$+ z^2 \sum_0^\infty a_n \frac{d^2 I_n(z)}{dz^2},$$

of

$$\phi(z) = z^2 f(z) + \frac{df(z)}{dz} + z^2 \frac{d^2 f(z)}{dz^2}.$$

Vraagstuk L.

H 8 b. Als de vergelijkingen

$$A(V) \equiv \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} + H\frac{\partial V}{\partial p} + M\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

$$B(V) \equiv \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} + M\frac{\partial V}{\partial p} + L\frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

twee integralen gemeen hebben, dan zullen zij nog een derde gemeenschappelijke integraal bezitten. Hier zijn H, M en L willekeurige functies van x, y, z, p en q.

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Elke gemeenschappelijke integraal der gegeven vergelijkingen zal ook voldoen aan de lineaire vergelijking

$$AB(V) - BA(V) = 0,$$

dus aan

$$[A(M) - B(H)]\frac{\partial V}{\partial p} + [A(L) - B(M)]\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \quad . \; . \; . \; (1).$$

Zijn nu u en v de gemeenschappelijke integralen, dan is dus

$$[A(M) - B(H)]\frac{\partial u}{\partial p} + [A(L) - B(M)]\frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

$$[A(M) - B(H)]\frac{\partial v}{\partial p} + [A(L) - B(M)]\frac{\partial v}{\partial q} = 0.$$

Hieruit volgt, omdat u en v onafhankelijk zijn

$$A(M) - B(H) = 0 \quad \text{en} \quad A(L) - B(M) = 0.$$

Het gegeven stelsel is dus volledig. Volgens JACOBI zal dit stelsel van 2 vergelijkingen met 5 onafhankelijke veranderlijken dus 3 onafhankelijke integralen bezitten.

Vraagstuk LI.

D 1 b γ. Als $I_n(z)$ de BESSEL'sche functie der eerste soort voorstelt, vraagt men naar de som der reeks

$$I_1(z) + I_3(3z) + I_5(5z) + \ldots.$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN, W. MANTEL *en* M. J. VAN UVEN.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Volgens de bepaling der functies van BESSEL is

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\omega - z\sin\omega)\,d\omega,$$

dus

$$I_{2p-1}((2p-1)z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(2p-1)\theta\,d\omega, \text{ met } \theta = \omega - z\sin\omega.$$

De som van n termen der reeks $I_1(z) + I_3(3z) + I_5(5z) + \ldots$ is dus gelijk aan

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_1^n \cos(2p-1)\theta\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta}\,d\omega.$$

Onderstel $z^2 < 1$, dan verandert θ met ω bestendig van 0 tot π, steeds in denzelfden zin. Zij nu $\frac{d\omega}{d\theta} = f(\theta)$; volgens de onderzoekingen van LEJEUNE-DIRICHLET in J. v. Crelle, IV is dan, als n oneindig toeneemt

$$\lim \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta} f(\theta)\,d\theta = f(0) - f(\pi).$$

Uit $\theta = \omega - z \sin \omega$ volgt $f(\theta) = \dfrac{1}{1 - z \cos \omega}$; dus is $f(0) -$

$$- f(\pi) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{1-z^2}.$$

De som der voorgestelde reeks is dus, voor $z^2 < 1$, gelijk aan

$$\frac{z}{2(1-z^2)}.$$

OPMERKING. Als men uitgaat van de reeksontwikkeling

$$I_n(z) = \frac{z^n}{2.4.6\ldots(2n)}\left(1 - \frac{z^2}{2\times(2n+2)} + \frac{z^4}{2.4\times(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right)$$

en de reeks $I_1(z) + I_3(3z) + \ldots$ volgens de klimmende machten van z rangschikt, dan vindt men als coëfficient van z^{2k+1} de uitdrukking

$$\frac{1}{2.4\ldots(4k+2)}\left[(2k+1)^{2k+1} - \binom{2k+1}{1}(2k-1)^{2k+1} + \right.$$
$$\left. + \binom{2k+1}{2}(2k-3)^{2k+1} - \ldots\right],$$

met $k+1$ termen binnen de haken; de waarde van deze uitdrukking moet dus $\frac{1}{2}$ bedragen. Men zal dit ook kunnen vinden uit de rekenkundige reeks met $(2n+1)^{2k+1}$ als n^e term, als men daarvan de verschillen der orde $(2k+1)$ zoekt.

Oplossing *van* M. J. VAN UVEN.

De transcendente vergelijking

$$E - e \sin E = M \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

heeft tot oplossing

$$E = M + 2\{I_1(e) \sin M + \tfrac{1}{2} I_2(2e) \sin 2M + \tfrac{1}{3} I_3(3e) \sin 3M + \ldots\}.$$

Hieruit leiden we af

$$\frac{dE}{dM} = 1 + 2\{I_1(e) \cos M + I_2(2e) \cos 2M + I_3(3e) \cos 3M + \ldots\}.$$

Dus is

$$\left(\frac{dE}{dM}\right)_{M=0} = 1 + 2\{I_1(e) + I_2(2e) + I_3(3e) + \ldots\} \ldots \quad 2).$$

Nu volgt uit vergelijking 1)

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E}.$$

Aangezien E en M gelijktijdig nul worden, heeft men

$$\left(\frac{dE}{dM}\right)_{M=0} = \frac{1}{1-e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Uit 1) en 3) vinden we, wanneer we e door z vervangen,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + 2\{I_1(z) + I_2(2z) + I_3(3z) + \ldots\} \quad \ldots\ldots \quad 4).$$

Door gebruik te maken van de betrekkingen

$$I_{2n+1}(-z) = -I_{2n+1}(z),$$
$$I_{2n}(-z) = I_{2n}(z)$$

vinden we uit 4)

$$\frac{1}{1+z} = 1 + 2\{-I_1(z) + I_2(2z) - I_3(3z) + \ldots\} \quad \ldots\ldots \quad 5).$$

Door aftrekking van beide leden der vergelijkingen 4) en 5) komt men tot

$$\frac{2z}{1-z^2} = 4\{I_1(z) + I_3(3z) + \ldots\},$$

of

$$I_1(z) + I_3(3z) + I_5(5z) + \ldots = \frac{z}{2(1-z^2)}.$$

Vraagstuk LII.

A 1 b. Als q een geheel positief getal is en a een grootheid die van $1, 2, \ldots 2q$ verschilt, dan heeft men

$$\frac{a}{a(a-1)(a-2)\ldots(a-q)} - \frac{q}{1} \cdot \frac{a-2}{(a-1)(a-2)\ldots(a-q-1)} +$$
$$+ \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a-4}{(a-2)(a-3)\ldots(a-q-2)} - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^q \frac{a-2q}{(a-q)(a-q-1)\ldots(a-2q)} = 0.$$

Men vraagt het bewijs. (Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* C. van Aller, Dr. W. Kapteyn, W. Mantel *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* W. MANTEL.

De voorgestelde vorm kan, door ontbinding in eenvoudige breuken, herleid worden tot

$$\sum_{k=1}^{k=2q} \frac{A_k}{a-k},$$

waarin A_k onafhankelijk is van a. De waarde van A_k wordt gevonden door den gegeven vorm te vermenigvuldigen met $(a-k)$ en daarna $a=k$ te stellen. Dit geeft

$$A_k = \frac{k}{k(k-1)(k-2)\ldots 1 \times (-1)(-2)\ldots(k-q)} -$$

$$-\frac{q}{1} \cdot \frac{k-2}{(k-1)(k-2)\ldots 1 \times (-1)(-2)\ldots(k-q-1)} + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{q(q-1)\ldots(q-k+1)}{1.2\ldots k} \cdot \frac{-k}{(-1)(-2)\ldots(-q)}.$$

Hier valt de eerste term weg tegen den laatsten, de tweede tegen den voorlaatsten, enz. zoodat er niets overblijft. De gegeven vorm is dus gelijk aan nul.

Vraagstuk LIII.

D 4 a. Als men heeft

$$f(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n u^n \text{ en } F(t) = \sum_{0}^{\infty} b_n t^n,$$

dan is,

$$\mathcal{E}\frac{F(t)}{((t))}\,\mathcal{E}\frac{f(u)}{((u))}\sum_{0}^{\infty}\frac{u^n}{t^n} = \mathcal{E}\frac{F(t)f(t)}{((t))}.$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Daar de residu van

$$\frac{f(u)}{u}\sum_{0}^{\infty}\frac{u^n}{t^n}$$

gelijk is aan den coëfficient van $\frac{1}{u}$ in de ontwikkeling dezer functie, heeft men

$$\mathcal{E}\frac{f(u)}{((u))}\sum_{0}^{\infty}\frac{u^n}{t^n}=a_0+\frac{a_{-1}}{t}+\frac{a_{-2}}{t^2}+\ldots.$$

Derhalve is

$$R=\mathcal{E}\frac{F(t)}{((t))}\left(a_0+\frac{a_{-1}}{t}+\frac{a_{-2}}{t^2}+\ldots\right).$$

Maar, daar $\frac{F(t)}{t}(a_1t+a_2t^2+\ldots)$ geene negatieve machten van t bevat, zoo is

$$0=\mathcal{E}\frac{F(t)}{((t))}(a_1t+a_2t^2+\ldots),$$

derhalve

$$R=\mathcal{E}\frac{F(t)}{((t))}\left\{a_0+\frac{a_{-1}}{t}+\frac{a_{-2}}{t^2}+\ldots+a_1t+a_2t^2+\ldots\right\}$$

of

$$R=\mathcal{E}\frac{F(t)f(t)}{((t))}.$$

Vraagstuk LIV.

K 14 c α. Van een regelmatig twintigvlak is de ribbe gelijk aan de diagonaal in het zijvlak van een regelmatig twaalfvlak. Men brengt door elke ribbe van beide veelvlakken een vlak dat den buitentweevlakkenhoek middendoor deelt. Te bewijzen dat de beide aldus gevormde dertigvlakken congruent zijn.

(J. A. Kerkhoven.)

Opgelost *door* J. A. Barrau, C. A. Cikot, J. A. Kerkhoven, F. Schuh *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* C. A. Cikot.

De vlakken, die de buitentweevlakkenhoeken van een regelmatig veelvlak V_1 middendoor deelen, raken den bol β aan, die door de middens der ribben gaat.

De middelpunten der zijvlakken van V_1 zijn de hoekpunten van een regelmatig veelvlak V', waarvan het aantal zijvlakken

en hoekpunten achtereenvolgens gelijk is aan het aantal hoekpunten en zijvlakken van V_1. Trekt men door het midden van elke ribbe van V_1 een rechte evenwijdig met de rechte, welke de middelpunten der in die ribbe samenkomende zijvlakken verbindt, dan ontstaat blijkbaar een regelmatig veelvlak V_2, dat gelijkvormig is met V'.

Daar β tevens de middens der ribben van V_2 aanraakt, hebben V_1 en V_2 de deelvlakken der buitentweevlakkenhoeken gemeen; het door die deelvlakken bepaalde regelmatige veelvlak kan dus door dezelfde constructie uit V_1 en uit V_2 afgeleid worden.

De middens van twee in een hoekpunt samenkomende ribben van V_1 zijn tevens de middens van twee in een hoekpunt samenkomende ribben van V_2. Hun verbindingslijn is gelijk aan de helft van de lijn welke de uiteinden der bedoelde ribben van V_1, zoowel als van V_2, vereenigt; deze verbindingslijnen zijn dus even lang.

Hierdoor is de juistheid aangetoond van een eigenschap, waarvan het in de opgave genoemde een bijzonder geval is. Neemt men voor V_1 achtereenvolgens een tetraeder, een hexaeder en een dodekaeder, dan wordt V_2 achtereenvolgens een tetraeder, een oktaeder en een ikosaeder, terwijl het door de buitendeelvlakken ingesloten veelvlak een kubus, een ruitentwaalfvlak en een ruitendertigvlak zal wezen.

Opmerking van F. J. Vaes. Het vraagstuk is volledig opgelost op bl. 45 van mijn werkje „Het onderling verband der regelmatige lichamen, en twee der halfregelmatige lichamen." (Leiden, A. W. Sijthoff, 1899).

Vraagstuk LV.

O 1. Een cirkelvormige plaat wordt zoodanig op een driehoekige gelegd, dat zij een zoo groot mogelijk deel van deze bedekt. Cirkels van verschillende grootte hebben dan verschillende ligging. Welke kromme gaat door de middelpunten dier cirkels? (W. Mantel)

Opgelost *door* T. J. Allersma, H. Bremekamp, E. J. M. van de Laarschot, W. Mantel *en* F. Schuh.

Oplossing *van* T. J. Allersma.

Wij beschouwen ABC als assendriehoek van een stelsel normale coördinaten. Zij (x, y, z) het middelpunt, r de straal

van een cirkel, die de zijden BC, CA, AB snijdt in B_2, C_1, C_2, A_1, A_2, B_1; laten B_2DC_1, C_2EA_1, A_2FB_1 de cirkelsegmenten zijn, die buiten den driehoek ABC vallen. Trekken wij stralen naar de snijpunten B_2, C_1, C_2, A_1, A_2, B_1 en stellen boog $B_2DC_1 = 2\alpha$, boog $C_2EA_1 = 2\beta$, boog $A_2FB_1 = 2\gamma$, dan is segm. $B_2DC_1 = \frac{1}{2}r^2(2\alpha - \sin 2\alpha)$, segm. $C_2EA_1 = \frac{1}{2}r^2(2\beta - \sin 2\beta)$, segm. $A_2FB_1 = \frac{1}{2}r^2(2\gamma - \sin 2\gamma)$.

Verder is

$$x = r\cos\alpha \quad , \quad y = r\cos\beta \quad , \quad z = r\cos\gamma \;.\;.\;.\;.\; 1),$$

$ax + by + cz = 2O$, dus $r(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) = 2O \;.\;.\; 2)$, waarin a, b, c, O de zijden en het oppervlak van ABC voorstellen.

Zal nu de cirkel een zoo groot mogelijk deel van $\triangle$ ABC bedekken, zoo moet de som der segmenten

$$S = \tfrac{1}{2}r^2(2\alpha - \sin 2\alpha + 2\beta - \sin 2\beta + 2\gamma - \sin 2\gamma) \;.\;.\;.\; 3)$$

een minimum worden. Daar wij volgens 2) γ als eene functie van α en β mogen beschouwen, moet aan $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0$ en $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$ voldaan worden, dus aan

$$1 - \cos 2\alpha + \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} - \cos 2\gamma\,\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = 0 \quad \text{en}$$

$$1 - \cos 2\beta + \frac{\partial\gamma}{\partial\beta} - \cos 2\gamma\,\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = 0.$$

Volgens 2) is

$$-a\sin\alpha - c\sin\gamma\,\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = 0 \quad \text{en} \quad -b\sin\beta - c\sin\gamma\,\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = 0.$$

Door eliminatie van $\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}$ en $\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}$ vindt men nu

$$c\sin\gamma\,(1 - \cos 2\alpha) = a\sin\alpha\,(1 - \cos 2\gamma)$$

en

$$c\sin\gamma\,(1 - \cos 2\beta) = b\sin\beta\,(1 - \cos 2\gamma),$$

dus

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \;.\;.\;.\;.\;.\; 4).$$

Uit 1) en 4) volgt verder

$$\frac{r^2 - x^2}{a^2} = \frac{r^2 - y^2}{b^2} = \frac{r^2 - z^2}{c^2}.$$

Zoo nu r veranderlijk is, vinden wij hieruit door eliminatie van r voor de meetkundige plaats van het middelpunt de vergelijking

$$(b^2 - c^2)\,x^2 + (c^2 - a^2)\,y^2 + (a^2 - b^2)\,z^2 = 0.$$

Deze kegelsnede gaat door de middelpunten der in- en aangeschreven cirkels, is dus een gelijkzijdige hyperbool, die den gegeven driehoek tot pooldriehoek heeft. Men toont gemakkelijk aan, dat zij ook het middelpunt van den omgeschreven cirkel en het punt van LEMOINE bevat.

Oplossing *van* F. SCHUH.

1. Zij ABC de gegeven driehoek, waarvan a, b, c de zijden zijn, en duiden wij door a', b', c' de stukken der zijden aan, die binnen den cirkel vallen, *waarbij de verlengden der zijden niet meegerekend worden.* De cirkel zal een zoo groot mogelijk deel van den driehoek bedekken, wanneer bij twee kleine translaties van den cirkel het bedekte deel, bij eerste benadering, even groot blijft. Bij een kleine translatie t evenwijdig aan AB wordt het bedekte deel met $(b' \sin A - a' \sin B)\,t$ vergroot. Een eerste voorwaarde is dus $b' \sin A = a' \sin B$ of $a' : a = b' : b$. Door een translatie evenwijdig aan BC vindt men als tweede voorwaarde $b' : b = c' : c$. Het bedekte deel zal dus zoo groot mogelijk wezen, als voldaan is aan de betrekking

$$a' : a = b' : b = c' : c = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Is een der stukken a', b', c' nul, dan zijn ze dus allen nul, en de cirkel ligt geheel binnen den driehoek. Is een dier stukken gelijk aan de overeenkomstige zijde, dan geldt dit ook voor de andere twee, en de driehoek ligt geheel binnen den cirkel. Sluit men deze twee gevallen uit, dan kunnen geen twee hoekpunten van ABC binnen den cirkel vallen; er blijven dan twee afzonderlijk te beschouwen gevallen over: 1°. A, B, C liggen buiten den cirkel, 2°. A ligt binnen den cirkel, B en C zijn buiten den cirkel gelegen.

2. EERSTE GEVAL. Elke zijde van ABC wordt tusschen haar hoekpunten tweemaal door den cirkel gesneden, en wel BC in D en E, CA in F en G, AB in H en K (fig. 6). Trekken we door G en H loodlijnen op AC en AB, die elkaar

in A′ snijden, terwijl we de punten B′ en C′ met behulp van de rechthoeken A′HKB′ en A′GFC′ construeeren, dan is driehoek A′B′C′ gelijkvormig en gelijkstandig met ABC. Het middelpunt M van den cirkel valt samen met het snijpunt der middelloodlijnen van HK en GF, is dus tevens het middelpunt van den om driehoek A′B′C′ beschreven cirkel. Hieruit volgt, dat B′D en C′E loodrecht staan op BC. Zijn P, Q, R de middens van DE, FG, HK, dan vindt men, als m de middellijn van den om zeshoek DEFGHK beschreven cirkel voorstelt, voor de afstanden van M tot a, b, c

$$MP = \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2 - a'^2}\ ,\ MQ = \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2 - b'^2}\ ,\ MR = \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2 - c'^2}.$$

Worden deze afstanden als normale coördinaten x, y, z ingevoerd, dan is, als we $m : k$ door l vervangen,

$$x : y : z = \sqrt{l^2 - a^2} : \sqrt{l^2 - b^2} : \sqrt{l^2 - c^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ 2).$$

Door eliminatie van den parameter l vindt men voor de meetkundige plaats van M de vergelijking

$$(b^2 - c^2)\,x^2 + (c^2 - a^2)\,y^2 + (a^2 - b^2)\,z^2 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ 3).$$

Voor de snijpunten dezer kegelsnede met de oneindig ver gelegen rechte $ax + by + cz = 0$ is nu

$$(a^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)x^2+2ab(a^2-b^2)xy+(c^2-b^2)(c^2+b^2-a^2)y^2 = 0.$$

De wortels dezer vergelijking zijn bestaanbaar als voldaan wordt aan

$$(a^2 - b^2)^2\,(a^2 + b^2 - c^2) + c^2\,(a^2 - c^2)\,(b^2 - c^2) > 0 \quad . \ . \ . \ 4).$$

Voor $a \gtreqless b \gtreqless c$ is hieraan voldaan; de kegelsnede is dus een hyperbool. Zij gaat, zooals te verwachten was, door de middelpunten der in- en omgeschreven cirkels, en deze punten begrenzen den boog, die in ons vraagstuk in aanmerking komt. Daar ze bovendien de middelpunten der aangeschreven cirkels bevat, is de hyperbool gelijkzijdig.

3. Tweede geval. A ligt binnen den cirkel, AB en AC worden door den cirkel in K en F gesneden, terwijl BC hem in D en E snijdt. Volgens 1) is nu

$$DE : a = AF : b = AK : c.$$

Hieruit volgt dat KF evenwijdig is met BC en gelijk aan

DE, zoodat KFED een rechthoek moet wezen. Derhalve is hoek A noodzakelijk stomp.

De meetkundige plaats van het midden van KF is de mediaan door A; bijgevolg is de meetkundige plaats van het middelpunt van den cirkel de rechte, welke het midden S van BC met het midden V der uit A getrokken hoogtelijn verbindt. De normale coördinaten dezer middens zijn achtereenvolgens evenredig met 0, sin C, sin B en 1, cos C, cos B. Hun verbindingslijn heeft dus tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & \sin C & \sin B \\ 1 & \cos C & \cos B \end{vmatrix} = 0$$

of

$$x \sin (C - B) + y \sin B - z \sin C = 0 \ldots\ldots 5).$$

Daar A binnen den cirkel moet liggen, komt van de rechte SV slechts het stuk in aanmerking, dat begrensd wordt door S en het punt W, waar het middelpunt van den cirkel moet komen, zal hij door A gaan. In dat geval is de cirkel beschreven om den met ABC gelijkvormigen en gelijkstandigen driehoek AKF; dus ligt W op de rechte, die A met het middelpunt van den om ABC beschreven cirkel verbindt. Daar deze lijn tot vergelijking heeft $y \cos C = z \cos B$, vindt men uit 5) dat de coördinaten van W evenredig zijn met $-\cos A$, $\cos B$ en $\cos C$.

Als de cirkel W tot middelpunt heeft, vallen de punten G en H (§ 2) met A samen; dus moet W op de door 3) aangewezen hyperbool liggen. Voor een stomphoekigen driehoek bestaat de meetkundige plaats van M blijkbaar uit het stuk SW der rechte SV en den boog der boven gevonden gelijkzijdige hyperbool begrensd door W en het middelpunt van den ingeschreven cirkel.

Vraagstuk LVI.

H 9. Bepaal de algemeene integraal van

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial z}$$

en de bijzondere integraal, die voor $z = 0$ de vergelijking $x^2 + y^2 = a^2$ oplevert. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL, F. SCHUH *en* M. J. VAN UVEN.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. Stel $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, dan is $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{u}$ en $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} u = 0$. De voorgestelde vergelijking krijgt den vorm

$$\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z},$$

welke echter eerst verstaanbaar wordt als men er aan toevoegt, dat aan den linkerkant y en aan den rechterkant x als standvastig moet worden beschouwd. Men schrijft haar daarom beter in den vorm

$$\frac{\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

Wegens $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} u = 0$ gaat deze vergelijking over in

$$\frac{\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial x}}{u} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{-1} \text{ of } \frac{\partial u}{\partial x} - u^3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Voor deze lineaire vergelijking is het hulpstelsel van LAGRANGE

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-u^3} = \frac{du}{0}.$$

De algemeene integaaal is $y + xu^3 = f(u)$. Dit is nu eene *gewone* differentiaalvergelijking; z is als standvastig te beschouwen, waarop men bij de integratie-constante heeft te letten. Door differentiëeren wordt hieruit gevonden

$$u + u^3 + 3xu^2 \frac{du}{dx} = f'(u) \frac{du}{dx}$$

of

$$\frac{dx}{du}(u + u^3) + 3u^2x = f'(u).$$

Langs bekenden weg vindt men hieruit

$$x = (u^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \int (u^2 + 1)^{\frac{1}{2}} f'(u) \frac{du}{u} + C(u^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Integratie bij gedeelten geeft nog

$$x = (u^2+1)^{-1} \cdot f(u) \cdot \frac{1}{u} + (u^2+1)^{-\frac{3}{2}} \int f(u) \frac{du}{u^2(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} + C(u^2+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Stelt men nu

$$\frac{f(u)}{u^2(u^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = F'(u) \text{ en } C = \phi(z),$$

dan wordt

$$x = u(u^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} F'(u) + (u^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \{F(u) + \phi(z)\}$$

en dan

$$y = u^2(u^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} F'(u) - u^3(u^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \{F(u) + \phi(z)\}.$$

De vorm kan nog iets beter gemaakt worden, als men u door $\operatorname{tg} a$ en $F(u)$ door $\psi(a)$ vervangt. De verlangde algemeene integraal verkrijgt dan den vorm

$$x = \sin a \cos^2 a\, \psi'(a) + \cos^3 a \{\psi(a) + \phi(z)\},$$

$$y = \sin^2 a \cos a\, \psi'(a) - \sin^3 a \{\psi(a) + \phi(z)\}.$$

2. Uit deze vergelijkingen volgt

$$\frac{x}{\cos a} - \frac{y}{\sin a} = \psi(a) + \phi(z).$$

Hier stelt het eerste lid de lengte voor van het stuk der raaklijn aan eene doorsnede van het oppervlak, evenwijdig met XOY, dat begrepen is tusschen de vlakken XOZ en YOZ. Men kan het oppervlak verkrijgen door eerst in XOY eene kromme lijn naar welgevallen aan te nemen; als men de stukken der raaklijn tusschen OX en OY met een standvastige lengte $\phi(z)$

vergroot, en ze dan zoover verschuift, tot dat ze weer hun uiteinden op de assen hebben, dan bepaalt de omhullende een doorsnede met een vlak evenwijdig aan XOY.

Wanneer men in XOY de astroïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ aanneemt, dan weet men, dat van haar raaklijnen door OX en OY een standvastig stuk wordt afgesneden; door dit met een standvastig stuk te vermeerderen komt men weer tot eene astroïde. Alle doorsneden van het oppervlak met vlakken evenwijdig aan XOY zijn dus astroïden, en de algemeene vergelijking van het oppervlak is

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = f(z).$$

Dit is de verlangde bijzondere integraal.

Oplossing *van* F. Schuh.

We herleiden de gegeven vergelijking tot een partiëele differentiaalvergelijking in z en stellen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Nu is, met het oog op de gegeven vergelijking,

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{p} \quad \text{en} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q}.$$

Uit

$$dx = \frac{\partial x}{\partial z} dz + \frac{\partial x}{\partial y} dy \quad \text{en} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial z} dz + \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

vindt men verder de betrekkingen

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{q}{p} \quad \text{en} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = -\frac{r\frac{\partial x}{\partial y} + s}{p^2} = \frac{rq - sp}{p^3},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = -\frac{s + t\frac{\partial y}{\partial x}}{q^2} = \frac{tp - sq}{q^3}.$$

De gegeven vergelijking gaat dus over in

$$q^4 r + pq(p^2 - q^2)s - p^4 t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Van deze vergelijking van MONGE leidt men een intermediaire integraal af, door middel van de vergelijkingen

$$q^4 dp dy - p^4 dq dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$

$$q^4 dy^2 - pq(p^2 - q^2) dx dy - p^4 dx^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 3),$$

$$dz = p dx + q dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Voor vergelijking 3) kan men schrijven

$$(p dx + q dy)(p^3 dx - q^3 dy) = 0,$$

zoodat men heeft

$$p dx + q dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3a),$$

of

$$p^3 dx - q^3 dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3b).$$

Met behulp van 3a) leveren 2) en 4)

$$\frac{dp}{p^3} + \frac{dq}{q^3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2a),$$

$$dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4a),$$

zoodat

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = C_1 \text{ en } z = C_2$$

twee integralen van 2), 3) en 4) zijn.

Dus is

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = f(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

een intermediaire integraal van 1) waarin f een willekeurige functie voorstelt. We beproeven hieraan te voldoen door te stellen

$$z = \phi(x + by) = \phi(\xi),$$

waarin b een constante is. Nu is

$$p = \frac{dz}{d\xi} \quad , \quad q = b\frac{dz}{d\xi},$$

zoodat 5) levert

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = \frac{1}{f(z)} \; \frac{b^2+1}{b^2},$$

of

$$d\xi = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \sqrt{f(z)} \,.\, dz,$$

$$\xi + c = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \int_0^z \sqrt{f(z)} \,.\, dz.$$

Stelt men $\int_0^z \sqrt{f(z)}\, dz = \mathrm{F}(z)$, dan verkrijgt men de complete integraal

$$x + by + c = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \mathrm{F}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6).$$

De algemeene integraal wordt gevonden door c als functie van b te onderstellen, $c = \phi(b)$, en b als functie van x en y. Nu is

$$x + by + \phi(b) = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \mathrm{F}(z) \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7),$$

terwijl b gevonden wordt uit

$$y + \phi'(b) = \frac{1}{(b^2+1)^{3/2}} \mathrm{F}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8).$$

De algemeene integraal wordt verkregen door b uit 7) en 8) te elimineeren. Hierin zijn F en ϕ willekeurige functies.

Om de bijzondere integraal te vinden, die voor $z = 0$ oplevert

$$\psi(x, y)^{\frac{2}{3}} \equiv x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

merken we op, dat daarvoor $f(z)$ nog geheel willekeurig kan zijn. Daar y een functie is van z en x, is ψ ook als een functie van z en x op te vatten. Dan is

$$\tfrac{2}{3}\, \psi^{-\frac{1}{3}} \frac{d\psi}{dz} = \tfrac{2}{3} \; \frac{x^{-\frac{1}{3}}\, dx + y^{-\frac{1}{3}}\, dy}{p dx + q dy} \,.$$

Houdt men z constant, dan is $x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}} \dfrac{dy}{dx} = 0$ of

$$\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{p} = \frac{y^{-\frac{1}{3}}}{q},$$

waaruit volgt

$$\psi^{-\frac{1}{3}} \frac{d\psi}{dz} = \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{p} = \frac{y^{-\frac{1}{3}}}{q},$$

of

$$\frac{1}{p} = \frac{d\psi}{dz} x^{\frac{1}{3}} \psi^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad \frac{1}{q} = \frac{d\psi}{dz} y^{\frac{1}{3}} \psi^{-\frac{1}{3}}.$$

Dit in 5) substituerend, vindt men, daar $x^{2/3} + y^{2/3} = \psi^{2/3}$

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = f(z).$$

Hieruit ziet men, dat $\frac{d\psi}{dz}$ alleen een functie van z is, en wegens $\psi_{z=0} = a$, ook ψ. Men vindt dus

$$\psi = \int_0^z \sqrt{f(z)}\, dz + a,$$

zoodat de gevraagde bijzondere integraal wordt

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left\{a + \int_0^z \sqrt{f(z)}\, dz\right\}^{2/3}$$

of

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \mathrm{F}(z).$$

Uit 7) en 8) is deze bijzondere integraal af te leiden, door

$$\phi(b) = -\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}\, a$$

te stellen.

Vraagstuk LVII.

K 9 d. Als drie niet op elkaar volgende zijden van een zeshoek gelijk en evenwijdig zijn aan de zijden van een driehoek, en de lijnen welke die zijden loodrecht middendoor deelen, door één punt gaan, dan zullen de andere zijden van den zeshoek ook gelijk en

evenwijdig zijn met de zijden van een driehoek, en de middelloodlijnen dier zijden zullen ook door één punt gaan.

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. W. BOUWMAN, H. BREMEKAMP, C. A. CIKOT, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, W. MANTEL, F. SCHUH, F. J. VAES *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* C. A. CIKOT.

1. Wij beschouwen den zeshoek ABCDEF als krachtenveelhoek, onderstellen dus dat in een punt van zijn vlak zes krachten aangrijpen, die evenredig en evenwijdig zijn met de zijden AB, BC, CD, DE, EF, FA. Daar gegeven is dat AB, CD en EF equipollent zijn met de zijden van een driehoek, zullen de met hen evenwijdig loopende krachten in evenwicht zijn. Maar de zes boven bedoelde krachten zijn evenzeer in evenwicht, dus geldt dit ook van de krachten, die evenwijdig loopen met BC, DE en FA. Bijgevolg zijn ook BC, DE en FA equipollent met de zijden van een driehoek.

2. Volgens een stelling der statica is een stelsel van krachten, die allen binnenwaarts of allen buitenwaarts loodrecht gericht zijn op de zijden van een vlakken veelhoek, in de middens dier zijden aangrijpen en evenredig zijn met die zijden, in evenwicht. Brengen we bij den bedoelden zeshoek zulk een stelsel aan, dan zullen de krachten, welke langs de middelloodlijnen van AB, CD en EF gericht zijn, in evenwicht verkeeren, omdat zij langs de middelloodlijnen vallen van een driehoek, en met diens zijden evenredig zijn; men verkrijgt dien driehoek door AB, CD en EF loodrecht op hun richtingen te verschuiven. [1]) Bijgevolg verkeeren ook de bij BC, DE en AF behoorende krachten in evenwicht, gaan dus door één punt.

Oplossing *van* F. SCHUH.

1. Wij onderstellen dat de zijden A_1A_2, A_3A_4 en A_5A_6 van zeshoek $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ gelijk en evenwijdig zijn aan de zijden van een driehoek, terwijl hun middelloodlijnen in een punt P

[1]) Vergelijk de oplossing van F. SCHUH.

samenkomen. Zij B_{23} het snijpunt der rechten, die in A_2 en A_3 loodrecht staan op A_1A_2 en A_3A_4, terwijl de punten B_{45} en B_{61} geconstrueerd worden door middel van de rechthoeken $B_{23}A_3A_4B_{45}$ en $B_{23}A_2A_1B_{61}$. Daar $B_{61}B_{23}$ en $B_{23}B_{45}$ achtereenvolgens gelijk en evenwijdig zijn aan A_1A_2 en A_3A_4, moet $B_{45}B_{61}$ gelijk en evenwijdig zijn aan A_5A_6 Daar nu P, als snijpunt der middelloodlijnen van $B_{23}B_{45}$ en $B_{23}B_{61}$, het middelpunt is van den om $B_{23}B_{45}B_{61}$ beschreven cirkel, hebben A_5A_6 en $B_{45}B_{61}$ dezelfde middelloodlijn, zoodat ook $A_5A_6B_{61}B_{45}$ een rechthoek is. Onze zeshoek kan dus verkregen worden door op de zijden van een driehoek rechthoeken te plaatsen. Het is nu duidelijk, dat de driehoeken $A_6B_{61}A_1$, $A_2B_{23}A_3$ en $A_4B_{45}A_5$ door verschuiving tot een driehoek kunnen vereenigd worden, en hiermede is het eerste deel der stelling bewezen.

2. Wij construeeren nu het punt C_{12} als snijpunt der rechten, die in A_1 en A_2 loodrecht staan op A_1A_6 en A_2A_3, en bepalen op overeenkomstige wijs de punten C_{34} en C_{56}. Nu moet aangetoond worden, dat de driehoeken $A_1C_{12}A_2$, $A_3C_{34}A_4$ en $A_5C_{56}A_6$ door verschuiving tot een driehoek $B_{61}B_{23}B_{45}$ kunnen vereenigd worden. Dit zal mogelijk zijn, als de loodlijnen uit B_{61}, B_{23}, B_{45} op A_6A_1, A_2A_3, A_4A_5 in een punt samenkomen, dus wanneer voldaan wordt aan

$$\sin C_{12}A_1A_2 \sin C_{34}A_3A_4 \sin C_{56}A_5A_6 = \sin C_{12}A_2A_1 \sin C_{34}A_4A_3 \sin C_{56}A_6A_5,$$

of, wat op hetzelfde neerkomt, aan

$$\sin A_6A_1B_{61} \sin A_2A_3B_{23} \sin A_4A_5B_{45} = \sin A_3A_2B_{23} \sin A_5A_4B_{45} \sin A_1A_6B_{61}.$$

Maar de laatste voorwaarde wordt bevredigd, omdat de driehoeken $A_6B_{61}A_1$, $A_2B_{23}A_3$ en $A_4B_{45}A_5$ tot één driehoek ineengeschoven kunnen worden, en wel tot driehoek $C_{12}C_{34}C_{56}$. Onze zeshoek kan dus ook verkregen worden door rechthoeken te beschrijven op de zijden van dezen driehoek. Hieruit volgt, dat de middelloodlijnen van A_2A_3, A_4A_5 en A_6A_1 in een punt Q moeten samenkomen, en wel in het middelpunt van den om $C_{12}C_{34}C_{56}$ beschreven driehoek.

Vraagstuk LVIII.

K 2 e. De aangeschreven cirkels I_a, I_b, I_c van driehoek ABC raken de zijden a, c, b achtereenvolgens in D, E, F. Te bewijzen

a) dat aan de betrekking DE = DF kan voldaan worden zonder dat $b = c$ is; [1])

b) dat de cirkel DEF de zijde a aanraakt, als men heeft $b = c$ of $a^2 = bc$. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, Dr. W. BOUWMAN, H. BREMEKAMP, E. D. J. DE JONGH Jr., E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

a) In driehoek DFC is $CF = s$ en $CD = s - b$, dus

$$\overline{DF}^2 = (\overline{CF} + \overline{CD})^2 - 4\overline{CF}.\overline{CD}\cos^2 \tfrac{1}{2} C = (2s - b)^2 - 4s(s-b)\frac{s(s-c)}{ab},$$

of

$$\overline{DF}^2 = (2s - b)^2 - 4\frac{c}{a} s^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1).$$

Evenzoo vindt men uit driehoek DEB

$$\overline{DE}^2 = (2s - c)^2 - 4\frac{b}{a} s^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2).$$

Dus zal DE = DF wezen, als voldaan wordt aan

$$(2s - b)^2 - (2s - c)^2 = 4\frac{c - b}{a} s^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A,$$

waarvoor men kan schrijven

$$(c - b)(2s + a - 4\frac{s^2}{a}\sin^2 \tfrac{1}{2} A) = 0.$$

Behalve in het geval $c = b$ zal DE dus gelijk zijn aan DF, als men heeft

$$\left(\frac{2s}{a}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A - \frac{2s}{a} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Laat men nu den driehoek zoo veranderen, dat a en $b : c$ standvastig blijven, dan zal het linker lid dezer vergelijking van teeken veranderen, als men A geleidelijk van 0° tot 180°

[1]) Naar aanleiding van een briefwisseling met DR. C. STOLP heeft Prof. NEUBERG de oorspronkelijke opgaaf gewijzigd.

laat aangroeien. Immers voor $A = 0°$ wordt dit lid gelijk aan $-(2s + a) : a$, dus negatief, voor $A = 180°$ wordt het, wegens $b + c = a = s$, gelijk aan 1, dus positief. Voor elke waarde van a en $b : c$ bestaat derhalve een driehoek, die aan de voorwaarde $DE = DF$ voldoet. [1])

b) Cirkel DEF snijdt AB in E en E′, AC in F en F′. Nu is $\overline{AF} \,.\, \overline{AF'} = \overline{AE} \,.\, \overline{AE'}$ of

$$\overline{AF}\,(b - \overline{CF'}) = \overline{AE}\,(c - \overline{BE'}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Als deze cirkel BC in D aanraakt, heeft men

$$\overline{CF'} = \overline{CD}^2 : \overline{CF} = (s - b)^2 : s,$$

$$\overline{BE'} = \overline{BD}^2 : \overline{BE} = (s - c)^2 : s.$$

Door substitutie in de betrekking 4) vindt men

$$(s - b)\left\{b - \frac{(s - b)^2}{s}\right\} = (s - c)\left\{c - \frac{(s - c)^2}{s}\right\}.$$

Deze voorwaarde laat zich herleiden tot

$$(s - c)^3 - (s - b)^3 = (c - b)\,s^2 + (b^2 - c^2)\,s,$$

waaraan voldaan wordt door $b = c$ of door

$$(s - c)^2 + (s - c)(s - b) + (s - b)^2 = (b + c)\,s - s^2.$$

Telt men bij beide leden $(s - c)(s - b)$ op, in aanmerking nemende, dat $(s - c) + (s - b) = a$ is, dan vindt men de voorwaarde

$$a^2 = bc.$$

Opmerkingen. I. Door de substitutie van de uit 3) volgende waarde van $\sin^2 \frac{1}{2} A$ vindt men uit 2)

$$\overline{DE}^2 = (2s - c)^2 - b\,(2s + a) = (a + b)^2 - b\,(2a + b + c), \text{ dus}$$

$$DE = DF = \sqrt{a^2 - bc}.$$

II. De constructie van een driehoek, die aan de voorwaarde $DE = DF$ voldoet en waarvan twee van de drie grootheden $(b + c)$, a en A gegeven zijn, laat zich terugbrengen tot de bekende constructie van een driehoek uit de drie laatst ge-

[1]) Ook de Heer Allersma is tot dit besluit gekomen.

noemde grootheden. Immers volgens 3) kan de derde grootheid telkens gemakkelijk geconstrueerd worden. Natuurlijk moeten de gegevens aan bepaalde voorwaarden voldoen. Niet alleen moet $b + c > a$, maar ook $(b + c) \sin \frac{1}{2} A = a \cos \frac{1}{2} (B - C) < a$ wezen. De grenswaarden van A vindt men door $b + c = a$ en $b + c = a : \sin \frac{1}{2} A$ te stellen. In het eerste geval vindt men $A = 120°$; in het tweede is

$$2s : a = 1 + 1 : \sin \tfrac{1}{2} A,$$

en de substitutie van deze waarde in 3) voert tot de vergelijking

$$\sin^3 \tfrac{1}{2} A + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin \tfrac{1}{2} A - 1 = 0,$$

waaruit men vindt

$$\sin \tfrac{1}{2} A = 0{,}8019377 \quad , \quad A = 106°37'52''.$$

In het eerste geval heeft men een oneigenlijken driehoek, waarvan de hoeken aan de basis a 0° en 60° zijn; in het laatste geval is de driehoek gelijkbeenig.

III. In de volgende gevallen komt de eigenschap DE = DF uitsluitend toe aan gelijkbeenige driehoeken.

1°. D is het raakpunt van a met den ingeschreven cirkel I, terwijl E en F hun oorspronkelijke beteekenis behouden. (Mededeeling van Prof. NEUBERG.)

2°. D behoudt zijn oorspronkelijke beteekenis; E is het raakpunt van b met I_b, F dat van c met I_c.

Vraagstuk LIX.

L' 18 dγ. Men beschouwt alle parabolen die drie gegeven rechten aanraken. De meetkundige plaats te bepalen der raakpunten van alle raaklijnen die een gegeven richting hebben. (J NEUBERG)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, W. MANTEL, M. J. VAN UVEN, F. SCHUH *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN *en* F. SCHUH.

De parabolen, die drie gegeven rechten aanraken, vormen een kegelsnedenschaar, de raaklijnen van gegeven richting een

stralenbundel; nu wordt gevraagd naar de meetkundige plaats der punten, waar kegelsneden der schaar door stralen van den bundel worden geraakt, terwijl het middelpunt van den bundel op een der vaste raaklijnen der schaar ligt.

Wij zullen deze laatste bijzonderheid voorloopig ter zijde laten, en noemen de vaste raaklijnen l_1, l_2, l_3, l_4, het middelpunt van den bundel M. Elke straal m door M wordt door één kegelsnede geraakt. Voor twee stralen m valt het raakpunt R met M samen; zij zijn de raaklijnen in M aan de beide kegelsneden, die door M gaan. De meetkundige plaats van R is dus een kubische kromme die in M een dubbelpunt heeft en door de zes punten $A_{ik} \equiv (l_i l_k)$ gaat; immers de stralenbundels met toppen A_{ik} en A_{mn} vormen samen een exemplaar der schaar.

Ligt nu M op l_4 dan ontaardt de kubische kromme in het samenstel van l_4 (waarvan elk punt raakpunt eener kegelsnede is) en een kegelsnede door de punten M, A_{12}, A_{13}, A_{23}, die l_4 in M aanraakt.

Verlegt men nu ten slotte l_4 met M naar het oneindige, dan vindt men als antwoord op de gestelde vraag, dat de meetkundige plaats van R is de parabool door A_{12}, A_{13}, A_{23}, waarvan de as in de gegeven richting loopt.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Wij noemen de gegeven raaklijnen a, b, c, de veranderlijke raaklijn h. Het raakpunt van h met de parabool vindt men door de stelling van BRIANCHON toe te passen op de zeszijde l_∞, a, b, c, h, h. Door $Q \equiv (ch)$ trekt men een rechte evenwijdig met a; zij P haar snijpunt met de rechte door $A \equiv (bc)$ evenwijdig aan h getrokken; CP snijdt h in het raakpunt R. Bij evenwijdige verplaatsing van h doorloopen h en CP projectieve stralenbundels; de meetkundige plaats van R is dus een kegelsnede. Uit bijzondere standen ziet men gemakkelijk dat ze door A, B en C gaat en slechts in de richting van h een oneindig ver gelegen punt bezit. Zij is dus de om ABC beschreven parabool met asrichting h.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Zal een parabool drie lijnen aanraken, zoo moeten deze een

driehoek vormen; dezen driehoek ABC nemen wij tot assendriehoek van een stelsel normale coördinaten aan.

De algemeene vergelijking eener kegelsnede, die de zijden van den assendriehoek aanraakt, is

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - 2BCyz - 2CAzx - 2ABxy = 0 \quad \ldots \quad 1).$$

Deze kegelsnede is een parabool indien

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2).$$

Zij p eene lijn van de gegevene richting, α eene lijn, die evenwijdig is aan p.

Is de vergelijking van p

$$dx + ey + fz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3),$$

die van α

$$lx + my + nz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4),$$

dan heeft men

$$l = d + \lambda a,\ m = e + \lambda b,\ n = f + \lambda c \quad \ldots\ldots \quad 5).$$

Door eliminatie van z tusschen 1) en 4) vindt men

$$(An + Cl)^2x^2 + 2(ACmn + BCln + C^2lm - ABn^2)xy + (Bn + Cm)^2y^2 = 0.$$

Zal α de parabool aanraken, zoo moet deze vergelijking 2 gelijke waarden geven voor $x : y$; bijgevolg moet aan

$$ACmn + BCln + C^2lm - ABn^2 = \pm (An + Cl)(Bn + Cm)$$

voldaan zijn, of aan

$$Amn + Bnl + Clm = 0 \quad \ldots\ldots \quad 6),$$

terwijl voor het raakpunt (x, y, z) de betrekking

$$x : y = ABn^2 : (An + Cl)^2$$

geldt, waaruit men met behulp van 6) en 4) vindt

$$x : y : z = \frac{A}{l^2} : \frac{B}{m^2} : \frac{C}{n^2} \quad \ldots\ldots \quad 7).$$

Uit 2), 4), 5), 7) volgt nu door eliminatie van A, B, C, l, m, n

$$\frac{(d + \lambda a)^2 x}{a} + \frac{(e + \lambda b)^2 y}{b} + \frac{(f + \lambda c)^2 z}{c} = 0,$$

$$(d + \lambda a)x + (e + \lambda b)y + (f + \lambda c)z = 0,$$

en hieruit door eliminatie van λ voor de vergelijking der meetkundige plaats van het raakpunt

$$(ec - fb)^2 ayz + (fa - dc)^2 bzx + (db - ea)^2 cxy = 0.$$

Zij is dus een parabool beschreven om driehoek ABC.

Vraagstuk LX.

C 1 f. Op de zijden AD, DC, CB van een rechthoek construeert men buitenwaarts de gelijkzijdige driehoeken AGD, DEC, CFB. De aldus verkregen figuur laat men om AB wentelen. Voor welke waarde der verhouding AB : BC wordt, bij gegeven grootte van het door AGDECFB beschreven oppervlak, de inhoud van het omwentelingslichaam een maximum? (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, H. BREMEKAMP, E. D. J. DE JONGH Jr., E. J. M. VAN DE LAARSCHOT *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Met behulp van den regel van GULDIN den inhoud der lichamen bepalend, die bij wenteling door AGDCFB en DEC beschreven worden, vindt men voor den totalen inhoud, als men $AB = a$ en $BC = b$ stelt,

$$I = \pi b\,(ab + \tfrac{1}{2} b^2 \sqrt{3}) + \pi\,(b + \tfrac{1}{6} a \sqrt{3})\,\tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{3}.$$

Voor het oppervlak wordt gevonden

$$O = 4\pi b^2 + 4\pi a\,(b + \tfrac{1}{4} a \sqrt{3}).$$

Om bij gegeven O het maximum van I te vinden, stellen we de differentiaalquotienten van $I + \lambda O$ naar a en b gelijk aan nul.

$$b^2 + ab\sqrt{3} + \tfrac{3}{4} a^2 + 2\lambda\,(2b + a\sqrt{3}) = 0,$$

$$\tfrac{3}{2} b^2 \sqrt{3} + 2ab + \tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{3} + 4\lambda\,(2b + a) = 0.$$

Uit deze beide vergelijkingen λ elimineerend vindt men

$$2(2b+a)(b^2+ab\sqrt{3}+\tfrac{3}{4}a^2)=(2b+a\sqrt{3})(\tfrac{3}{2}b^2\sqrt{3}+2ab+\tfrac{1}{2}a^2\sqrt{3}),$$

of

$$(3\sqrt{3} - 4)\,b^3 + (4\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\cdot 3)\,ab^2 - (3 - \sqrt{3})\,a^2 b = 0,$$

of

$$b\{a^2 + \tfrac{1}{12} ab(11\sqrt{3} - 15) - \tfrac{1}{6} b^2(5\sqrt{3} - 3)\} = 0.$$

Hieraan voldoet

$$b = 0\ ,\ \frac{a}{b} = \frac{5 - \sqrt{3}}{4}\ ,\ \frac{a}{b} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

De negatieve waarde voor $a : b$ vervalt natuurlijk, als geen beteekenis hebbend, zoodat I voor twee waarden van $a : b$ stationair wordt. Voor $b = 0$ is

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{4}\pi a^3\ ,\ \mathrm{O} = \pi a^2\sqrt{3},$$

voor $a = \dfrac{5 - \sqrt{3}}{4}\, b$ is

$$\mathrm{I} = \frac{5(25 + 21\sqrt{3})}{128}\pi b^3\ ,\ \mathrm{O} = \frac{3(19 + 2\sqrt{3})}{8}\pi b^2.$$

Voor $a = 0$ heeft I geen stationaire waarde, maar nu heeft de verhouding $a : b$ een waarde, die niet gepasseerd kan worden, omdat $a : b$ positief moet zijn, en men vindt

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}\pi b^3\sqrt{3}\ ,\ \mathrm{O} = 4\pi b^2.$$

Hieruit ziet men, dat I voor een gegeven waarde van O zoo groot mogelijk is voor $b = 0$, dus $a : b = \infty$; I is dan tevens stationair. I is zoo klein mogelijk en stationair voor $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5 - \sqrt{3}}{4}$, terwijl voor $a = 0$ de veranderlijke een niet te overschrijden waarde heeft, en daardoor I een maximale waarde krijgt zonder stationair te zijn; deze maximumwaarde van I is echter iets kleiner dan de maximale waarde van I voor $b = 0$.

Vraagstuk LXI.

K 1 b δ. In de hoekpunten van den scherphoekigen driehoek ABC trekt men de raaklijnen aan den omgeschreven cirkel; zij vormen een nieuwen driehoek A′B′C′. Als α, β, γ de medianen van ABC voorstellen, dan zijn AA′, BB′, CC′ gelijk aan α sec A; β sec B; γ sec C.

(J. Neuberg.)

Opgelost door T. J. Allersma, J. A. Barrau, Dr. W.

BOUWMAN, H. BREMEKAMP, C. A. CIKOT, E. D. J. DE JONGH Jr., E. J M. VAN DE LAARSCHOT, J. C. DE MASIER, Dr. A. J. A. PRANGE, F. SCHUH, Dr. C. STOLP, M. J. VAN UVEN, Dr. H. DE VRIES *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* M. J. VAN UVEN.

Is M het middelpunt van cirkel ABC, D het midden van BC, dan heeft men $\overline{MD} . \overline{MA'} = \overline{MC}^2 = \overline{MA}^2$ of

$$MA : MA' = MD : MA.$$

Dus is $\triangle MAD \sim \triangle MA'A$, en

$$AD : A'A = MD : MA.$$

Nu is $MD : MA = MD : MC = \cos CMD = \cos A$; dus heeft men

$$AA' = AD : \cos A = a \sec A.$$

Oplossing *van* H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH, Dr. C. STOLP *en* Dr. H. DE VRIES.

Is A′ de top, BC de grondlijn en D het midden der grondlijn van een gelijkbeenigen driehoek, dan is $BA' : BD = \sec A'BD$. De meetkundige plaats der punten, waarvan de afstanden tot A′ en D de genoemde verhouding hebben, is de cirkel, die A′B en A′C in B en C aanraakt.

Verbindt men een punt A van dien cirkel met B en C, dan is dus $AA' : AD = \sec A'BD$ of $AA' = a \sec A$.

Is A een stompe hoek, dan wordt daarentegen $AA' = - a \sec A$.

Vraagstuk LXII.

K 13 c. De vlakken van een viervlak $A_1A_2A_3A_4$ worden door de rechte u in de punten B_1, B_2, B_3, B_4 gesneden. Men bepaalt op u de punten C_1, C_2, C_3, C_4 die in een quadratische involutie aan B_1, B_2, B_3, B_4 zijn toegevoegd.

Te bewijzen dat de rechten A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4 een hyperboloidisch viertal vormen. (J. NEUBERG.)

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

Wij projecteeren de geheele figuur uit A_1 op het vlak $A_2A_3A_4$. De projectie u' van u snijdt dan de zijden A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2

achtereenvolgens in de projecties B'_4, B'_2, B'_3 der punten B_4, B_2, B_3. Zijn C'_2, C'_3, C'_4 de projecties der punten C_2, C_3, C_4, dan vormen B'_2, C'_2; B'_3, C'_3; B'_4, C'_4 drie paren eener involutie; volgens een bekende stelling komen dan de rechten $A_2C'_2$, $A_3C'_3$, $A_4C'_4$ in een punt d'_1 samen. Maar hieruit volgt, dat men door A_1 een rechte d_1 kan trekken die op de rechten A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4 rust, terwijl zij natuurlijk ook door A_1C_1 wordt gesneden.

Kiest men nu achtereenvolgens A_2, A_3, A_4 als projectiecentrum en telkens het overstaande zijvlak van $A_1A_2A_3A_4$ tot tafereel, dan blijkt op overeenkomstige wijs, dat men door deze drie hoekpunten drie rechten d_2, d_3, d_4 kan trekken, die allen op A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4 rusten; de rechten A_kC_k liggen derhalve op een hyperboloïde.

Vraagstuk LXIII.

Q 2. Bepaal het aantal transversalen van acht ruimten van drie afmetingen behoorende tot een ruimte van vijf afmetingen.

(Dr. S. L. VAN OSS.)

Opgelost *door* Dr. S. L. VAN OSS, F. SCHUH *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES. [1])

Wij bepalen het gezochte aantal met behulp van SCHUBERT's beginsel van het behoud van het aantal. Noemen wij de acht gegeven ruimten $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, ... $R^{(8)}$, en brengen wij $R^{(1)}$ en $R^{(2)}$ door eenzelfde vlak ε_{12}, evenzoo $R^{(3)}$ en $R^{(4)}$ door een vlak ε_{34}, $R^{(5)}$ en $R^{(6)}$ door een vlak ε_{56}, $R^{(7)}$ en $R^{(8)}$ door een vlak ε_{78}, terwijl wij aannemen, dat de vlakken ε onafhankelijk van elkaar zijn, dus elkaar kruisen, dan kunnen wij de gezochte transversalen bij deze bijzondere ligging der 8 ruimten in de volgende groepen rangschikken:

a) de transversalen der vier vlakken ε;

b) de transversalen, die geen dezer vlakken ontmoeten;

c) de transversalen, die drie vlakken ε snijden, de beide overblijvende ruimten echter in verschillende punten ontmoeten;

[1]) De andere twee oplossingen verschillen slechts in bijzaken van deze oplossing.

d) de transversalen die twee der vlakken ε snijden, de overblijvende vier ruimten echter in verschillende punten ontmoeten.

Wij onderzoeken deze vier groepen afzonderlijk.

a) De transversalen der vlakken ε worden bepaald door opnieuw de wet van het behoud van het aantal toe te passen. Wij laten daartoe twee dier vlakken door een punt P gaan, de beide andere door een punt Q. Tot de transversalen der vlakken ε behooren dan 1°) de lijn PQ; 2°) de lijnen door P, die de beide door Q gelegde vlakken in verschillende punten ontmoeten. Nu bepaalt P met die beide vlakken twee driedimensionale ruimten, die in een R_5 liggen, dus eene rechte gemeen hebben; deze rechte is dan natuurlijk de lijn PQ zelve; door P gaan bijgevolg geen andere transversalen dan PQ, en dus door Q ook niet. Een transversaal kan 3°) alle vlakken in verschillende punten ontmoeten; dan echter moeten zij gelegen zijn zoowel in de R_4 die de beide vlakken door P, als in de R_4 die de beide vlakken door Q verbindt, en dus ook in de R_3, welke die R_4 gemeen hebben. Deze R_3 wordt door elk der vlakken ε volgens een rechte gesneden; de beide transversalen dezer vier rechten voldoen aan de gestelde voorwaarden. Het aantal transversalen der groep *a* bedraagt dus *drie*.

b) Zal een rechte de door ε_{12} gaande ruimten $R^{(1)}$ en $R^{(2)}$ in verschillende punten snijden, dan moet zij gelegen zijn in de door hen bepaalde R_4; zal dezelfde rechte ook $R^{(3)}$ en $R^{(4)}$ in verschillende punten ontmoeten, dan moet zij ook gelegen zijn in de door deze twee R_3 bepaalde R_4; zij moet dus in vier ruimten R_4 tegelijk liggen, derhalve samenvallen met de snijlijn dezer ruimten. Groep *b* bevat dus *een* rechte.

c) Een transversaal die $R^{(1)}$ en $R^{(2)}$ in verschillende punten ontmoet, ligt in de door hen bepaalde R_4. Deze wordt door de vlakken ε_{34}, ε_{56}, ε_{78} gesneden volgens drie rechten, die in een R_4 liggen, dus een transversaal bezitten. Deze transversaal ligt met $R^{(1)}$ en $R^{(2)}$ in de genoemde R_4, heeft dus met elke dezer ruimten een punt gemeen, voldoet derhalve aan de gestelde voorwaarden; bovendien zal zij in het algemeen niet samenvallen met een der rechten van groep *a*, immers deze rechten behoeven slechts de vlakken ε te snijden, behooren dus in den regel niet tot de ruimten R_4 welke de door die vlakken

gaande ruimten R_3 verbinden. Er bestaat dus telkens één transversaal die één der vlakken ε niet snijdt; het aantal lijnen van groep c bedraagt derhalve *vier*.

d) Zal een rechte $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)}$, $R^{(4)}$ in verschillende punten ontmoeten, dan moet zij gelegen zijn in de beide R_4, die door de eerste twee en de laatste twee bepaald worden, dus in de gemeenschappelijke R_3 dezer beide R_4. Deze R_3 wordt door ε_{56} en ε_{78} telkens in een punt gesneden; de verbindingslijn dezer punten is een der gezochte transversalen; het aantal rechten van groep d bedraagt dus *zes*.

Rechten, die slechts één vlak ε ontmoeten, en de overige zes ruimten in verschillende punten snijden, zijn er niet. Immers zulke rechten zouden moeten liggen in de door de drie paren van R_3 bepaalde drie R_4, dus in het vlak, dat deze laatste gemeen hebben. Dit vlak echter wordt door het bedoelde vlak ε niet gesneden.

Het aantal oplossingen bedraagt dus *veertien*.

Opmerking. Volgens Prof. P. H. Schoute (*Mehrdimensionale Geometrie* I, bl. 267) heeft Schubert algemeen bewezen, dat het aantal ruimten R_d in een R_n, die met $(n-d)(d+1)$ ruimten R_{n-d-1} een punt gemeen hebben,

$$\frac{2!\,3!\ldots d!\,[(n-d)(d+1)]!}{(n-d)!\,(n-d+1)!\ldots\ldots n!}$$

bedraagt. Zet men hierin $n=5$, $d=1$, dan is $n-d-1=3$, $(n-d)(d+1)=8$; het bovenstaande vraagstuk is dus in het meer algemeene van Schubert begrepen, en het aantal oplossingen bedraagt volgens bovenstaande formule 14.

Vraagstuk LXIV.

A 3 1. Als $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ de vergelijking is, welke de getallen $1, 2, \ldots n-1, n$ tot wortels heeft, dan heeft de vergelijking

$$\frac{a_0}{n+2}x^n + \frac{a_1}{n+1}x^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{3}x + \frac{a_n}{2} = 0$$

voor even n twee wortels n en voor oneven n een tusschen n en $n+1$ gelegen wortel. (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, W. MANTEL *en* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing *van* C. VAN ALLER.

Stelt men

$$\frac{a_0}{n+2}x^n + \frac{a_1}{n+1}x^{n-1} + \ldots \frac{a_n}{2} = f(x),$$

dan is

$$\frac{d}{dx}\{x^2 f(x)\} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n) \quad \ldots\ldots 1)$$

en

$$xf'(x) + 2f(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

Voor $x=n$ volgt hieruit $nf'(n) + 2f(n) = 0$, zoodat als n een wortel is van $f(x) = 0$, die wortel tweemaal zal voorkomen; het nul worden van $f(x)$ heeft immers ook het nul worden van $f'(x)$ ten gevolge.

Uit 1) volgt

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\,dx,$$

dus

$$f(n) = \frac{1}{n^2}\int_0^n x(x-1)\ldots(x-n)\,dx.$$

Deze integraal is nul, als n *even* is, want voor $x = \frac{n}{2} + y$ en $\frac{n}{2} - y$ verkrijgt de functie onder het integraalteeken waarden die op het teeken na gelijk zijn, zoodat de positieve en negatieve differentiaalvormen elkaar opheffen.

Om het gestelde te bewijzen voor het geval dat n *oneven* is, dient te worden aangetoond dat

$$\int_0^n x(x-1)\ldots(x-n)\,dx \text{ en } \int_0^{n+1} x(x-1)\ldots(x-n)\,dx$$

tegengestelde teekens hebben. Dit kan als volgt geschieden.

We splitsen de eerste integraal in andere tusschen de grenzen 0 en 1, 1 en 2, ... $n-1$ en n, en brengen alle grenzen tot 0 en 1 terug; hierdoor wordt de integraal de som van de differentiaalvormen

$$x(x-1)\ldots(x-n)\,dx,\quad (x+1)\,x(x-1)\ldots(x-n-1)\,dx,$$
$$\ldots\ldots(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x-1)\,dx,$$

als x verandert van 0 tot 1. Voor deze som kan men schrijven

$$-\frac{1}{n+2}\int_0^1 [x(x-1)(x-2)..\{x-(n+1)\}dx-(x+n)(x+n-1)..(x-1)dx].$$

De eerste differentiaalvorm binnen de haken is positief voor alle waarden van x tusschen 0 en 1, de tweede (afgezien van zijn teeken) negatief; de geheele uitdrukking is dus negatief.

Gaan we op dezelfde wijze te werk met de tweede integraal, dan vinden we daarvoor

$$-\frac{1}{n+2}\int_0^1 [x(x-1)(x-2)\ldots\{x-(n+1)\}dx-(x+n+1)(x+n)\ldots xdx].$$

Voor elke waarde van x tusschen 0 en 1 is het product

$$x(x+1)(x+2)\ldots\{x+(n+1)\}$$

steeds grooter dan het product

$$x(x-1)(x-2)\ldots\{x-(n+1)\},$$

waaruit blijkt dat de tweede integraal positief is. De vergelijking $f(x)=0$ heeft dus, als n oneven is, een wortel tusschen n en $n+1$.

Oplossing *van* Dr. P. H. Schoute.

De bedoeling van het vraagstuk is, dat de aangegeven waarden de *eenige* bestaanbare wortels der gegeven vergelijking zijn; daarom moge de volgende aanvulling van het bewijs van den heer van Aller hier een plaats vinden.

We stellen eveneens

$$\frac{a_0}{n+2}x^n+\frac{a_1}{n+1}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_n}{2}=f(x)$$

en bovendien $\phi(x) = x^2 f(x)$. Dan is

$$\phi(y) = \int_0^y x(x-1)\ldots(x-n)\,dx;$$

en vindt men met behulp van de notatie $\int_p^{p+1} x(x-1)\ldots(x-n)dx = I_p$ het volgende.

Geval n oneven $= 2k-1$.

a. De grootheid I_p, $(p = 0, 1, \ldots 2k-1)$ is positief of negatief naarmate p oneven of even is; want van de $2k$ faktoren van een willekeurigen term onder het integraalteeken zijn er $2k-(p+1)$ negatief.

b. Men heeft $I_p = I_{2k-p-2}$, $(p = 0, 1, \ldots k-2)$; want voor $x = 2k-(x'-1)$ gaat het eene lid in het andere over; voor $p = k-1$ is de betrekking een identiteit.

c. Van $p = 0$ tot $p = k-2$ is de absolute waarde van I_p grooter dan die van I_{p+1}. Want men heeft

$$I_p + I_{p+1} = \int_p^{p+2} x(x-1)\ldots(x-2k+1)\,dx$$

$$= \int_p^{p+1} x(x-1)\ldots(x-2k+2)\,[(x+1)+(x-2k+1)]\,dx$$

$$= 2\int_p^{p+1} x(x-1)\ldots(x-2k+2)(x-k+1)\,dx,$$

en nu hebben de *verschillende* faktoren $x-2k+1$ en $2(x-k+1)$ van I_p en $I_p + I_{p+1}$ tusschen de grenzen p en $p+1$ voor $p = 0, 1, \ldots k-2$ hetzelfde teeken. Dus heeft $I_p + I_{p+1}$ het teeken van I_p en is I_{p+1} van $p = 0$ tot $p = k-2$ numeriek kleiner dan I_p.

d De kromme $y = x(x-1)\ldots(x-2k+1)$ — zie in fig. 7 het geval $k=4$ — snijdt in de punten $x=0, 1, \ldots 2k-1$ de x as en levert in de inhouden $i_0, i_1, i_2 \ldots$ de waarden van $I_0, I_1, I_2, \ldots$ In verband met het bewezene toont de figuur aan, dat de grootheden $\phi(1)=I_0$, $\phi(2)=I_0+I_1$, $\phi(3)=I_0+I_1+I_2, \ldots$ $\phi(2k-1) = I_0 + I_1 + \ldots + I_{2k-2}$ alle negatief zijn.

e. Het bewijs, dat $\phi(2k) = I_0 + I_1 + \ldots + I_{2k-1}$ positief is, wordt aldus geleverd. Naast $I_0 + I_1 + \ldots + I_{2k-3} < 0$ vindt men onmiddellijk $I_1 + I_2 + \ldots I_{2k-3} > 0$; zoo is voor $k = 4$ (fig 7) $i_1 > i_2$, $i_5 > i_4$ en daarom reeds $I_1 + I_2 + I_4 + I_5 > 0$ en des te meer $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 > 0$. Dus zal $\phi(2k)$ zeker positief zijn als $I_0 + I_{2k-2} + I_{2k-1}$ d. i. $2I_{2k-2} + I_{2k-1}$ dit is. Nu is

$$2I_{2k-2} + I_{2k-1} = 2\int_{2k-2}^{2k-1} xf(x)\,dx + \int_{2k-1}^{2k} xf(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x+2k-2)(x+2k-3)\ldots(x+1)x[2(x-1)+(x+2k-1)]\,dx$$

$$= 3\int_0^1 \left(x + \frac{2k}{3} - 1\right)(x+2k-2)(x+2k-3)\ldots(x+1)x\,dx$$

en van deze integraal zijn alle termen voor elke positieve k positief.

f. Beschouwt men nu den veelterm $\phi(y)$ van den graad $2k+1$, wiens afgeleide voor $y = 0, 1, 2, \ldots 2k-1$ verdwijnt, terwijl hij voor $y=0$ zelf verdwijnt, voor $y=1, 2, \ldots 2k-1$ steeds negatief en voor $y = 2k$ daarentegen positief is, dan volgt uit het theorema van ROLLE, dat de vergelijking $\phi(y) = 0$, behalve den ingevoerden dubbelen wortel $y = 0$, een enkelen wortel tusschen $2k-1$ en $2k$ heeft, doch verder geen bestaanbaren wortel bezit.

Geval n even $= 2k$.

a. De grootheid I_p $(p = 0, 1, \ldots 2k-1)$ is positief of negatief, naarmate p even of oneven is.

b. Men heeft $I_p = -I_{2k-p-1}$, $(p = 0, 1, \ldots k-1)$.

c. Van $p = 0$ tot $p = k-1$ is I_p in absolute waarde grooter dan I_{p+1}.

d. De kromme $y = x(x-1)\ldots(x-2k)$ — zie in fig. 8 het geval $k = 3$ — doet zien, dat de grootheden $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\ldots$ $\phi(2k-1)$ alle positief zijn.

e. Klaarblijkelijk is $\phi(2k) = 0$.

f. Beschouwt men weer den veelterm $\phi(y)$ van den graad $2k+2$, wiens afgeleide voor $y=0, 1, 2, \ldots 2k$ nul wordt, terwijl hij voor $y=0$ en $y=2k$ zelf verdwijnt, voor $y=1, 2, \ldots 2k-1$ altijd positief is, dan vindt men, dat de vergelijking $\phi(y)=0$ behalve de ingevoerde dubbele waarde $y=0$ den dubbelen wortel $y=2k$, doch overigens geen bestaanbare wortels heeft.

OPMERKING. De stelling is uit meerdimensionale beschouwingen afgeleid; men zie hieromtrent *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Feb. 1904.

Vraagstuk LXV.

O 5 b. Hoe groot is het oppervlak dat door den omwentelingscylinder $y^2+z^2=a^2$ uit het parabolisch cylindervlak $y^2=ax$ wordt gesneden? (Dr. G. SCHOUTEN.)

Opgelost *door* H. BREMEKAMP, Dr. W. BOUWMAN, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, W. MANTEL, Dr. G. SCHOUTEN *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* H. BREMEKAMP *en* E. J. M. VAN DE LAARSCHOT.

Het gevraagde oppervlak wordt gegeven door de integraal

$$O=4\int_{y=0}^{y=a} z\,ds,$$

waarin ds het lengteelement voorstelt van de parabool

$$z=0 \quad , \quad y^2=ax.$$

$$O=4\int_0^a \frac{1}{a}\sqrt{a^2-y^2}\,\sqrt{4y^2+a^2}\,dy,$$

of als men $y^2=t$ stelt,

$$O=\frac{4}{a}\int_0^{a^2}\sqrt{t(a^2-t)\left(t+\frac{a^2}{4}\right)}\,\frac{dt}{t}.$$

We stellen verder

$$t + \frac{a^2}{4} = a^2(\wp u - e_2),$$
$$t = a^2(\wp u - e_2),$$
$$t - a^2 = a^2(\wp u - e_1),$$

waarin $\wp u$ enz. onbenoemde getallen zijn.

We vinden hieruit

$$e_1 = 0{,}75, \quad e_2 = -0{,}25, \quad e_3 = -0{,}5,$$
$$g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 1{,}75.$$

$$O = 8ia^2\int_{-\omega_3}^{\omega_1}(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)du = 8ia^2\int_{-\omega_3}^{\omega_1}(\wp^2 u + e_2\wp u + e_1e_3)du$$
$$= 8a^2i\int_{-\omega_3}^{\omega_1}(\tfrac{1}{12}g_2 + \tfrac{1}{6}\wp''u + e_2\wp u + e_1e_3)\,du$$
$$= 8a^2i\int_{-\omega_3}^{\omega_1}(\tfrac{1}{6}\wp''u - \tfrac{1}{4}\wp u - \tfrac{11}{48})\,du$$
$$= 8a^2i\Big|\tfrac{1}{6}\wp' u + \tfrac{1}{4}\zeta u - \tfrac{11}{48}u\Big|_{-\omega_3}^{\omega_1}$$
$$= a^2i(\tfrac{11}{6}\omega_3 - 2\eta_3).$$

De berekening kan geschieden met de volgende formules

$$\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = 0{,}01394,$$

$$q = e^{\pi i\frac{\omega_3}{\omega_1}} = \tfrac{1}{2}\beta + 2\,.\,(\tfrac{1}{2}\beta)^5 + \ldots = 0{,}01394,$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - e_3}}\,.\,(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^2 = 1{,}4844,$$

$$\omega_3 = -\frac{i\omega_1}{\pi}\,.\,\frac{1}{M}\,{}^{10}\log q = 2{,}0189i,$$

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{12\omega_1} - \frac{2\pi^2}{\omega_1}\sum_1^\infty{}_k\,\frac{kq^{2k}}{1 - q^{2k}} = 0{,}5515,$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\omega_1}\left(\omega_3\eta_1 - \frac{\pi i}{2}\right) = -0{,}3081i,$$

$$O = (\tfrac{11}{6}\omega_3 - 2\eta_3)a^2i = 4{,}3175a^2.$$

Vraagstuk LXVI.

R 8 c. Van een homogeene staaf moet het eene uiteinde zich langs een horizontale, het andere langs een verticale sleuf bewegen. Beide sleuven liggen in één vlak en bieden geen wrijvingsweerstand. De dikte der staaf worde verwaarloosd. Bepaal haar beweging onder de werking van haar gewicht. (Dr. G. SCHOUTEN.)

Opgelost *door* H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, Dr. G. SCHOUTEN, F. SCHUH *en* F. J. VAES.

Oplossing *van* H. BREMEKAMP *en* E. J. M. VAN DE LAARSCHOT.

Het uiteinde A der staaf zal zich bewegen in de verticale sleuf, die we tot Y-as, het andere B in de horizontale sleuf, die we tot X-as kiezen.

De scherpe hoek ABO zij $= \vartheta$, AB $= 2a$, de massa $= m$, het traagheidsmoment $C_z = \frac{1}{3} ma^2$ en de hoeksnelheid $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$, met de waarde ω_0 voor $\vartheta = \alpha$ (1e quadrant).

Het beginsel van het arbeidsvermogen geeft

$$d\left(\tfrac{1}{2} C_z\omega^2 + \tfrac{1}{2} ma^2\omega^2\right) = -mg \,.\, a \cos\vartheta d\vartheta,$$

$$\omega^2 = +\frac{3g}{2a}(\sin\alpha - \sin\vartheta) + \omega_0^2.$$

Stellen we nu $\frac{2a}{3g}\omega_0^2 + \sin\alpha = \beta > 0$, dan is

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}} \,.\, \sqrt{\beta - \sin\vartheta}; \quad dt = -\sqrt{\frac{2a}{3g}} \,.\, \frac{d\vartheta}{\sqrt{\beta - \sin\vartheta}}.$$

We moeten nu drie gevallen onderscheiden:

I. $\beta < 1$. Stel $\beta = \sin\alpha_0$, dan is

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}} \,.\, \sqrt{\sin\alpha_0 - \sin\vartheta}, \; dt = -\sqrt{\frac{2a}{3g}} \,.\, \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\alpha_0 - \sin\vartheta}}.$$

We kunnen nu stellen

$$\begin{aligned} pu - e_1 &= \sin\vartheta - 1 &&, \quad e_1 = 1 - \tfrac{1}{3}\sin\alpha_0, \\ pu - e_3 &= \sin\vartheta + 1 &&, \quad e_2 = \tfrac{2}{3}\sin\alpha_0, \\ pu - e_2 &= \sin\vartheta - \sin\alpha_0 &&, \quad e_3 = -1 - \tfrac{1}{3}\sin\alpha_0. \end{aligned}$$

u beweegt zich dus op de bovenste zijde van het perioden-parallelogram.

Stellen we verder $t = 0$ voor $\vartheta = \alpha_0$, dan komt er

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}\sqrt{e_2 - pu}\,,\ t = \sqrt{\frac{2a}{3g}}\,(-\omega_2 - u).$$

We vinden hieruit het volgende overzicht

$\vartheta = \alpha_0$, $u = -\omega_2$, $t = 0$, $\omega = 0$ (minimum).

$\vartheta = -\frac{\pi}{2}$, $u = \omega_3$, $t = \sqrt{\frac{8a}{3g}}\,\omega_1$, $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_0 + 1)}$ (maximum).

$\vartheta = \alpha_0 - 2\pi$, $u = -\omega_1 + \omega_3$, $t = 2\sqrt{\frac{8a}{3g}}\,\omega_1$, $\omega = 0$ (minimum).

Voor de horizontale standen worden de grootheden gevonden door u te bepalen uit $pu = -\frac{1}{3}\sin\alpha_0$.

Terwijl A zich naar beneden beweegt, gaat B eerst naar rechts, dan naar links door O heen, tegelijkertijd stijgt A op, totdat de staaf den stand $(\alpha_0 - 2\pi)$ heeft bericht; daarna keert de beweging om.

We zien hieruit dat de staaf een oscilleerende beweging heeft met een trillingstijd $T = 4\sqrt{\frac{8a}{3g}}\,\omega_1$.

II. $\beta > 1$. We gaan uit van dezelfde formules en stellen nu

$$pu - e_2 = \sin\vartheta - 1\ ,\quad e_1 = \frac{2\beta}{3}\,;$$

$$pu - e_3 = \sin\vartheta + 1\ ,\quad e_2 = 1 - \frac{\beta}{3}\,,$$

$$pu - e_1 = \sin\vartheta - \beta\ ,\quad e_3 = -1 - \frac{\beta}{3}.$$

Nemen we $t = 0$ voor $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, dan komt er

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}\sqrt{e_1 - pu}\ ,\ t = \sqrt{\frac{8a}{3g}}\,(-\omega_2 - u).$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}\ ,\ u = -\omega_2\ ,\ t = 0\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(\beta-1)}\,(\text{minimum}),$$

$$\vartheta = -\frac{\pi}{2}\ ,\ u = \omega_3\ ,\ t = \sqrt{\frac{8a}{3g}}\,\omega_1\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(\beta+1)}\,(\text{maximum}),$$

$$\vartheta = -\frac{3\pi}{2}\ ,\ u = -\omega_1+\omega_3\ ,\ t = 2\sqrt{\frac{8a}{3g}}\,\omega_1\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(\beta-1)}\,(\text{minimum}).$$

De beweging geschiedt op overeenkomstige wijze als in geval I, maar keert nooit om; de omloopstijd is

$$T = 2\sqrt{\frac{8a}{3g}}\,\omega_1.$$

III. $\beta = 1$. In dit geval wordt $e_1 = e_2$; we hebben een ontaarde $\wp$-functie ($\omega_1 = \infty$). De enkelvoudig periodieke functie met imaginaire periode wordt gevonden door rechtstreeksche integratie van

$$dt = -\sqrt{\frac{2a}{3g}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\sin\vartheta}}.$$

Men vindt

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(1-\sin\vartheta)}\ ,\ t = \sqrt{\frac{a}{3g}}\log\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin\vartheta})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin\alpha})}{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin\vartheta})(\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin\alpha})}.$$

$$\vartheta = \alpha\ ,\ t = 0\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(1-\sin\alpha)},$$

$$\vartheta = -\frac{\pi}{2}\ ,\ t = \sqrt{\frac{a}{3g}}\log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin\alpha}}\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{a}}\,(\text{maximum}),$$

$$\vartheta = -\frac{3\pi}{2}\ ,\ t = \infty\ ,\ \omega = 0.$$

We zien hieruit, dat de staaf asymptotisch tot den hoogsten stand nadert.

Oplossing *van* Dr. G. SCHOUTEN.

Laat l de lengte, m de massa van de staaf zijn, en deze ten tijde t een hoek θ maken met het naar boven gerichte deel der verticale sleuf.

Omdat $I = \frac{1}{12} ml^2$ het traagheidsmoment is van de staaf om eene as, die haar loodrecht middendoor deelt, is de kinetische energie ten tijde t gelijk aan

$$\tfrac{1}{2} m \left(\tfrac{1}{2} l \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{12} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \text{ of } \tfrac{1}{6} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right).$$

De potentiecle energie, gerekend ten opzichte van de horizontale sleuf is dan $mg(-\frac{1}{2} l \cos\theta)$.

Beantwoordt nu de totale energie der beweging aan een valhoogte H boven de horizontale sleuf, dan is de differentiaalvergelijking der beweging

$$\tfrac{1}{6} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \tfrac{1}{2} mgl \cos\theta = mg\,\mathrm{H},$$

zoodat

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{l}\left(\frac{2\mathrm{H}}{l} + \cos\theta\right).$$

Wordt hierin $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\theta = 1 - 2x$ gesteld, dan gaat ze over in

$$\pm\sqrt{\frac{3g}{2l}}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 2(h+2)x^2 + 2hx}},$$

waarin h voor $\frac{2\mathrm{H}}{l} + 1$ is gesteld, zoodat h voorstelt de valhoogte, uitgedrukt in $\frac{1}{2} l$ als eenheid, en gerekend boven het horizontale vlak door het zwaartepunt in zijn laagsten stand.

Wordt hierin

$$x = pu + \frac{h+2}{6}$$

gesubstitueerd, dan gaat de vergelijking over in

$$\pm\sqrt{\frac{3g}{2l}}\,dt = du,$$

met

$$g_2 = \frac{(h-1)^2 + 3}{3}, \quad g_3 = \frac{(h-4)(h-1)(h+2)}{27},$$

als invarianten van pu.

Stelt men verder $\frac{h+2}{6} = -\wp a$, dan blijkt $\wp'^2 a = 0$ te wezen; zijn $\wp b$ en $\wp c$ de beide andere wortels van $\wp'^2 x = 0$, dan is

$$\wp a + \wp b + \wp c = 0 \ , \ \wp a \, \wp b \, \wp c = \tfrac{1}{4} g_3,$$

waaruit volgt

$$\wp a = -\frac{h+2}{6}, \ \wp b = \frac{4-h}{6}, \ \wp c = \frac{h-1}{3}.$$

Voor $h > 2$ is $\wp c > \wp b > \wp a$,

voor $h < 2$ is $\wp b > \wp c > \wp a$,

zoodat

voor $h > 2$ $\quad \wp\omega = \frac{h-1}{3}, \ \wp\omega'' = \frac{4-h}{6}, \ \wp\omega' = -\frac{h+2}{6},$

voor $h < 2$ $\quad \wp\omega = \frac{4-h}{6}, \ \wp\omega'' = \frac{h-1}{3}, \ \wp\omega' = -\frac{h+2}{6}.$

De integraalvergelijkingen zijn dus

$$x = \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = \wp u - \wp\omega',$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}\, t = u + \text{standv.}$$

Aangezien $\sin^2 \frac{1}{2}\theta$ positief en $\leqq 1$ is, zal men in $\wp u$ voor u moeten stellen $u + \omega'$; de bewegingsvergelijkingen zijn dus

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = \wp(u + \omega') - \wp\omega',$$

$$t = u \sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}},$$

als met $t = 0$ ook $u = 0$ wordt aangenomen.

Voor $u = 0$ is $\theta = 0$, dus de staaf bij het begin der beweging in haar laagsten stand.

Voor $u = \omega$ is

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = \wp\omega'' - \wp\omega' = 1 \quad \text{als } h > 2,$$

$$= \tfrac{1}{2} h \quad \text{als } h < 2 \text{ is.}$$

Voor $h > 2$ gaat de staaf door haar hoogsten stand, na een

tijdsverloop $\omega\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$; voor $h<2$ zal zij in den stand $\theta=2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{\frac{1}{2}h}$ in rust gekomen zijn.

Voor $h>2$ maakt de staaf dus *volle wentelingen*, elk in den tijd $2\omega\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$, voor $h<2$ daarentegen *schommelingen* elk in den tijd $2\omega\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$.

Bijzondere gevallen.

De discriminant Δ is hier gegeven door

$$16\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = h^2(h-2)^2,$$

en is dus gelijk aan nul voor $h=2$ en $h=0$.

Voor $h=2$ is $p\omega = p\omega'' = \frac{1}{3}$, $p\omega' = -\frac{1}{3}$, dus $\omega = \omega = \infty$; $\sin^2\frac{1}{2}\theta$ verandert van 0 tot 1, en de tijd van 0 tot ∞. In dit geval zal de staaf asymptotisch tot den hoogst mogelijken stand naderen.

Voor $h=0$ is $p\omega = \frac{2}{3}$, $p\omega'' = p\omega' = -\frac{1}{3}$, dus $\omega' = \omega'' = \infty$. Uit

$$pu = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}} - \frac{1}{3}\right)$$

volgt, als $u=\omega$ wordt gesteld,

$$p\omega = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \text{ dus } \omega = \frac{\pi}{2}.$$

Verandert nu u van 0 tot ω, dan gaat $\sin^2\frac{1}{2}\theta$ van 0 tot 0, en t van 0 tot $\omega\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$.

De schommeltijd nadert dus voor oneindig kleine slingeringen tot $\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$.

Merken we op, dat $\frac{2}{3}l$ de gereduceerde slingerlengte van de staaf voorstelt, als ze aan een harer uiteinden als vast punt is opgehangen, dan blijkt, dat de beweging van de staaf, ten opzichte van het uiteinde, dat langs de horizontale sleuf beweegt, identiek is met de beweging om dit uiteinde als vast punt.

Vraagstuk LXVII.

K 8 f. In den vierhoek ABCD wordt de diagonaal BD loodrecht middendoor gedeeld door de diagonaal AC. Men brengt een cirkel door B, D en het snijpunt E van AB en CD. Aan te toonen dat de lijnen AB en CD uit elk punt van den cirkelboog BED onder gelijke hoeken worden gezien. (F. SCHUH.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, H. BREMEKAMP, E. D. J. DE JONGH JR., A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF, J. A. KERKHOVEN, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, J. C. DE MASIER, Dr. G. K. NUGTEREN, Dr. A. J. A. PRANGE, F. SCHUH, Dr. C. STOLP, M. J. VAN UVEN, Dr. H. DE VRIES *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA *en* J. A. BARRAU.

Zijn (fig. 9) F en G de snijpunten van AC met cirkel BDE, dan is boog BF = boog DF en boog BG = boog DG. Dus deelen EF en EG de door AE en CE gevormde hoeken middendoor. Hieruit volgt, dat cirkel BDE de meetkundige plaats is van de punten, waaruit AF en CF onder gelijke hoeken worden gezien. Is P nu een willekeurig punt van boog BED, dan heeft men dus $\angle$ APF = $\angle$ FPC. Maar tevens heeft men $\angle$FPB = $\angle$DPF; door optelling volgt hieruit $\angle$APB = $\angle$DPC, wat te bewijzen was.

OPMERKING. F is het middelpunt van den cirkel, dien men in vierhoek ABCD kan beschrijven. (C. S.)

Vraagstuk LXVIII.

N° 2 k. Men vraagt het aantal vlakke krommen van den n^{den} graad te bepalen, die op $\frac{1}{2}(n^2 + 3n + 4)$ rechten rusten en hun vlak door een gegeven punt zenden. (F. SCHUH.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, F. SCHUH, Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* F. SCHUH.

1. We beginnen met een tweetal andere vragen te beantwoorden.

De eerste vraag luidt: *Hoe groot is het aantal* A_n *der vlakke krommen* C_n, *die op* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ *gegeven rechten rusten, terwijl hun vlakken door een gegeven rechte* p *gaan?*

Om deze vraag te beantwoorden, passen we het beginsel van het behoud van het aantal toe, en denken, dat $(n+1)$ der $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ rechten in een zelfde vlak V liggen, dat p in een punt S snijdt. Deze $(n+1)$ rechten noemen we de rechten l; de overige $\frac{1}{2}n(n+1)$ rechten, die we l' noemen, nemen we willekeurig aan. De $\frac{1}{2}n(n+1)$ snijpunten der rechten l' met het vlak V noemen we de punten Q; de $\frac{1}{2}n(n+1)$ snijpunten der rechten l onderling noemen we de punten R.

Wanneer nu een kromme C_n de rechten l buiten de punten R snijdt, dan heeft C_n $(n+1)$ punten met V gemeen; daar V niet door p gaat, moet C_n dus bestaan uit een in V gelegen rechte m, die door het punt S gaat en een kromme C_{n-1} in een vlak door p en m.

Men heeft dus de volgende soorten van figuren, die aan de vraag voldoen:

a) Een C_{n-1} in een vlak door p, gesneden door de rechten l', gecombineerd met de snijlijn van V met het vlak van C_{n-1}. Het aantal dezer oplossingen wordt door A_{n-1} voorgesteld.

b) Een C_{n-1} in een vlak door p en een der punten Q, bv. $Q_1 \equiv (l'_1, V)$, die op de overige rechten l' rust, verbonden met de rechte SQ_1. Ieder punt Q geeft één oplossing, zoodat deze groep $\frac{1}{2}n(n+1)$ oplossingen bevat.

c) Een C_n in een vlak door p en een der punten R, bv. $R_{12} \equiv (l_1 l_2)$, welke door R_{12} gaat en op de $\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$ overige rechten l en l' rust. Ieder punt R geeft één oplossing, dus levert ook deze groep $\frac{1}{2}n(n+1)$ oplossingen.

Men vindt derhalve

$$A_n = A_{n-1} + n(n+1),$$

dus

$$A_n = A_1 + \sum_2^n n(n+1),$$

of daar $A_1 = 2$ is,

$$A_n = \sum_1^n n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

2. De tweede vraag luidt: *Hoe groot is het aantal* B_n *der vlakke krommen* C_n *door een gegeven punt* P *die op* $\frac{1}{2}n(n+3)$ *gegeven rechten rusten, terwijl hun vlakken een door* P *getrokken rechte* p *bevatten?*

We onderstellen weer dat $(n+1)$ der gegeven rechten, die wij door l aanduiden, in één vlak V liggen, dat niet door p gaat. De overige $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ rechten noemen we l'. We krijgen nu $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ snijpunten Q der rechten l' met V en $\frac{1}{2}n(n+1)$ snijpunten R der rechten l onderling. Het snijpunt van p en V noemen we weer S.

Men heeft nu de volgende groepen van figuren, die aan de vraag voldoen:

a) Een C_{n-1} door P in een vlak door p, gesneden door de rechten l', verbonden met de snijlijn van V met het vlak van C_{n-1}. Het aantal dezer oplossingen wordt door B_{n-1} voorgesteld.

b) Een C_{n-1} door P in het vlak dat p met een der punten Q, b.v. Q_1, verbindt en rustend op de $\frac{1}{2}(n^2+n-4)$ overige rechten l', verbonden met de rechte SQ_1. Het aantal dezer oplossingen is $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$.

c) Een C_n, in een vlak door p en een der punten R, b.v. R_{12}, die door P en R_{12} gaat en op de $\frac{1}{2}(n-1)(n+4)$ overige rechten rust. Het aantal dezer oplossingen is $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Men vindt dus

$$B_n = B_{n-1} + (n^2+n-1),$$

en hieruit

$$B_n = B_1 + \sum_2^n (n^2+n-1)$$

of, daar $B_1 = 1$ is,

$$B_n = \sum_1^n (n^2+n-1) = \frac{1}{3}n(n^2+3n-1).$$

3. We gaan nu over tot de eigenlijke vraag. Het aantal oplossingen, die aan de voorwaarden voldoen, noemen we D_n. We denken weer $(n+1)$ der gegeven rechten, die we l noemen, in één vlak V gelegen, dat niet door het gegeven punt P gaat, welke rechten elkaar in $\frac{1}{2}n(n+1)$ punten R snijden. De overige $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ rechten l' snijden het vlak V in $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ punten Q.

Men heeft nu de volgende groepen van figuren, die aan de vraag voldoen:

a) Een C_{n-1} in een vlak door P, rustend op de $\frac{1}{2}\{(n-1)^2+3(n-1)+4\}$ rechten l', verbonden met de snijlijn van V met het vlak van C_{n-1}. Het aantal dezer oplossingen is D_{n-1}.

b) Een C_{n-1} in een vlak door de rechte PQ_1, en rustend op de $\frac{1}{2}n(n+1)$ overige rechten l', verbonden met de snijlijn van V met het vlak van C_{n-1}. Ieder der punten Q geeft A_{n-1} oplossingen; deze groep bevat dus $\frac{1}{2}(n^2+n+2)A_{n-1}$ oplossingen.

c) Een C_{n-1} in het vlak PQ_1Q_2, rustend op de $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ overige rechten l', verbonden met de lijn Q_1Q_2. Ieder paar punten Q levert één oplossing, zoodat men hier $\frac{1}{6}n(n+1)(n^2+n+2)$ figuren vindt.

d) Een C_n door het punt R_{12}, in een vlak door de lijn PR_{12}, rustend op de $\frac{1}{2}n(n+3)$ overige rechten l en l'. Ieder punt R levert B_n oplossingen; hier vindt men dus $\frac{1}{2}n(n+1)B_n$ oplossingen Nu zijn echter de krommen door R_{12} en R_{34} tweemaal in rekening gebracht, nl. eens bij de krommen door R_{12} en nog eens bij de krommen door R_{34}. Het aantal puntenparen R met vier verschillende aanwijzers bedraagt $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}n(n+1).\frac{1}{2}(n-2)(n-1)=\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$; dit is dus het aantal krommen C_n, die tweemaal in rekening gebracht zijn. Het aantal oplossingen van de vierde soort is derhalve $\frac{1}{2}n(n+1)B_n-\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$.

Men heeft dus de betrekking

$$D_n = D_{n-1}+\tfrac{1}{2}(n^2+n+2)A_{n-1}+\tfrac{1}{6}n(n+1)(n^2+n+2)+ \\ +\tfrac{1}{2}n(n+1)B_n-\tfrac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

of

$$D_n = D_{n-1}+\tfrac{1}{2}(n^2+n+2)A_{n-1}+\tfrac{1}{2}n(n+1)B_n+\tfrac{1}{2}n^2(n+1).$$

Substitueert men hierin voor A_{n-1} en B_n hun waarden, dan vindt men

$$D_n = D_{n-1}+\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n^3+3n^2+3n-2),$$

en hieruit

$$D_n = D_1+\tfrac{1}{6}\sum_1^n n(n+1)(2n^3+3n^2+3n-2),$$

of daar $D_1 = 2$ is,

$$D_n = \tfrac{1}{6} \sum_1^n n(n+1)(2n^3 + 3n^2 + 3n - 2) \quad \text{of}$$

$$D_n = \tfrac{1}{36} n(n+1)(n+2)(2n^3 + 6n^2 + 7n - 3).$$

Dit is het gevraagde aantal.

OPMERKING. Dit aantal is langs anderen weg afgeleid door H. KREIJ (*Ueber Systeme von Plancurven*, Acta Mathematica, VII, 79). Men vindt daar ook een afleiding van het getal A_n (bl. 78).

Vraagstuk LXIX.

K 14 f. De vierhoek ABCD is het grondvlak van een pyramide, die T tot top heeft. De opstaande ribben worden door een vlak in de punten A′, B′, C′, D′ gesneden. Men stelt $TA' = TA : p$, $TB' = TB : q$, $TC' = TC : r$, $TD' = TD : s$. Welke betrekking bestaat er tusschen p, q, r, s en de afstanden a, b, c, d van A, B, C, D tot het snijpunt der diagonalen AC, BD? (F. SCHUH.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH, Dr. C. STOLP, Dr. H. DE VRIES *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Wij stellen de inhouden van TABCD, TBCD, TACD enz. door I, I_A, I_B enz., de inhouden van TA′B′C′D′, TB′C′D′ enz. door I′, I'_A enz. voor.

Pyramiden met gelijke hoogten verhouden zich als hun grondvlakken; men heeft dus

$$I_A : I = c : (a + c) \quad \text{en} \quad I_C : I = a : (a + c).$$

Pyramiden met een gemeenschappelijken drievlakkenhoek verhouden zich als de producten der ribben om dien drievlakkenhoek; derhalve is

$$I'_A : I_A = 1 : qrs \quad \text{en} \quad I'_C : I_C = 1 : spq.$$

Uit deze vier betrekkingen vindt men

$$I'_A : I = c : (a + c)\, qrs \quad \text{en} \quad I'_C : I = a : (a + c)\, spq,$$

en hieruit door optelling

$$I' : I = (ar + cp) : (a + c)\, pqrs.$$

Vervangt men elk hoekpunt der pyramiden door het volgende, dan wordt hieruit afgeleid

$$I' : I = (bs + dq) : (b + d)\, pqrs.$$

De gevraagde betrekking is dus

$$(a + c)(bs + dq) = (b + d)(ar + cp),$$

of

$$ab(r - s) + cd(p - q) = bc(s - p) + da(q - r).$$

Oplossing *van* H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, *en* C. WAFELBAKKER.

We beschouwen T als oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel, waarvan het XY-vlak evenwijdig loopt met ABCD. De coördinaten van A, B, C, D stellen we door (x_1, y_1, h), (x_2, y_2, h), (x_3, y_3, h), (x_4, y_4, h) voor; dan zijn de coördinaten van A′, B′, C′, D′ achtereenvolgens

$$\left(\frac{x_1}{p}, \frac{y_1}{p}, \frac{h}{p}\right), \left(\frac{x_2}{q}, \frac{y_2}{q}, \frac{h}{q}\right), \left(\frac{x_3}{r}, \frac{y_3}{r}, \frac{h}{r}\right), \left(\frac{x_4}{s}, \frac{y_4}{s}, \frac{h}{s}\right).$$

Daar deze vier punten in een plat vlak liggen, heeft men

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & p \\ x_2 & y_2 & 1 & q \\ x_3 & y_3 & 1 & r \\ x_4 & y_4 & 1 & s \end{vmatrix} = 0$$

of

$$p\Delta_1 - q\Delta_2 + r\Delta_3 - s\Delta_4 = 0,$$

waar Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 de oppervlakken van BCD, ACD, ABD, ABC voorstellen.

Zijn h_1, h_2, h_3, h_4 de afstanden van A, B, C, D tot de diagonalen van ABCD, dan kan de gevonden betrekking vervangen worden door

$$p(b + d)h_3 + r(b + d)h_1 = q(a + c)h_4 + s(a + c)h_2.$$

Nu is evenwel $h_1 : a = h_2 : b = h_3 : c = h_4 : d$, zoodat men ten slotte vindt

$$(ar + cp)(b + d) = (bs + dq)(a + c).$$

Vraagstuk LXX.

L¹ 5 e. Te bewijzen dat een parabool haar ontwondene in twee punten aanraakt. (Dr. W. A. VERSLUYS)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, F. SCHUH, Dr. C. STOLP, Dr. W. A. VERSLUYS *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Neemt men de as der parabool als de x-as, de topraaklijn als y-as aan, dan zijn de vergelijkingen van de parabool en haar ontwondene

$$y^2 = 2px \quad \text{en} \quad 27py^2 = 8(x - p)^3,$$

en worden dus de abscissen van de snijpunten der krommen gevonden uit

$$27p^2x = 4(x - p)^3.$$

Na ontwikkeling en vereenvoudiging vindt men hieruit

$$\left(\frac{x}{p}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{p}\right)^2 - 3\tfrac{3}{4}\left(\frac{x}{p}\right) - 1 = 0.$$

Deze derdemachtsvergelijking heeft de drie wortels 4, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, waarvan er twee gelijk zijn. Deze laatste wijzen op raakpunten van de twee krommen met abscis $x = -\frac{1}{2}p$. Daar de vergelijking $x = -\frac{1}{2}p$ op zich zelve beschouwd de richtlijn voorstelt, kan men ook zeggen, dat de parabool haar ontwondene raakt in de onbestaanbare punten, waarin zij haar richtlijn snijdt.

Vraagstuk LXXI.

L¹ 5 e. Te bewijzen dat een middelpuntskegelsnede haar ontwondene in vier punten raakt. (Dr. W. A. VERSLUYS.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, F. SCHUH, Dr. C. STOLP, Dr. W. A. VERSLUYS *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

De assenvergelijking eener middelpuntskegelsnede en de vergelijking van haar ontwondene zijn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \text{ en } a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + (a^2 - c^2)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

De abscissen-vergelijking van de snijpunten dezer krommen vindt men door y^2 uit de eerste vergelijking op te lossen en in de tweede te ubstitueeren. Men vindt

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + (a^2 - c^2)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Voert men de numerieke excentriciteit ε in, dan is $c = \varepsilon a$; wordt verder de halve as als lengte-eenheid beschouwd, dan kan de laatste vergelijking aldus geschreven worden

$$F \equiv x^{\frac{2}{3}} + (1 - \varepsilon^2)^{\frac{2}{3}} (1 - x^2)^{\frac{1}{3}} - \varepsilon^{\frac{4}{3}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Hieruit vindt men door differentiatie

$$F' \equiv \tfrac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}} - \tfrac{2}{3}\, (1 - \varepsilon^2)^{\frac{2}{3}}\, x\, (1 - x^2)^{-\frac{2}{3}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

De wortels die 1) en 2) gemeen hebben, zijn die, welke in 1) tweemaal voorkomen, en dus de abscissen van de raakpunten der kegelsnede met haar ontwondene.

Om 2) op te lossen beginnen wij met den laatsten term uit het eerste lid in het tweede over te brengen en beide leden met $\frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{3}} (1 - x^2)^{\frac{2}{3}}$ te vermenigvuldigen, waardoor wij krijgen

$$(1 - x^2)^{\frac{2}{3}} = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}.$$

Na beide leden tot de derde macht verheven te hebben, trekken wij er den vierkantswortel uit; wij vinden dan de twee vergelijkingen

$$1 - x^2 = \pm (1 - \varepsilon^2)\, x^2,$$

die tot wortels hebben $x = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}}$ en $x = \dfrac{\pm 1}{\varepsilon^2}$.

De substitutie van de eerste twee waarden in het eerste lid van 1) geeft

$$F = (2 - \varepsilon^2)^{\frac{2}{3}} - \varepsilon^{\frac{4}{3}},$$

een waarde, die niet nul kan zijn, daar ε^2 van de eenheid

verschilt. De substitutie van de waarden $x = \frac{\pm 1}{\varepsilon^2}$ geeft daarentegen $F = 0$, zoodat deze wortels in 1) dubbel voorkomen.

Schrijven wij weer $\frac{x}{a}$ voor x en $\frac{c}{a}$ voor ε, dan hebben wij als abscissenvergelijkingen voor de raakpunten

$$x = \frac{a^2}{c} \text{ en } x = -\frac{a^2}{c}.$$

Deze uitkomst in verband beschouwende met die van het vorige vraagstuk, zien wij, dat elke kegelsnede haar ontwondene raakt in de punten, waarin zij haar richtlijnen snijdt.

Vraagstuk LXXII.

M¹ 5 c β. Te bewijzen dat de cissoïde van DIOCLES haar ontwondene aanraakt in de punten, waarvan de raaklijnen door de cyclische punten gaan. (Dr. W. A. VERSLUYS.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, F. SCHUH, Dr. W. A. VERSLUYS *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* C. VAN ALLER.

De in N°. 70, 71 en 72 genoemde stellingen zijn begrepen in de volgende meer algemeene stelling [1]): *Iedere kromme raakt hare ontwondene in elk der punten, waarin zij door hare isotrope raaklijnen wordt aangeraakt.* (PICQUET, *Traité de Géometrie Analytique* p. 235). Daar bij een kegelsnede de richtlijnen de verbindingslijnen der raakpunten van hare isotrope raaklijnen zijn, vindt men daar de bedoelde raakpunten in de imaginaire punten, waarin de kegelsnede door hare richtlijnen wordt gesneden.

Bij de cissoïde, een kromme van den derden graad met een keerpunt en dus van de derde klasse, kan men uit elk der cyclische punten drie raaklijnen trekken. Uit de vergelijking $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$, waarbij a den straal van den cirkel voorstelt, waaruit de cissoïde wordt afgeleid, blijkt echter dat

[1]) Deze stelling is door de heeren SCHUH en DE VRIES opnieuw bewezen. (RED.)

de kromme door de cyclische punten gaat. Het gevolg hiervan is, dat van de drie raaklijnen uit een cyclisch punt aan de cissoïde getrokken er twee met de raaklijn in dat punt aan de cissoïde samenvallen. De derde raaklijn alleen heeft haar raakpunt op eindigen afstand; de coördinaten van dit punt vindt men door de snijpunten te zoeken van de eerste poolkromme van een cyclisch punt met de cissoïde; drie snijpunten vallen samen met het keerpunt, twee met het cyclisch punt, het zesde snijpunt is het gezochte raakpunt. Men vindt hiervoor gemakkelijk $x = \frac{8}{3} a$ en $y = \pm \frac{16}{3} ia$. De cissoïde raakt hare ontwondene dus in deze punten enkelvoudig aan.

Vraagstuk LXXIII.

K 22 b. Gegeven zijn een willekeurig omwentelingsoppervlak met as a en de rechte l evenwijdig met a. Men beschouwt het regelvlak R, dat gevormd wordt door de raaklijnen van O, die l loodrecht snijden. Hoe construeert men de raaklijn in een punt der kromme volgens welke R en O elkaar raken?

(Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH, F. J. VAES *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing.

Wij plaatsen het horizontale projectievlak loodrecht op de rechten l en a, en noemen hun voetpunten L en A. Ieder horizontaal hulpvlak snijdt nu het omwentelingsoppervlak volgens een of meer cirkels, die zich op het horizontale vlak in ware grootte projecteeren als cirkels met het middelpunt A. De projecties der in dat hulpvlak gelegen rechten van R zijn de raaklijnen uit L aan die cirkels; hun raakpunten liggen op den cirkel C, beschreven op de lijn LA als middellijn. Hieruit volgt, dat de ruimtekromme, volgens welke de oppervlakken R en O elkaar aanraken, de doorsnede is van O met den verticalen omwentelingscylinder, die den cirkel C tot doorgang heeft.

Moet nu in een punt P dezer kromme de raaklijn geconstrueerd worden, dan heeft men slechts de raakvlakken in P aan den cylinder en aan het oppervlak O aan te brengen en deze met elkaar te snijden.

M
C

C
E
A

C

de kromme d
is, dat van
cissoïde getrò
cissoïde same
punt op ein
men door d
van een cyc
samen met h
snijpunt is h
kelijk $x =$
wondene du

K 22 b.
met as a en
regelvlak R,
loodrecht sn
der kromme

Opgelo
DE LAARSCH

Wij pla
rechten l
horizontaa
gens een
ware gro
De proje
de raaklij
den cirke
volgt, d
R en O
ticalen o
Moet
eerd wo
den cyl
met elk

Het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: „*Een ontermoeide arbeid komt alles te boven*," opgericht in 1779, tracht de beoefening der Wiskunde te bevorderen door

a) het houden van vergaderingen,

b) het uitgeven van tijdschriften,

c) het uitgeven van een reeks vraagstukken ter oplossing voor de leden, later gevolgd door de oplossingen,

d) het uitschrijven van prijsvragen,

e) het inrichten eener boekerij, enz.

De vergaderingen worden zooveel mogelijk maandelijks te Amsterdam gehouden, in de maanden van October tot Maart.

Het tijdschrift „*Revue semestrielle des publications mathématiques*" tracht in den kortst mogelijken tijd beknopte opgaven te verschaffen omtrent de in de verschillende wiskundige tijdschriften opgenomen verhandelingen. Het verschijnt jaarlijks in twee stukken, ieder van ruim honderd bladzijden.

Het tijdschrift getiteld „*Nieuw Archief voor Wiskunde*" geredigeerd door Dr. J. C. Kluyver te Leiden, Dr. D. J. Korteweg te Amsterdam en Dr. P. H. Schoute te Groningen bevat wiskundige verhandelingen. Elke twee jaar verschijnt een deel, bestaande uit vier stukken van ongeveer vijf vel druks.

De voornaamste der door de leden ingezonden oplossingen van de voorgestelde vraagstukken worden gepubliceerd in de „*Wiskundige Opgaven*," geredigeerd door Dr. J. De Vries te Utrecht. Elk deel bevat de oplossingen van 200 vraagstukken in ruim 400 bladzijden; het verschijnt in twee of drie jaar en bij stukken van ongeveer vier vel druks.

Jaarlijks wordt door het Genootschap een twaalftal prijsvragen uitgeschreven. Zij, die na verloop van tijd tien prijsvragen hebben beantwoord, verkrijgen den titel van lid van verdienste.

De bibliotheek, waarvan de boeken op aanvraag bij Dr. C. P. Burger, bibliothecaris van de Universiteits-bibliotheek te Amsterdam, aan de leden worden verzonden, is op de hoogte van den tijd, daar het Genootschap in ruiling is met de voornaamste wiskundige genootschappen in het buitenland.

De *jaarlijksche contributie* van de leden der V[illegible]ging bedraagt *f* 5,00 (entrée *f* 1,00).

Zij, die nog geen lid zijn en mochten [illegible] te worden, gelieven zich aan te melden bij den Ondervoor[illegible] D. Coelingh, Van Breestraat 143, Amsterdam.

A.

Sci 900.33

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN

DOOR DE

LEDEN VAN HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP

TER SPREUKE VOERENDE

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

NEGENDE DEEL.
3de Stuk.

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1905.

Ter bevordering eener geregelde toezending van de drukwerken van het Genootschap, wordt den leden beleefd verzocht bij verhuizing hun nieuw adres op te geven aan Dr. D. COELINGH, Ondervoorzitter van het Genootschap, Amsterdam, Mauritskade 58.

Vraagstuk LXXIV.

M^2 4 1 δ. Door een gegeven lemniscaat een ringoppervlak te brengen, zoodat de gegeven kromme de doorsnede van dit oppervlak met een van zijn raakvlakken is. (Dr. H. DE VRIES).

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, F. SCHUH, F. J. VAES *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing.

Zij OZ de omwentelingsas van den ring, O het voetpunt van de loodlijn uit het middelpunt M van den voortbrengenden cirkel op OZ neergelaten. Nemen wij het vlak, dat door OM wordt beschreven tot xy-vlak, de lijn OZ tot z-as van een rechthoekig coördinatenstelsel, stellen $OM = d$, den straal van den voortbrengenden cirkel $= c$, dan is de vergelijking van het ringoppervlak

$$(x^2 + y^2 + z^2 + d^2 - c^2)^2 = 4d^2 (x^2 + y^2) \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Zal de doorsnede van een raakvlak met dit oppervlak een lemniscaat zijn, zoo moet deze doorsnede twee symmetrie-assen door het raakpunt hebben; dit is alleen mogelijk, indien het raakvlak evenwijdig is aan OZ. Wij kunnen, zonder aan de algemeenheid van de oplossing te kort te doen, aannemen dat het raakvlak evenwijdig is aan het yz-vlak; de vergelijking van het raakvlak is dan

$$x = d - c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Voor de doorsnede van 1) en 2) heeft men

$$(y^2 + z^2)^2 - 4cdy^2 + 4d(d - c)z^2 = 0.$$

Zal deze doorsnede nu een gegeven lemniscaat

$$(y^2 + z^2)^2 - 2a^2(y^2 - z^2) = 0$$

zijn, zoo moet voldaan wezen aan

$$4cd = 2a^2 \text{ en } 4d(d - c) = 2a^2,$$

of aan

$$d = a \quad \text{en} \quad c = \tfrac{1}{2}a.$$

Alzoo moet de straal van den voortbrengenden cirkel de helft van, en de straal van den door het middelpunt beschreven cirkel, gelijk aan de constante a der lemniscaat zijn.

Vraagstuk LXXV.

M² 9 d. Men beschouwt het oppervlak gevormd door alle kegelsneden welke in evenwijdige vlakken liggen en vijf elkaar kruisende rechten snijden. Te bepalen den graad van dit oppervlak, het aantal in lijnenparen ontaarde kegelsneden en de meetkundige plaatsen der middelpunten, brandpunten en asymptoten der bedoelde kegelsneden. (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, Dr. C. STOLP *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

1. Het vlak van een der kegelsneden worde als xy-vlak aangenomen. De vergelijkingen der gegeven rechten hebben in het algemeen de gedaante

$$x = a_k z + b_k,\ y = c_k z + d_k\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Een vlak evenwijdig met XOY snijdt de rechten in 5 punten $(x_i,\ y_i,\ z)$, en de kegelsnede door die punten gelegd heeft tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Substitueert men hierin $x_k = a_k z + b_k$, $y_k = c_k z + d_k$, dan stelt de komende vergelijking, als z veranderlijk genomen wordt, het gevraagde oppervlak voor. Dit is van den *achtsten* graad; want in den determinant zijn de eerste drie kolommen van den tweeden, de volgende twee van den eersten graad.

Wij schrijven de vergelijking in den vorm

$$K \equiv A_6 x^2 + 2B_6 xy + C_6 y^2 + 2D_7 x + 2E_7 y + 2F_8 = 0.$$

De graad van de functiën A, B, C, D, E, F is aangewezen door den bijgevoegden index.

2. Twintig kegelsneden ontaarden in lijnenparen; want de voorwaarde, dat een kegelsnede in twee rechten uiteenvalt, wordt uitgedrukt door de vergelijking

$$\begin{vmatrix} A_6 & B_6 & D_7 \\ B_6 & C_6 & E_7 \\ D_7 & E_7 & F_8 \end{vmatrix} = 0,$$

die in z van den twintigsten graad is.

3. Op de gewone wijze het middelpunt van een der kegelsneden bepalende, heeft men

$$x = \frac{C_6D_7 - B_6E_7}{B_6^2 - A_6C_6}, \quad y = \frac{A_6E_7 - B_6D_7}{B_6^2 - A_6C_6}.$$

Uit deze vergelijkingen blijkt, dat de meetkundige plaats der middelpunten een kromme van den *dertienden* graad is, en tevens, dat onder de kegelsneden twaalf parabolen voorkomen; hun vlakken worden bepaald door $B_6^2 = A_6C_6$.

4. De brandpunten der kegelsneden worden bepaald door de vergelijkingen [1])

$$4B_6K = K_xK_y,$$

$$K_x^2 - K_y^2 = 4(A_6 - C_6)K,$$

waar $K_x = \frac{\partial K}{\partial x}$, $K_y = \frac{\partial K}{\partial y}$ is.

$$(B_6^2 - A_6C_6)xy - (C_6D_7 - B_6E_7)y - (A_6E_7 - B_6D_7)x + B_6F_8 - D_7E_7 = 0,$$

$$(B_6^2 - A_6C_6)x^2 - 2(C_6D_7 - B_6E_7)x + E_7^2 - C_6F_8 =$$
$$= (B_6^2 - A_6C_6)y^2 - 2(A_6E_7 - B_6D_7)y + D_7^2 - A_6F_8.$$

---

[1]) Men kan deze betrekkingen aldus afleiden.
De raaklijnen uit het punt (x_1, y_1) worden voorgesteld door

$$K(x_1, y_1)K(x, y) = P^2,$$

waar

$$P \equiv (Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + (Dx_1 + Ey_1 + F) \text{ is.}$$

Deelt men beide leden der vergelijking door x_1^2, vervangt $y_1 : x_1$ door $\pm i$ en stelt daarna $x_1 = \infty$, dan vindt men voor de raaklijnen uit de imaginaire cirkelpunten de vergelijkingen

$$(A \pm 2Bi - C)K = [Ax + By + D \pm i(Bx + Cy + E)]^2.$$

De brandpunten worden dus, als snijpunten dezer beide lijnenparen, bepaald door

$$4BK = K_xK_y \text{ en } K_x^2 - K_y^2 = 4(A - C)K.$$

(Red.)

Door elke dezer vergelijkingen beurtelings in verband te brengen met die van een willekeurig plat vlak $y = px + qz + r$, verkrijgt men vergelijkingen van den vorm

$$G_{13}x + H_{14} = 0, \quad L_{12}x^2 + M_{13}x + N_{14} = 0.$$

Door eliminatie van x vindt men hieruit

$$L_{12}H^2_{14} - M_{13}G_{13}H_{14} + N_{14}G^2_{13} = 0.$$

Deze vergelijking is in z van den *veertigsten* graad, zoodat de meetkundige plaats der brandpunten een kromme van denzelfden graad is.

5. De vergelijking van de asymptoten der kegelsnede is

$$A_6(x-u)^2 + 2B_6(x-u)(y-v) + C_6(y-v)^2 = 0,$$

wanneer men door u en v de coördinaten van het middelpunt verstaat. Vervangt men u en v door de onder 3. gevonden uitdrukkingen, dan verkrijgt men, na eenige herleiding, de vergelijking [1])

$$(A_6C_6 - B^2_6)(A_6x^2 + 2B_6xy + C_6y^2 + 2D_7x + 2E_7y) + \\ + (A_6E^2_7 - 2B_6D_7E_7 + C_6D^2_7) = 0,$$

waaruit blijkt, dat de meetkundige plaats der asymptoten een regelvlak van den *twintigsten* graad is.

Opmerkingen. I. De oorzaak van de ontaarding eener kegelsnede is gelegen in de omstandigheid, dat haar vlak drie van de vijf rechten in punten van ééne rechte snijdt. Dit heeft plaats, wanneer voldaan wordt aan de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} x_h & y_h & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

---

[1]) Men vindt deze vergelijking langs korter weg door op te merken, dat de kegelsnede door de asymptoten op de oneindig ver gelegen rechte wordt geraakt, zoodat de vergelijking van het door de asymptoten gevormde lijnenpaar moet wezen $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F' = 0$. Voor den term F' vindt men, door de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F' \end{vmatrix} = 0, \text{ de uitdrukking } F' = \frac{AE^2 - 2BDE + CD^2}{AC - B^2}.$$

(Red.)

welke 2 waarden voor z levert. Daar nu h, i, k drie verschillende getallen zijn van de vijf 1, 2, 3, 4, 5 en men tien verschillende groepen van drie rechten uit de vijf gegevene kan maken, heeft men tien vierkantsvergelijkingen met twintig verschillende waarden van z, wat met de beschouwing onder 2. overeenstemt.

II. Tot het kegelsnedenoppervlak kunnen ook platte vlakken behooren met kegelsneden, die al of niet in rechtenparen ontaard zijn. Zijn b.v. de vlakken der kegelsneden evenwijdig met een rechte l, die op vier van de vijf gegeven rechten l_i rust, dan is er één vlak, dat deze rechte bevat en de vijfde rechte in een punt P snijdt. Elke in dit vlak door P gaande rechte vormt met l een lijnenpaar, dat op de vijf gegeven rechten rust.

Onderstelt men, dat de vlakken der kegelsneden evenwijdig zijn met één der gegeven rechten, dan behoort het vlak, dat deze rechte bevat, tweemaal tot het gevraagde oppervlak. Het snijdt namelijk de overige vier rechten in de vier basispunten van een kegelsnedenbundel, terwijl de rechte die *in* het vlak gelegen is, elke kegelsnede van den bundel in twee punten snijdt.

Oplossing *van* Dr. H. de Vries.

1. Wij noemen de gegeven rechten $l_i (i = 1 \ldots 5)$, de snijlijn der evenwijdige vlakken l_∞, en bepalen den graad van het oppervlak met behulp van het beginsel van het behoud van het aantal, nadat wij nog een willekeurige rechte l_0 hebben aangenomen. Daartoe onderstellen wij dat l_1, l_2, l_3 de lijn l_∞ snijden. In elk der vlakken $l_\infty\, l_i (i = 1, 2, 3)$ ligt dan één kegelsnede, die tweemaal aan de vraag voldoet, omdat zij de lijn l_i tweemaal ontmoet; zoodoende vinden wij 6 kegelsneden. Verder bepaalt l_∞ met l_4, l_5, l_0 2 transversalen; elke dezer transversalen vormt met l_∞ een kegelsnede die aan de vraag voldoet. Het gezochte aantal bedraagt dus 8, en hieruit volgt dat het bedoelde oppervlak een O^8 is met zesvoudige rechte l_∞; want in ieder vlak door l_∞ ligt, behalve l_∞ zelve, slechts één kegelsnede.

2. Het aantal op l_∞ rustende lijnenparen van het oppervlak bedraagt 20; men kan n.l. de 5 rechten l_i op 10 verschillende wijzen 3 aan 3 samenvatten, en elk dezer groepen bezit 2 door

l_∞ gesneden transversalen. In elk vlak door l_∞ en één dezer transversalen ligt een ontaarde kegelsnede van O^8, gevormd door deze transversaal en de lijn die de snijpunten van het bedoelde vlak met de beide overige rechten l verbindt; het aantal lijnenparen bedraagt dus inderdaad 20.

3. Om de meetkundige plaats van de middelpunten der kegelsneden te vinden, is het noodig het aantal parabolen van O^8 te bepalen. Alle parabolen, die l_∞ aanraken en op l_1, l_2, l_3, l_4 rusten, vormen een oppervlak, waarvan wij den graad zullen bepalen; dit getal wijst dan het aantal parabolen van O^8 aan. Nu liggen in ieder vlak door l_∞ 2 parabolen, die op l_1, l_2, l_3, l_4 rusten. Het aantal kegelsneden, die door 2 gegeven punten gaan en op 4 gegeven rechten rusten, bedraagt 4; nemen wij nu op l_∞ 3 punten P_∞, Q_∞, R_∞ zoodanig aan dat P_∞ tusschen de andere twee ligt, dan vinden wij 4 kegelsneden door P_∞ en Q_∞, en 4 door P_∞ en R_∞, dus 8 door P_∞; deze gaan alle in parabolen over wanneer Q_∞ en R_∞ oneindig dicht naast P_∞ komen te liggen, terwijl hun aantal niet verandert, omdat een kegelsnede met l_∞ niet 3 opeenvolgende punten gemeen kan hebben. De lijn l_∞ is dus voor het door de parabolen gevormde oppervlak een achtvoudige rechte, zoodat de graad van dit oppervlak 12 is, en het aantal parabolen van O^8 evenzeer 12 bedraagt. [1])

Hieruit volgt dat de meetkundige plaats der middelpunten van de kegelsneden van O^8 met l_∞ 12 punten gemeen heeft; in ieder vlak door l_∞ ligt slechts één kegelsnede, dus slechts één middelpunt, zoodat de gezochte meetkundige plaats een ruimtekromme van den 13^{en} graad is die in 12 punten op l_∞ rust, dus van het geslacht nul is.

4. Noemen wij het vlak van een der 12 parabolen V_p, en zij P_∞ haar raakpunt met l_∞. Beschouwen wij eenige standen van het om l_∞ draaiende vlak V aan weerszijden en in de onmiddellijke nabijheid van V_p, dan liggen in de vlakken aan de eene zijde uitsluitend kegelsneden, die l_∞ niet snijden, aan de andere zijde uitsluitend kegelsneden, die l_∞ wel snijden;

---

[1]) De kegelsneden van O^8 snijden op l_∞ een puntenstelsel (6, 6) in; de 12 coincidenties van dit stelsel zijn de raakpunten der op O^8 gelegen parabolen. (Red.)

construeert men nu voor deze kegelsneden de middelpunten, dan blijkt onmiddellijk, dat deze punten alle aan dezelfde zijde van V_p liggen; R^{13} moet dus in P_∞ het vlak V_p ontmoeten zonder het te snijden, het dus aanraken. Nu heeft in het algemeen iedere rechte g, die l_∞ snijdt, in die doorsnede met O^8 zes punten gemeen; een rechte g door P_∞, en in V_p gelegen, heeft echter met O^8 nog slechts één punt gemeen, zoodat voor zulke rechten g het punt P_∞ 7 snijpunten vertegenwoordigt; hieruit volgt dat R^{13}, wier raaklijn in P_∞ eveneens tot deze in V_p gelegen rechten g behoort, in elk der 12 punten, die zij met l_∞ gemeen heeft, het oppervlak O^8 in 7 samenvallende punten snijdt. Het volledig aantal snijpunten van O^8 en R^{13} bedraagt $8 \times 13 = 104$; hiervan liggen er volgens het bovenstaande $7 \times 12 = 84$ op l_∞; de overblijvende 20 zijn de middelpunten der 20 lijnenparen van O^8.

5. In ieder vlak V door l_∞ liggen 4 brandpunten; beschouwen wij deze als de snijpunten der raaklijnen uit de cyclische punten I_1, I_2 van l_∞, dan is gemakkelijk in te zien, dat voor een parabool 2 brandpunten met I_1 en I_2 samenvallen, terwijl een derde in het raakpunt P_∞ ligt. De meetkundige plaats der brandpunten snijdt l_∞ dus in de 12 punten P_∞ en bezit in I_1 en I_2 2 geïsoleerde twaalfvoudige punten; behalve deze 36 punten bevat ieder vlak door l_∞ er nog 4; zij is dus een ruimtekromme van den 40en graad. Deze R^{40} heeft met O^8 320 punten gemeen. Om te vinden hoeveel van deze punten op l_∞ liggen, beschouwen wij weer een der 12 vlakken V_p en eenige standen van V aan weerskanten van V_p. Op dezelfde wijze als hierboven blijkt dan dat R^{40} dit vlak in de punten I_1, I_2, P_∞ moet aanraken; de raaklijnen in I_1 en I_2 hebben echter in deze punten met O^8 niet meer dan 6 punten gemeen en daaruit volgt dat de cyclische punten niet meer dan 144 snijpunten vertegenwoordigen. De 12 punten P_∞ gedragen zich eenigszins anders; ook in deze punten raakt R^{40} de vlakken V_p aan, maar nu hebben de raaklijnen in deze punten met O^8 telkens 7 punten gemeen; bovendien echter onderscheidt zich R^{40} hierin van de R^{13} der middelpunten, dat terwijl deze bij den doorgang door de punten P_∞ van de concave zijde der kegelsneden naar de convexe overgaat, dus O^8 in deze punten snijdt, de eerste steeds aan de concave zijde blijft en dus nog

een punt meer dan R^{13} met O^8 gemeen heeft; hieruit volgt, dat de 12 punten P_∞ 96 verdere snijpunten opslorpen; het volledig aantal snijpunten op l_∞ is dus 240, zoodat 80 snijpunten buiten l_∞ liggen. Deze vallen 4 aan 4 samen; want wanneer een brandpunt op de kegelsnede ligt, ontaardt deze in een lijnenpaar, en in het dubbelpunt zijn dan de 4 brandpunten vereenigd. Ook op deze wijze vinden wij dus voor het aantal lijnenparen 20.

6. De meetkundige plaats der asymptoten is een O^{20} met 18-voudige rechte l_∞. In ieder vlak door l_∞ liggen toch 2 asymptoten; door ieder punt van l_∞ gaan 6 kegelsneden, dus 6 asymptoten; bovendien is l_∞ voor elk der 12 parabolen asymptoot, terwijl de tweede in het overeenkomstige vlak V_p oneindig dicht bij haar ligt, maar uitsluitend in dit vlak als met l_∞ vereenigd mag beschouwd worden. De graad van het gezochte oppervlak is dus 20, wat in overeenstemming is met het aantal lijnenparen; want het is gemakkelijk in te zien, dat elk der 5 lijnen l_i het regelvlak der asymptoten slechts kan snijden in de punten waar de rechten der 20 lijnenparen op haar rusten. Hieruit volgt tevens dat O^8 en O^{20}, behalve de 40 rechten der 20 lijnenparen, slechts oneindig ver gelegen punten gemeen kunnen hebben. Nu is de volledige doorsnede dezer oppervlakken van den graad 160; l_∞ is voor O^8 een zesvoudige, en voor O^{20} een 18-voudige rechte, geldt dus voor 108 enkelvoudige snijlijnen; maar bovendien zagen wij zooeven, dat in de 12 vlakken V_p ook de tweede asymptoot der parabool met l_∞ samenvalt, dus als snijlijn der beide oppervlakken moet beschouwd worden; l_∞ vervangt dus 120 snijlijnen, die, gevoegd bij de 40 rechten der 20 lijnenparen, een doorsnede van den graad 160 opleveren.

Vraagstuk LXXVI.

L^2 21 b. Wanneer een van vijf punten gelegen is op de hyperboloïde door de hoogtelijnen van het viervlak dat de overige vier punten tot hoekpunten heeft, dan geldt deze eigenschap voor elk dier punten. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. Voor vlakke figuren geldt de stelling: „Als de loodlijnen, uit de hoekpunten van een driehoek op de zijden van „een anderen neergelaten, door een punt gaan, dan zullen ook „de loodlijnen, uit de hoekpunten van den tweeden driehoek „op de zijden van den eersten neergelaten, door een punt „gaan."

Deze stelling kan uitgebreid worden tot figuren op een bol. Eene fraaie oplossing van het vraagstuk zou gegeven kunnen worden, als men van de genoemde stelling der vlakke meetkunde een bewijs had, dat onafhankelijk was van de XIe prop. van Euclides. Bij gebreke daarvan bewijzen wij de stelling voor bolvormige figuren door quaternionrekening op de volgende manier.

2. Laten ABC en $A_1B_1C_1$ twee driehoeken zijn op een bol, die O tot middelpunt heeft, en laten de vlakken door OA loodrecht op OB_1C_1, door OB loodrecht op OC_1A_1 en door OC loodrecht op OA_1B_1, elkander snijden in een straal OD van den bol; dan is te bewijzen, dat de eigenschap wederkeerig is.

Wij stellen door α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, δ de vectoren OA, OB, OC, OA_1, OB_1, OC_1, OD voor. Dat het vlak OAD loodrecht staat op OB_1C_1 wordt uitgedrukt door

$$S\,.\,V\alpha\delta\,V\beta_1\gamma_1 = 0.$$

Evenzoo hebben wij

$$S\,.\,V\beta\delta V\gamma_1\alpha_1 = 0 \text{ en } S\,.\,V\gamma\delta V\alpha_1\beta_1 = 0.$$

Deze vergelijkingen kunnen worden geschreven in den vorm

$$S\,.\,\delta V(\alpha V\beta_1\gamma_1) = 0,\quad S\,.\,\delta V(\beta V\gamma_1\alpha_1) = 0,\quad S\,.\,\delta V(\gamma V\alpha_1\beta_1) = 0.$$

Zoo drukken zij uit, dat δ loodrecht staat op de vectoren

$$V(\alpha V\beta_1\gamma_1),\quad V(\beta V\gamma_1\alpha_1),\quad V(\gamma V\alpha_1\beta_1).$$

Opdat zulk eene δ besta, is noodig en voldoende, dat die drie vectoren in een vlak liggen, dus

$$S\,.\,V(\alpha V\beta_1\gamma_1)\,V(\beta V\gamma_1\alpha_1)\,V(\gamma V\alpha_1\beta_1) = 0,$$

Hiervoor kan men schrijven

$$S\,.\,(\gamma_1 S\alpha\beta_1 - \beta_1 S\alpha\gamma_1)(\alpha_1 S\beta\gamma_1 - \gamma_1 S\beta\alpha_1)(\beta_1 S\gamma\alpha_1 - \alpha_1 S\gamma\beta_1) = 0.$$

Ontwikkelt men het product achter het eerste teeken S, dan vindt men acht termen, waarvan er zes vectoren zijn, dus vervallen. De andere twee hebben den factor $S\alpha_1\beta_1\gamma_1$, welke niet nul mag zijn, anders is $A_1B_1C_1$ geen driehoek. Na deeling door dien factor blijft er over

$$S\alpha\beta_1\, S\beta\gamma_1\, S\gamma\alpha_1 - S\alpha_1\beta\, S\beta_1\gamma\, S\gamma_1\alpha = 0.$$

Deze vergelijking verandert inderdaad niet als men de letters met en zonder indices verwisselt; daarmee is dan de wederkeerigheid der eigenschap bewezen.

3. Tot het eigenlijke voorstel overgaande, noemen wij de vijf punten A, B, C, D, E; E wordt ondersteld te liggen op de hyperboloïde der hoogtelijnen van ABCD; nu moet worden aangetoond, dat D ligt op de hyperboloïde der hoogtelijnen van ABCE. Als richtlijnen der eerste hyperboloïde nemen wij de loodlijnen uit A, B, C op de vlakken BCD, CAD, ABD. De onderstelling is, dat E op eene transversaal van die hoogtelijnen ligt, dus dat de vlakken door de ribben van den drievlakkenhoek (E, ABC) loodrecht op de zijvlakken van (D, ABC) door een lijn gaan. De stelling is, dat D ligt op een transversaal der loodlijnen uit A, B, C op de zijvlakken van den drievlakkenhoek (E, ABC), dus dat de vlakken door de ribben van (D, ABC) loodrecht op de zijvlakken van (E, ABC) door één lijn gaan. De waarheid der stelling blijkt dan uit de boven bewezen eigenschap der bolfiguren, welke men verkrijgt, als men de twee drievlakkenhoeken met hun toppen naar het middelpunt van een bol overbrengt.

Opmerking. De hier gegeven quaternionrekening kan ook dienen om de voorwaarde uit te drukken, waaronder vijf punten de bijzondere ligging hebben van dit vraagstuk; door een der vijf punten veranderlijk te denken heeft men in die voorwaarde tevens de vergelijking der hyperboloïde door de vier hoogtelijnen van een willekeurig gegeven viervlak.

De vergelijking

$$S\alpha\beta_1\, S\beta\gamma_1\, S\gamma\alpha_1 - S\alpha_1\beta\, S\beta_1\gamma\, S\gamma_1\alpha = 0$$

geldt als α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 eenheidsvectoren zijn op de lijnen DA, DB, DC, EA, EB, EC. Daar die vergelijking echter homogeen is ten opzichte van elk der zes vectoren, hindert het niet, als wij α door DA zelf, β door DB enz.

vervangen. Zijn ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 de vectoren uit een willekeurigen oorsprong naar de punten A, B, C, D, E dan wordt de vergelijking vervangen door

$$S(\rho_4 - \rho_1)(\rho_5 - \rho_2)\, S(\rho_4 - \rho_2)(\rho_5 - \rho_3)\, S(\rho_4 - \rho_3)(\rho_5 - \rho_1) -$$
$$- S(\rho_5 - \rho_1)(\rho_4 - \rho_2)\, S(\rho_5 - \rho_2)(\rho_4 - \rho_3)\, S(\rho_5 - \rho_3)(\rho_4 - \rho_1) = 0.$$

Men kan elken factor ontwikkelen naar het model

$$S(\rho_4 - \rho_1)(\rho_5 - \rho_2) = S\rho_4\rho_5 - S\rho_1\rho_5 - S\rho_4\rho_2 + S\rho_1\rho_2;$$

de producten uitwerkende heeft men dan vooreerst 128 termen waarvan er echter 68 tegen elkander wegvallen. Tot de zestig overige behoort

$$S\rho_1\rho_2\, S\rho_2\rho_3\, S\rho_3\rho_4.$$

Hij vertegenwoordigt de permutatie 1234. Men vindt alle termen, als men alle verschikkingen vier aan vier uit de cijfers 12345 opstelt, en de daarmee overeenstemmende producten van scalars opschrijft; een permutatie en haar omgekeerde moeten daarbij als gelijk worden beschouwd; het teeken van het scalarproduct wordt omgekeerd, telkens als men een paar cijfers verwisselt. Zoo geeft bijv. de permutatie 2534 het product $S\rho_2\rho_5 S\rho_5\rho_3 S\rho_3\rho_4$; dit is positief; het wordt door de twee verwisselingen (12) (15) uit de aanvankelijke permutatie 1234 verkregen.

Brengt men de vectoren in den trinomischen vorm $\rho_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ enz., dan worden de scalarproducten aldus in rechthoekige coördinaten uitgedrukt

$$S\rho_1\rho_2 = - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2.$$

Wij bekomen zoodoende de vergelijking der hyperboloïde door de hoogtelijnen van een viervlak in haar eenvoudigsten vorm. Het aantal termen zou 60×27 zijn. De vergelijking is van den tweeden graad ten opzichte van de coördinaten van elk hoekpunt. Als men de vergelijking op eene andere manier zoekt, komt men meestal minder goed terecht. Zoo is uit de oplossing van Vraagstel 72, Deel II, bl. 109 gemakkelijk de vergelijking van de hyperboloïde te vinden, maar men vindt er eene, die ten opzichte van de coördinaten der hoekpunten van den derden graad is. Bij KORTEWEG, Oplossingen van Vraagstukken van BRIOT en BOUQUET, vindt men op blz. 189 de vergelijking in vlakcoördinaten.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. De vier loodlijnen, uit de hoekpunten van een viervlak ABCD op de overstaande zijvlakken neergelaten, hebben hyperboloïdische ligging. Op de door hen bepaalde hyperboloïde H^2, die gewoonlijk de hyperboloïde der hoogtelijnen van het viervlak genoemd wordt, liggen ook de vier loodlijnen, in de hoogtepunten der zijvlakken op die vlakken opgericht en vier andere lijnen l, waarvan elk de snijlijn is der drie vlakken, die bij een der drievlakkenhoeken van 't viervlak de ribben loodrecht op de overstaande zijvlakken projecteeren. Van deze twaalf lijnen behooren de loodlijnen uit de hoekpunten van ABCD op de overstaande zijvlakken tot het eene, de andere acht tot het tweede stelsel lijnen op H^2. Daar de hyperboloïde H^2 gelijkzijdig is, bevat zij ∞^1 drietallen van onderling loodrechte lijnen.

2. Eene gelijkzijdige kubische ruimtehyperbool is eene kubische ruimtekromme, waarvan de drie asymptoten onderling loodrecht zijn. Alle quadratische regelvlakken door zulk eene kromme zullen, omdat op elk hunner een drietal onderling loodrechte lijnen gelegen is, gelijkzijdig zijn; o. a. wordt zij uit elk harer punten door een gelijkzijdigen quadratischen kegel geprojecteerd. Omdat door eene willekeurige kubische ruimtekromme slechts twee dergelijke kegels gaan heeft men de eigenschap: „Wanneer door eene kubische ruimtekromme drie gelijkzijdige kegels gaan, is die kromme een gelijkzijdige kubische hyperbool."

3. Laten nu A, B, C, D en E vijf punten wezen, waarvan gegeven is, dat E ligt op de hyperboloïde der hoogtelijnen van het viervlak ABCD. Door vijf punten eener hyperboloïde kan men twee kubische ruimtekrommen brengen, waarvan de eene de lijnen van het eene, de andere die van het tweede stelsel tot koorden heeft. Door A, B, C, D en E gaat dus eene kubische ruimtekromme, die de loodlijnen in de hoogtepunten der zijvlakken van het viervlak ABCD op deze zijvlakken, dus ook de vier lijnen l tot koorden heeft; deze kromme zal eene gelijkzijdige kubische hyperbool wezen. Immers de kegel, die deze kromme uit A projecteert, gaat door de lijnen AB, AC, AD en ook door de lijn l die bij A behoort; deze kegel moet dus gelijkzijdig zijn. Doch eveneens zijn de kegels,

die de kromme uit B, C en D projecteeren, gelijkzijdig. Daar nu door die kromme vier dergelijke kegels gaan, moet zij eene gelijkzijdige kubische hyperbool zijn.

4. Omdat deze kromme uit elk van haar punten door een gelijkzijdigen kegel geprojecteerd wordt, zal ook de kegel, die haar uit E projecteert, gelijkzijdig zijn. Op de vier kegels, die achtereenvolgens de kromme uit de vier hoekpunten van het viervlak BCDE projecteeren, liggen nu (omdat zij gelijkzijdig zijn) lijnen l_1, l_2, l_3 en l_4, van welke elk de snijlijn is van de drie vlakken, door de ribben van een drievlakkenhoek van 't viervlak loodrecht op de overstaande zijvlakken van 't viervlak aangebracht, en elk dezer lijnen is eene koorde van de kromme. Deze vier lijnen bepalen de hyperboloïde der hoogtelijnen van het viervlak BCDE, welke hyperboloïde de kromme moet bevatten omdat ze acht punten met haar gemeen heeft. A ligt dus ook op de hyperboloïde der hoogtelijnen van het viervlak BCDE.

Opmerking. Uit het voorgaande volgt nog: Opdat men door vijf punten der ruimte eene gelijkzijdige kubische hyperbool kan brengen, moet een dus elk dezer punten gelegen zijn op de hyperboloïde der hoogtelijnen van het viervlak dat door de vier andere punten bepaald wordt.

Vraagstuk LXXVII.

L^2 21 b. Elke hyperboloïde, die door de hoogtelijnen van een viervlak gaat, is hyperboloïde der hoogtelijnen van ∞^4 viervlakken.

(Dr. P. Zeeman Gz.)

Opgelost *door* W. Mantel *en* Dr. P. Zeeman Gz.

Oplossing *van* Dr. P. Zeeman Gz.

Op de hyperboloïde H^2 der hoogtelijnen van het viervlak ABCD nemen wij twee lijnen l en k van hetzelfde stelsel aan; zij λ een vlak, loodrecht op l, dat de lijn k in het punt K en κ een vlak, loodrecht op k, dat de lijn l in het punt L snijdt. De snijlijn der vlakken λ en κ zal nu H^2 in twee punten M en N snijden, die met L en K de hoekpunten vormen van een viervlak LMNK, waarvoor H^2 hyperboloïde der hoogtelijnen is. Immers de hyperboloïde der hoogtelijnen van LMNK heeft met H^2 gemeen de beide lijnen l en k, benevens de

punten M en N; zij zullen dus samenvallen, omdat zij beide gelijkzijdige hyperboloïden zijn.

Daar l en k willekeurige rechten van eenzelfde stelsel zijn en de beide vlakken λ en κ loodrecht op l en k, doch overigens geheel willekeurig, kunnen worden aangenomen, verkrijgt men op deze wijze ∞^4 viervlakken, voor elk van welke H^2 hyperboloïde der hoogtelijnen is; elke lijn op H^2 is loodlijn in ∞^3 dergelijke viervlakken, elk punt op H^2 hoekpunt van ∞^2 viervlakken.

Vraagstuk LXXVIII.

L^2 2 f. Welke betrekkingen moeten tusschen de coëfficienten der vergelijkingen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + 2D'yz + 2E'zx + 2F'xy = 0$$

bestaan, opdat drie gemeenschappelijke rechten dezer kegels een orthogonaal drietal vormen? (Dr. P. Zeeman Gz.)

Oplossing *van* Dr. P. Zeeman Gz.

Allereerst moet elk der kegels gelijkzijdig zijn, m. a. w. op elk hunner moeten ∞^1 drietallen van onderling loodrechte beschrijvende lijnen liggen; derhalve moet $A + B + C = 0$, $A_1 + B_1 + C_1 = 0$ zijn.

Deze beide voorwaarden zijn noodig, doch niet voldoende. Om de verdere voorwaarde te vinden, waaraan de kegels moeten voldoen, opdat zij een orthogonaal drietal van beschrijvende lijnen gemeen hebben, kan men o. a. als volgt te werk gaan.

Stel de kegels hebben gemeen de lijn OP, waarvan de richtingscosinussen zijn α, β, γ, en bovendien drie lijnen OA_1, OB_1 en OC_1, die twee aan twee loodrecht op elkaar staan; de richtingscosinussen van eene dezer drie lijnen, b.v. OA_1, noemen wij $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Het vlak door OP en OA_1 heeft dan tot vergelijking

$$(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)X + (\gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha)Y + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)Z = 0,$$

terwijl het vlak door OB_1 en OC_1, omdat het loodrecht is op OA_1, wordt voorgesteld door

$$\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z = 0.$$

De ontaarde kegel, die uit deze beide vlakken bestaat, nl.

$$\{(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)X+(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)Y+(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)Z\}\{\alpha_1X+\beta_1Y+\gamma_1Z\}=0 \;..\; 1).$$

moet nu deel uitmaken van den kegelbundel die door de beide gegeven kegels bepaald is. In de vergelijking

$$(A+\lambda A_1)x^2+(B+\lambda B_1)y^2+(C+\lambda C_1)z^2+2(D+\lambda D_1)yz+ \\ +2(E+\lambda E_1)zx+2(F+\lambda F_1)xy=0 \quad . \quad . \quad . \; 2),$$

moet λ dus zoo kunnen bepaald worden, dat de beide vergelijkingen 1) en 2) identiek zijn. Daartoe is noodig en voldoende

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=\rho(A+\lambda A_1),\ \gamma_1(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)+\beta_1(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)=2\rho(D+\lambda D_1), \\ \beta_1(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)=\rho(B+\lambda B_1),\ \alpha_1(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+\gamma_1(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=2\rho(E+\lambda E_1), \\ \gamma_1(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)=\rho(C+\lambda C_1),\ \beta_1(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)+\alpha_1(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)=2\rho(F+\lambda F_1). \end{array}\right\} 3)$$

Bovendien moeten α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 ook nog voldoen aan de betrekkingen

$$\left.\begin{array}{l} A\alpha_1^2+B\beta_1^2+C\gamma_1^2+2D\beta_1\gamma_1+2E\gamma_1\alpha_1+2F\alpha_1\beta_1=0, \\ A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+2D\beta\gamma+2E\gamma\alpha+2F\alpha\beta=0, \end{array}\right\} \ldots 4)$$

die uitdrukken, dat de beide lijnen OP en OA_1 op een der beide kegels zijn gelegen. Uit de betrekkingen 4) vindt men, door achtereenvolgens D, E en F te elimineeren en telkens gebruik te maken van de voorwaarde $A+B+C=0$,

$$\left.\begin{array}{l} B\{\beta\gamma(\beta_1^2-\alpha_1^2)-\beta_1\gamma_1(\beta^2-\alpha^2)\}+C\{\beta\gamma(\gamma_1^2-\alpha_1^2)-\beta_1\gamma_1(\gamma^2-\alpha^2)\}- \\ \qquad -2E\gamma\gamma_1(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+2F\beta\beta_1(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)=0, \\ C\{\gamma\alpha(\gamma_1^2-\beta_1^2)-\gamma_1\alpha_1(\gamma^2-\alpha^2)\}+A\{\gamma\alpha(\alpha_1^2-\beta_1^2)-\gamma_1\alpha_1(\alpha^2-\beta^2)\}- \\ \qquad -2F\alpha\alpha_1(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)+2D\gamma\gamma_1(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)=0, \\ A\{\alpha\beta(\alpha_1^2-\gamma_1^2)-\alpha_1\beta_1(\alpha^2-\beta^2)\}+B\{\alpha\beta(\beta_1^2-\gamma_1^2)-\alpha_1\beta_1(\beta^2-\gamma^2)\}- \\ \qquad -2D\beta\beta_1(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)+2E\alpha\alpha_1(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=0. \end{array}\right\} .5)$$

Nu vindt men uit 2)

$$\begin{array}{l} \beta\gamma(\alpha_1^2-\beta_1^2)-\beta_1\gamma_1(\alpha^2-\beta^2)=\rho\{2\beta(F+\lambda F_1)-\alpha(C+\lambda C_1)\}, \\ \gamma\alpha(\beta_1^2-\gamma_1^2)-\beta_1\gamma_1(\beta^2-\gamma^2)=\rho\{2\gamma(D+\lambda D_1)-\beta(A+\lambda A_1)\}, \\ \alpha\beta(\gamma_1^2-\alpha_1^2)-\gamma_1\alpha_1(\gamma^2-\alpha^2)=\rho\{2\alpha(E+\lambda E_1)-\gamma(B+\lambda B_1)\}, \\ \beta\gamma(\gamma_1^2-\alpha_1^2)-\beta_1\gamma_1(\gamma^2-\alpha^2)=\rho\{2\gamma(E+\lambda E_1)-\alpha(B+\lambda B_1)\}, \\ \gamma\alpha(\alpha_1^2-\beta_1^2)-\gamma_1\alpha_1(\alpha^2-\beta^2)=\rho\{2\alpha(F+\lambda F_1)-\beta(C+\lambda C_1)\}, \\ \alpha\beta(\beta^2-\gamma_1^2)-\alpha_1\beta_1(\beta^2-\gamma^2)=\rho\{2\beta(D+\lambda D_1)-\gamma(A+\lambda A_1)\}. \end{array}$$

Substitueert men dit in de vergelijkingen 5), dan gaan deze over in

$$\left.\begin{aligned} \alpha(BC_1 - B_1C) - 2\beta(BF_1 - B_1F) + 2\gamma(CE_1 - C_1E) &= 0, \\ 2\alpha(AF_1 - A_1F) + \beta(CA_1 - C_1A) - 2\gamma(CD_1 - C_1D) &= 0, \\ -2\alpha(AE_1 - A_1E) + 2\beta(BD_1 - B_1D) + \gamma(AB_1 - A_1B) &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots 6)$$

Zal het mogelijk zijn, waarden voor α, β en γ te vinden, die niet alle drie nul zijn en aan 5) voldoen, dan moet de determinant der coëfficienten in de vergelijkingen 6) nul zijn. Het verdwijnen van dien determinant levert met $A + B + C = 0$, $A_1 + B_1 + C_1 = 0$ de gevraagde voorwaarden.

Vraagstuk LXXIX.

L^2 2 f. Aan welke voorwaarden moeten twee concentrische quadratische kegels voldoen, opdat drie gemeenschappelijke raakvlakken loodrecht op elkaar staan. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN.

De oplossing van dit vraagstuk is uit die van het vorige af te leiden met behulp van den supplementairen kegel, d. i. de meetkundige plaats van de lijnen, die in den top loodrecht staan op de raakvlakken van den oorspronkelijken kegel. Is α_1 een gemeenschappelijk raakvlak van de twee kegels K_1 en K_2, dan moet de loodlijn a_1 op α_1 gemeenschappelijke beschrijvende lijn zijn van de twee supplementaire kegels K'_1 en K'_2. Zullen dus K_1 en K_2 drie gemeenschappelijke loodrechte raakvlakken hebben, dan moeten K'_1 en K'_2 drie gemeenschappelijke loodrechte beschrijvende lijnen bevatten.

Is

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0$$

de vergelijking van K_1, dan is de vergelijking van K'_1

$$(BC - D^2)x^2 + (CA - E^2)y^2 + (AB - F^2)z^2 +$$
$$+ 2(EF - AD)yz + 2(FD - BE)zx + 2(DE - CF)xy = 0.$$

Men heeft dus slechts in de voorwaarden van het vorige vraagstuk A, B enz. te vervangen door $BC - D^2$, $CA - E^2$ enz.

Vraagstuk LXXX.

M[s] 5 h α. Brengt men door een willekeurige rechte een veranderlijk vlak, dat van drie onderling rechthoekige assen stukken p, q, r afsnijdt, dan zal het vlak, dat van dezelfde assen stukken $1:p$, $1:q$, $1:r$ afsnijdt, in elk zijner standen osculatievlak zijn van een kubische parabool, waarvan de osculatievlakken in drietallen van onderling loodrechte vlakken kunnen gerangschikt worden. Bepaal de meetkundige plaats van de snijpunten van die drietallen.

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* F. SCHUH *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

De rechte lijn zij bepaald door de beide vergelijkingen

$$ax + by + cz = 1 \quad , \quad a_1x + b_1y + c_1z = 0.$$

Het vlak

$$(ax + by + cz - 1) + \lambda\,(a_1x + b_1y + c_1z) = 0$$

door deze lijn snijdt van de assen OX, OY en OZ stukken p, q, r af, aangewezen door

$$p = \frac{1}{a + \lambda a_1} \quad , \quad q = \frac{1}{b + \lambda b_1} \quad , \quad r = \frac{1}{c + \lambda c_1}.$$

De vergelijking van het vlak, dat van de assen stukken $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ afsnijdt, is derhalve

$$\frac{x}{a + \lambda a_1} + \frac{y}{b + \lambda b_1} + \frac{z}{c + \lambda c_1} = 1 \;\ldots\ldots\; 1).$$

Omdat in deze vergelijking λ tot de derde macht voorkomt, zullen de vlakken, die men voor de verschillende waarden van λ verkrijgt, de osculatievlakken eener kubische ruimtekromme zijn. Voor $\lambda = \infty$ verkrijgt men het vlak in 't oneindige; de ruimtekromme is dus eene kubische parabool.

Neemt men achtereenvolgens λ gelijk aan $-\frac{a}{a_1}$, $-\frac{b}{b_1}$, $-\frac{c}{c_1}$ dan verkrijgt men als osculatievlakken der kubische parabool de coördinatenvlakken, die zooals ondersteld is, onderling loodrecht zijn. Bij deze kromme behoort dus een drietal van

onderling loodrechte osculatievlakken, en daar de osculatievlakken van elke kubische parabool evenwijdig zijn aan de raakvlakken van een quadratischen kegel, moeten er bij de gevonden ruimtekromme ∞^1 dergelijke drietallen van onderling loodrechte osculatievlakken voorkomen.

Zijn nu x_1, y_1, z_1 de coördinaten van een punt der ruimte, waardoor drie dergelijke osculatievlakken gaan, λ_1, λ_2, λ_3 de bij die vlakken behoorende parameterwaarden, dan heeft men volgens 1)

$$\frac{x_1}{a+\lambda_i a_1}+\frac{y_1}{b+\lambda_i b_1}+\frac{z_1}{c+\lambda_i c_1}=1 \quad (i=1,2,3) \quad .2).$$

Daar die osculatievlakken twee aan twee loodrecht op elkaar zijn, heeft men verder

$$\frac{1}{(a+\lambda_1 a_1)(a+\lambda_2 a_1)}+\frac{1}{(b+\lambda_1 b_1)(b+\lambda_2 b_1)}+\frac{1}{(c+\lambda_1 c_1)(c+\lambda_2 c_1)}=0 \,..3)$$

en twee andere betrekkingen, die men hieruit afleidt door cyclische permutatie van λ_1, λ_2 en λ_3.

Uit de betrekkingen 2) vindt men, door ze twee aan twee van elkaar af te trekken,

$$\frac{x_1 a_1}{(a+\lambda_1 a_1)(a+\lambda_2 a_1)}+\frac{y_1 b_1}{(b+\lambda_1 b_1)(b+\lambda_2 b_1)}+\frac{z_1 c_1}{(c+\lambda_1 c_1)(c+\lambda_2 c_1)}=0 \,..4)$$

en twee andere vergelijkingen die hieruit door cyclische permutatie van λ_1, λ_2 en λ_3 ontstaan.

Uit 3) en 4) volgt nu onmiddellijk, dat daaraan alleen kan voldaan zijn, wanneer men heeft

$$x_1 a_1 = y_1 b_1 = z_1 c_1.$$

De meetkundige plaats der snijpunten van drietallen onderling loodrechte osculatievlakken der kubische parabool is dus een rechte lijn door den oorsprong.

Een kubische parabool, welke ∞^1 drietallen van onderling loodrechte osculatievlakken bezit, wordt eene orthogonale kubische parabool en de meetkundige plaats der snijpunten van die drietallen haar richtlijn genoemd.

Ligt de gegeven rechte lijn in 't oneindige of gaat zij door den oorsprong, dan verkrijgt men geene eigenlijke kubische parabool.

Vraagstuk LXXXI.

M³ 5 h α. Bepaal de meetkundige plaats van de richtlijnen der parabolen, die omhuld worden door de rechten, volgens welke een osculatievlak der in N°. 80 bedoelde kubische parabool door de overige osculatievlakken wordt gesneden. (Dr. P. ZEEMAN GZ.)

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Zooals uit de oplossing van het vorige vraagstuk bleek, liggen de snijpunten der drietallen van onderling loodrechte osculatievlakken der bedoelde kubische parabool op de rechte lijn

$$a_1 x = b_1 y = c_1 z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

de richtlijn dier kromme. Zijn V_1, V_2, V_3 de drie onderling loodrechte osculatievlakken, die door een willekeurig punt P der rechte lijn 1) gaan, dan snijden deze een willekeurig osculatievlak V der kubische parabool volgens drie lijnen l_1, l_2, l_3 en zal de projectie P_1 van P op het vlak V het hoogtepunt van den, door deze drie lijnen gevormden, driehoek wezen. Doorloopt nu het punt P de rechte lijn 1) en houdt men het vlak V vast, dan zullen de drie veranderlijke lijnen l_1, l_2, l_3 steeds raaklijnen zijn aan de in V gelegen parabool, die omhuld wordt door de rechte lijnen, volgens welke V door de overige osculatievlakken wordt gesneden. De projectie van de lijn 1) op het vlak V zal verder zijn de meetkundige plaats der hoogtepunten van de door l_1, l_2 en l_3 gevormde en dus om die parabool beschreven driehoeken; derhalve zal die projectie de richtlijn zijn van de in het vlak V gelegen parabool.

Daaruit volgt onmiddelijk dat die richtlijn bepaald wordt door de beide vergelijkingen

$$\frac{x}{a + \lambda a_1} + \frac{y}{b + \lambda b_1} + \frac{z}{c + \lambda c_1} = 1,$$

$$x a_1 (b c_1 - b_1 c)(a + \lambda a_1) + y b_1 (c a_1 - c_1 a)(b + \lambda b_1) + \\ + z c_1 (a b_1 - a_1 b)(c + \lambda c_1) = 0,$$

van welke de eerste een willekeurig osculatievlak V der kubische parabool bepaalt, terwijl de tweede een vlak voorstelt door de lijn 1) en loodrecht op V aangebracht.

De meetkundige plaats dier, in de verschillende osculatie-

vlakken gelegen, richtlijnen verkrijgt men nu door eliminatie van λ uit de beide bovenstaande vergelijkingen. Het resultaat dier eliminatie is, als men stelt $bc_1 - b_1c = A$, $ca_1 - c_1a = B$, $ab_1 - a_1b = C$,

$$\{Ax(a_1x-b_1y)(c_1z-a_1x)+By(b_1y-c_1z)(a_1x-b_1y)+Cz(b_1y-c_1z)(c_1z-a_1x)\}$$
$$\{Aa_1^2x+Bb_1^2y+Cc_1^2z\} - ABC(a_1x-b_1y)(b_1y-c_1z)(c_1z-a_1x)=0.$$

De meetkundige plaats der richtlijnen van de parabolen, die omhuld worden door de rechten, volgens welke een osculatievlak der kubische parabool door de overige osculatievlakken wordt gesneden, is dus een regeloppervlak van den vierden graad. Op dit regeloppervlak is de lijn 1), de richtlijn der kubische parabool, eene drievoudige rechte lijn. Dit blijkt uit de vergelijking van het oppervlak, doch is ook onmiddellijk in te zien. Door een punt P der lijn 1) toch gaan drie onderling loodrechte osculatievlakken V_1, V_2 en V_3; de richtlijnen der in deze osculatievlakken gelegen parabolen zijn de projecties der lijn 1) op die vlakken en deze projecties gaan door P. Door elk punt van de lijn 1) gaan derhalve drie beschrijvende lijnen van het regeloppervlak.

Vraagstuk LXXXII.

M³ 5 h. Wordt een kubische ruimtekromme door elk van twee evenwijdige vlakken in de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek gesneden, dan geldt deze eigenschap voor alle vlakken, die met de eerste twee evenwijdig zijn. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, W. MANTEL *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Men neme een rechthoekig coördinatenstelsel aan, waarbij het vlak XOY evenwijdig is aan de beide vlakken, die elk op de kubische ruimtekromme de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek bepalen; z_1 en z_2 mogen de afstanden dezer beide vlakken tot XOY zijn.

Een willekeurig vlak $Z = z$ snijdt de kromme in drie punten. Is ϕ de hoek, dien de verbindingslijn van twee dezer punten met OX vormt, dan moet tusschen tg ϕ en z eene stelkundige

vergelijking bestaan, die in $\operatorname{tg}\phi$ van den derden graad is, omdat in 't beschouwde vlak drie koorden liggen, en die in z van den eersten graad is, omdat bij eene kubische ruimtekromme geen evenwijdige koorden voorkomen. Die vergelijking zij

$$(A_1z+B_1)\operatorname{tg}^3\phi+(A_2z+B_2)\operatorname{tg}^2\phi+(A_3z+B_3)\operatorname{tg}\phi+(A_4z+B_4)=0\ldots 1)$$

Nu is gegeven, dat voor $z=z_1$ en $z=z_2$ de kubische ruimtekromme met deze vlakken gelijkzijdige driehoeken bepaalt.

Voor die waarden van z moeten dus de wortels der vergelijking 1) zijn van den vorm

$$\operatorname{tg}\phi\ ,\quad \operatorname{tg}(\phi+60^\circ)\ ,\quad \operatorname{tg}(\phi+120^\circ).$$

Daar

$$\operatorname{tg}\phi+\operatorname{tg}(\phi+60^\circ)+\operatorname{tg}(\phi+120^\circ)+3\operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}(\phi+60^\circ)\operatorname{tg}(\phi+120^\circ)=0,$$

en

$$\operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}(\phi+60^\circ)+\operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}(\phi+120^\circ)+\operatorname{tg}(\phi+60^\circ)\operatorname{tg}(\phi+120^\circ)+3=0$$

is, moeten dus voor $z=z_1$ en $z=z_2$ de volgende betrekkingen tusschen de coëfficiënten der vergelijking 1) bestaan

$$A_2z+B_2+3(A_4z+B_4)=0 \text{ en } A_3z+B_3+3(A_1z+B_1)=0\ldots 2).$$

Omgekeerd, bestaan die betrekkingen voor $z=z_1$, $z=z_2$ dan zullen de overeenkomstige vlakken elk met de ruimtekromme de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek vormen. Uit de vier betrekkingen, die men uit 2) voor de beide waarden z_1 en z_2 verkrijgt, volgt nu

$$A_2+3A_4=0,\ B_2+3B_4=0,\ A_3+3A_1=0,\ B_3+3B_1=0.$$

Aan de betrekkingen 2) wordt dus onafhankelijk van z voldaan, d. w. z. voor elk vlak $Z=z$ zullen de drie punten, die dit vlak op de ruimtekromme bepaalt, de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek zijn.

Opmerking van Dr. P. Zeeman Gz. Snijdt men eene willekeurige kubische ruimtekromme door eene reeks evenwijdige vlakken, dan gelden de volgende bekende en vrij eenvoudig te bewijzen eigenschappen [1]):

1. De middelpunten der cirkels beschreven om de driehoeken, die de snijpunten van elk der vlakken van de reeks tot hoek-

[1]) Zie bv. H. Krüger „*Metrische Strahlencongruenzen bei einer cubischen Raumcurve*." Zeitschrift für Math. und Physik, XL, 193. (Red.)

punten hebben, zijn op eene rechte lijn l_1 gelegen. Deze lijn is een middellijn der hyperboloïde door de kromme, waarvan die cirkels een der stelsels cyclische doorsneden vormen.

2. De hoogtepunten dier driehoeken liggen op eene rechte lijn l_2; deze lijn is een koorde der kromme.

In 't algemeen zullen de beide lijnen l_1 en l_2 elkander kruisen.

Komen nu onder de driehoeken, welke door eene reeks evenwijdige vlakken met de kubische ruimtekromme bepaald worden, twee gelijkzijdige driehoeken voor, dan valt voor elk dezer vlakken het hoogtepunt met het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den daarin liggenden driehoek samen. Derhalve zullen ook de beide bij die reeks behoorende lijnen l_1 en l_2 samenvallen; elk vlak dier reeks zal dus de ruimtekromme snijden in drie punten, die de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek zijn. Uit de onder 2. genoemde eigenschap volgt nog, dat eene reeks evenwijdige vlakken met eene willekeurige kubische ruimtekromme steeds twee, doch nimmer meer dan twee rechthoekige driehoeken bepaalt. Reëele driehoeken krijgt men natuurlijk alleen dan, wanneer de koorde l_2 twee reëele punten met de kromme gemeen heeft.

Vraagstuk LXXXIII.

P 6 a. Door de vergelijking

$$(x - x_1)\varphi_1 + (y - y_1)\varphi_2 + (z - z_1)\varphi_3 = 0,$$

waarin φ_1, φ_2, φ_3 geheele rationale functies in x_1, y_1, z_1, van den $(n-1)^{\text{en}}$ graad zijn, wordt een verwantschap tusschen twee ruimten Σ en Σ_1 aangewezen, waarin met elk punt van Σ een oppervlak van den n^{den} graad, met elk punt van Σ_1 een plat vlak overeenkomt. Waaraan zijn de snijpnnten van $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ en $\varphi_3 = 0$ toegevoegd?

(Dr. P. Zeeman Gz.)

Oplossing *van* Dr. P. Zeeman Gz.

Laten x_1, y_1, z_1 de coördinaten zijn van een gemeenschappelijk punt P der drie oppervlakken $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$, $\phi_3 = 0$. Nemen wij een dicht bij P gelegen punt P_1 (x_1+h, y_1+k, z_1+l), dan zal daarmede een bepaald vlak van Σ overeenstemmen. Wij komen nu overeen te zeggen, dat met P overeenstemt datgene, waarin dit vlak overgaat, wanneer men P_1 in eene

willekeurige richting tot P laat naderen, d. i., wanneer men h, k en l tot nul laat naderen, doch zoodanig dat de verhoudingen $\frac{k}{h}$, $\frac{l}{h}$ in 't algemeen eene willekeurige eindige waarde behouden.

Nu is

$$\phi_i(x_1+h,\ y_1+k,\ z_1+l) = h\frac{d\phi^i}{dx_1} + k\frac{d\phi_i}{dy_1} + l\frac{d\phi_i}{dz_1} + \ldots \quad (i=1,2,3)$$

waarin alle volgende termen h, k en l tot hoogere dan de eerste macht bevatten. Substitueeren wij dit in de gegeven vergelijking, dan verkrijgen wij als vergelijking van het aan P_1 toegevoegde vlak

$$\left.\begin{aligned}&(X-x_1)\frac{d\phi_2}{dx_1} + (Y-y_1)\frac{d\phi_2}{dx_1} + (Z-z_1)\frac{d\phi_3}{dx_1} + \\ &+\frac{k}{h}\left\{(X-x_1)\frac{d\phi_1}{dy_1} + (Y-y_1)\frac{d\phi_2}{dy_1} + (Z-z_1)\frac{d\phi_3}{dy_1}\right\} + \\ &+\frac{l}{h}\left\{(X-x_1)\frac{d\phi_1}{dz_1} + (Y-y_1)\frac{d\phi_2}{dz_1} + (Z-z_1)\frac{d\phi_3}{dz_1}\right\} = 0,\end{aligned}\right\} \ldots 1)$$

waarin alle termen zijn weggelaten die, behalve machten van $\frac{k}{h}$ en $\frac{l}{h}$, ook nog h, k en l bevatten, dus, wanneer men deze tot nul laat naderen, toch zouden verdwijnen.

Nadert nu P_1 tot P, dan stelt de vergelijking 1) waarin dan $\frac{k}{h}$ en $\frac{l}{h}$ willekeurige waarden hebben, elk vlak, gaande door het punt P voor; aan dat punt is dus elk daardoor gelegd vlak toegevoegd.

Hebben echter de drie oppervlakken $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$, $\phi_3 = 0$ niet alleen het punt P gemeen, doch gaan zij in dat punt door eene zelfde rechte lijn, zoodat in P twee gemeenschappelijke punten der oppervlakken samenvallen, dan voldoen voor die waarden van x_1, y_1, z_1 de partieele afgeleiden aan drie betrekkingen van den vorm

$$\frac{d\phi_3}{dx_1} = \alpha\frac{d\phi_1}{dx_1} + \beta\frac{d\phi_2}{dx_1}, \quad \frac{d\phi_3}{dy_1} = \alpha\frac{d\phi_1}{dy_1} + \beta\frac{d\phi_2}{dy_1},$$

$$\frac{d\phi_3}{dz_1} = \alpha\frac{d\phi_1}{dz_1} + \beta\frac{d\phi_2}{dz_1}.$$

Substitueert men dit in de vergelijking 1), dan verkrijgt men voor de vergelijking van het aan P_1 toegevoegde vlak

$$\left.\begin{aligned}&\{(X-x_1)+\alpha(Z-z_1)\}\left\{\frac{d\phi_1}{dx_1}+\frac{k}{h}\frac{d\phi_1}{dy_1}+\frac{l}{h}\frac{d\phi_1}{dz_1}\right\}+\\&+\{(Y-y_1)+\beta(Z-z_1)\}\left\{\frac{d\phi_2}{dx_1}+\frac{k}{h}\frac{d\phi_2}{dy_1}+\frac{l}{h}\frac{d\phi_2}{dz_1}\right\}=0\end{aligned}\right\}\ldots 2).$$

Op welke wijze men nu ook het punt P_1 tot P laat naderen, het zal steeds gaan door de rechte lijn

$$X-x_1+\alpha(Z-z_1)=0,\quad Y-y_1+\beta(Z-z_1)=0,$$

en, mits aan $\frac{k}{h}$ en $\frac{l}{h}$ geschikt gekozen waarden worden gegeven, elk vlak door die rechte kunnen voorstellen. Eene uitzondering zal zich nu alleen voordoen, wanneer $\frac{k}{h}$ en $\frac{l}{h}$ zoodanig worden gekozen, dat voldaan is aan

$$\frac{d\phi_1}{dx_1}+\frac{k}{h}\frac{d\phi_1}{dy_1}+\frac{l}{h}\frac{d\phi_1}{dz_1}=0 \text{ en } \frac{d\phi_2}{dx_1}+\frac{k}{h}\frac{d\phi_2}{dy_1}+\frac{l}{h}\frac{d\phi_2}{dz_1}=0,$$

d. w. z. wanneer het punt P_1 langs de gemeenschappelijke raaklijn der oppervlakken in P tot dit punt nadert; in dat geval zal het vlak 2) onbepaald worden.

Hebben de drie oppervlakken $\phi_1=0$, $\phi_2=0$, $\phi_3=0$ niet alleen het punt P, doch ook het raakvlak in dit punt gemeen, dan bestaan voor die waarden van x_1, y_1, z_1 betrekkingen van den vorm

$$\frac{d\phi_2}{dx_1}=m\frac{d\phi_1}{dx_1},\quad \frac{d\phi_2}{dy_1}=m\frac{d\phi_1}{dy_1},\quad \frac{d\phi_2}{dz_1}=m\frac{d\phi_1}{dz_1},$$

$$\frac{d\phi_3}{dx_1}=n\frac{d\phi_1}{dx_1},\quad \frac{d\phi_3}{dy_1}=n\frac{d\phi_1}{dy_1},\quad \frac{d\phi_3}{dz_1}=n\frac{d\phi_1}{dz_1}.$$

De vergelijking 1) gaat in dit geval over in

$$\{(X-x_1)+m(Y-y_1)+n(Z-z_1)\}\left\{\frac{d\phi_1}{dx_1}+\frac{k}{h}\frac{d\phi_1}{dy_1}+\frac{l}{h}\frac{d\phi_1}{dz_1}\right\}=0.$$

Op welke wijze nu ook P_1 tot P nadert, men vindt steeds het vaste vlak $X-x_1+m(Y-y_1)+n(Z-z_1)=0$.

Alleen dan, wanneer $\frac{k}{h}$ en $\frac{l}{h}$ zoo worden gekozen dat $\frac{d\phi_1}{dx_1} + \frac{k}{h}\frac{d\phi_1}{dy_1} + \frac{l}{h}\frac{d\phi_1}{dz_1} = 0$ is, zal het aan P toegevoegde vlak onbepaald zijn.

Vraagstuk LXXXIV.

M² 9 d. Onderzoek het oppervlak dat bepaald wordt door de vergelijking

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

waarin A, B, C, D, E, F geheele rationale functies van den n^{den} graad in z voorstellen. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, F. SCHUH, Dr. H. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* F. SCHUH.

1. We zullen ons onderzoek beperken tot de bijzondere punten van het oppervlak en tot zijn graad, rang en klasse.

Maken we door invoering van $\lambda = 1$ de vergelijking van het oppervlak homogeen, zoodat A, B, C, D, E en F homogene functies van den n^{den} graad in z en λ zijn, dan wordt de vergelijking van het oppervlak

$$H(x, y, z, \lambda) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx\lambda + 2Ey\lambda + F\lambda^2 = 0 \quad .. 1).$$

Men heeft een bijzonder punt, als gelijktijdig voldaan is aan

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} \equiv Ax + By + D\lambda = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y} \equiv Bx + Cy + E\lambda = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} \equiv \frac{\partial A}{\partial z}x^2 + 2\frac{\partial B}{\partial z}xy + \frac{\partial C}{\partial z}y^2 + 2\frac{\partial D}{dz}x\lambda + 2\frac{\partial E}{dz}y\lambda + \frac{\partial F}{dz}\lambda^2 = 0, \quad 4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} \equiv \frac{\partial A}{\partial \lambda}x^2 + 2\frac{\partial B}{\partial \lambda}xy + \frac{\partial C}{\partial \lambda}y^2 + 2\frac{\partial D}{\partial \lambda}x\lambda + 2\frac{\partial E}{\partial \lambda}y\lambda + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\lambda^2 +$$
$$+ 2(Dx + Ey + F\lambda) = 0.$$

De laatste vergelijking zullen wij vervangen door $z\frac{\partial H}{\partial z} + \lambda\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$, dus door

$$Dx + Ey + F\lambda = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5)$$

Aan 2), 3), 4) en 5) wordt voldaan door $x = y = \lambda = 0$. Hieruit blijkt dat het punt in het oneindige der Z-as een bijzonder punt is.

Uit 2), 3) en 5) kan men de verhouding $x : y : \lambda$ oplossen, als voldaan wordt aan

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

Uit deze vergelijking kan men de verhouding $z : \lambda$ oplossen en dus $x : y : z : \lambda$ vinden; deze waarden zullen echter in het algemeen niet aan 4) voldoen.

2. Aan $\Delta = 0$ wordt ook voldaan door $z = \lambda = 0$; dan worden A, B, enz. en $\frac{\partial A}{\partial z}$, $\frac{\partial B}{\partial z}$ enz. allen nul, zoodat dan de vergelijkingen 2), 3), 4) en 5) bevredigd zijn. Hieruit volgt, dat ieder punt van de lijn in het oneindige van het XY-vlak een bijzonder punt is, en dus die lijn in het oneindige een bijzondere rechte.

Dit laatste was te verwachten. Immers het oppervlak is van den $(n+2)^{den}$ graad, terwijl ieder vlak evenwijdig aan het XY-vlak het oppervlak volgens een kegelsnede snijdt, dus nog volgens de n-maal te tellen rechte in het oneindige. Deze lijn is dus een n-voudige rechte van het oppervlak.

Een punt dezer rechte wijzen we door de verhouding $\frac{y}{x} = m$ aan. De n raakvlakken in dat punt vindt men door $y = mx$ te substitueeren, de vergelijking door x^2 te deelen en ten slotte x door oneindig groot te vervangen.

Wij vinden dan

$$G \equiv A + 2Bm + Cm^2 = 0.$$

Dit is een vergelijking van den n^{den} graad in z, die het samenstel der n raakvlakken voorstelt. In het algemeen zijn

deze n raakvlakken verschillend. Is echter ook de discriminant van G nul, dan heeft $G = 0$ twee gelijke wortels, en men krijgt een *klempunt*. Door z en λ te elimineeren uit

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

verkrijgt men een vergelijking van den $2(n-1)^{\text{sten}}$ graad in de coëfficienten der machten van z, dus van den $4(n-1)^{\text{sten}}$ graad in m. Op de oneindig ver gelegen rechte liggen dus $4(n-1)$ *klempunten*.

3. Ieder vlak door deze rechte is raakvlak in twee punten, nl. in de oneindig ver gelegen punten der kegelsnede volgens welke dit vlak het oppervlak snijdt. Beide raakpunten vallen samen als

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$$

is, dus voor $2n$ waarden van z. Er zijn dus $2n$ vlakken, die het oppervlak volgens een parabool snijden; de oneindig ver gelegen punten dezer *parabolen* zijn parabolische punten van het oppervlak.

Een vlak evenwijdig aan het XY-vlak zal het oppervlak volgens twee rechten snijden als voldaan is aan

$$\Delta = 0.$$

Het aantal dezer lijnenparen bedraagt dus $3n$.

4. Het punt in het oneindige van de Z-as ($x = y = \lambda = 0$) is een dubbelpunt van het oppervlak. Immers elke rechte evenwijdig aan de Z-as snijdt het oppervlak in n eindige punten. Zij

$$A = a_0 z^n + a_1 z^{n-1}\lambda + a_2 z^{n-2}\lambda^2 + \ldots + a_{n-1} z\lambda^{n-1} + a_n \lambda^n,$$

terwijl men om B, C enz. te vinden a slechts te vervangen heeft door b, c enz. Een rechte evenwijdig aan de Z-as is raaklijn in het dubbelpunt als de coëfficient van z nul is, dus voor

$$a_0 x^2 + 2b_0 xy + c_0 y^2 + 2d_0 x\lambda + 2e_0 y\lambda + f_0 \lambda^2 = 0.$$

Dit is de vergelijking van den cylinder, die het oppervlak

in het dubbelpunt osculeert. Deze cylinder snijdt het oppervlak volgens vier takken door het dubbelpunt, die raken aan de vier snijlijnen van dezen cylinder met het cylindervlak

$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x\lambda + 2e_1y\lambda + f_1\lambda^2 = 0,$$

en volgens de beide snijlijnen van den raakcylinder met het vlak in het oneindige.

De beide laatstgenoemde rechten vormen een lijnenpaar dat op de n-voudige rechte rust; het aantal dier ontaarde kegelsneden bedraagt dus in het geheel $(3n + 1)$.

5. Het oppervlak is van den $(n + 2)^{\text{den}}$ graad. De rang van het oppervlak wordt gevonden uit de klasse van een willekeurige doorsnede; deze doorsnede is van den graad $(n + 2)$ maar heeft in het snijpunt met de n-voudige rechte een n-voudig punt; de klasse dier doorsnede is dus $(n+2)(n+1) - n(n-1) = 2(2n + 1)$. De *rang* van het oppervlak is dus $2(2n + 1)$.

De klasse van het oppervlak wordt gevonden, door na te gaan hoeveel raakvlakken door een willekeurige rechte l gaan. De raakpunten dier raakvlakken zijn de snijpunten van het oppervlak met de pooloppervlakken van twee op l gelegen punten P_1 en P_2.

Zijn p_1, q_1 en r_1 de coördinaten van P_1, dan is de vergelijking van het eerste pooloppervlak van P_1

$$\begin{aligned} &2p_1(Ax + By + D) + 2q_1(Bx + Cy + E) + \\ &+ r_1\left(\frac{\partial A}{\partial z}x^2 + 2\frac{\partial B}{\partial z}xy + \frac{\partial C}{\partial z}y^2 + 2\frac{\partial D}{\partial z}x + 2\frac{\partial E}{\partial z}y + \frac{\partial F}{\partial z}\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial A}{\partial \lambda}x^2 + 2\frac{\partial B}{\partial \lambda}xy + \frac{\partial C}{\partial \lambda}y^2 + 2\frac{\partial D}{\partial \lambda}x + 2\frac{\partial E}{\partial \lambda}y + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right) + \\ &+ 2(Dx + Ey + F) = 0. \end{aligned}$$

Beide pooloppervlakken zijn van den graad $(n + 1)$, gaan door het punt in het oneindige van de Z-as, en hebben de lijn in het oneindige van het XY-vlak tot $(n - 1)$-voudige rechte. De doorsnede der pooloppervlakken is een kromme van den graad $(n + 1)^2$; de lijn in het oneindige van het XY-vlak behoort echter $(n - 1)^2$ maal tot die doorsnede, zoodat er overblijft een kromme van den graad $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$. Deze kromme snijdt het oppervlak in $4n(n + 2)$ punten, waarvan er echter eenige niet meegeteld moeten worden. De

snijkromme der pooloppervlakken gaat nl. nog door punten van de lijn in het oneindige van het XY-vlak, nl. door die punten waar de volledige doorsnede een $[(n-1)^2+1]$-voudig punt heeft. Dit is het geval als een der $(n-1)$ raakvlakken van het eene pooloppervlak samenvalt met een der $n-1$ raakvlakken van het andere pooloppervlak. Nu is de vergelijking der gezamentlijke $n-1$ raakvlakken in het punt $x:y:z:\lambda=\xi:\eta:0:0$ aan het eerste pooloppervlak van P_1

$$r_1\left(\frac{\partial A}{\partial z}\xi^2+2\frac{\partial B}{\partial z}\xi\eta+\frac{\partial C}{\partial z}\eta^2\right)+\frac{\partial A}{\partial \lambda}\xi^2+2\frac{\partial B}{\partial \lambda}\xi\eta+\frac{\partial C}{\partial \lambda}\eta^2=0$$

en aan het eerste pooloppervlak van P_2

$$r_2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\xi^2+2\frac{\partial B}{\partial z}\xi\eta+\frac{\partial C}{\partial z}\eta^2\right)+\frac{\partial A}{\partial \lambda}\xi^2+2\frac{\partial B}{\partial \lambda}\xi\eta+\frac{\partial C}{\partial \lambda}\eta^2=0.$$

Daar r_1 en r_2 verschillen, moet voor een gemeenschappelijk raakvlak voldaan worden aan

$$\frac{\partial A}{\partial z}\xi^2+2\frac{\partial B}{\partial z}\xi\eta+\frac{\partial C}{\partial z}\eta^2=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7)$$

en

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda}\xi^2+2\frac{\partial B}{\partial \lambda}\xi\eta+\frac{\partial C}{\partial \lambda}\eta^2=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 8)$$

dus aan

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial z} & 2\frac{\partial B}{\partial z} & \frac{\partial C}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial A}{\partial z} & 2\frac{\partial B}{\partial z} & \frac{\partial C}{\partial z} \\ \frac{\partial A}{\partial \lambda} & 2\frac{\partial B}{\partial \lambda} & \frac{\partial C}{\partial \lambda} & 0 \\ 0 & \frac{\partial A}{\partial \lambda} & 2\frac{\partial B}{\partial \lambda} & \frac{\partial C}{\partial \lambda} \end{vmatrix}=0.$$

Dit is een vergelijking van den $4(n-1)^{\text{sten}}$ graad in z, zoodat in $4(n-1)$ punten der lijn in het oneindige van het XY-vlak een der raakvlakken van het eene pooloppervlak tevens raakvlak van het andere pooloppervlak is. Deze $4(n-1)$ punten liggen op de doorsnede van den $4n^{\text{den}}$ graad, en zijn dus snijpunten dier doorsnede met het oorspronkelijke oppervlak,

en wel ieder $(n+1)$-maal, daar in ieder dier punten de genoemde doorsnede aan een der n bladen van het oorspronkelijke oppervlak raakt. Immers de vergelijking der gezamenlijke n raakvlakken aan het oorspronkelijk oppervlak in het punt $x:y:z:\lambda=\xi:\eta:0:0$ is

$$A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2=0,$$

waaraan voldaan wordt, als aan de vergelijkingen 7) en 8) voldaan is.

Van de $4n(n+2)$ snijpunten der $4n^{de}$ graadskromme met het oorspronkelijk oppervlak liggen er dus $4(n-1)(n+1)=4(n^2-1)$ op de lijn in het oneindige van het XY-vlak, die niet als raakpunten meegeteld moeten worden, omdat de ligging dier punten niet afhangt van de keuze der rechte l.

De $4n^{de}$ graadskromme gaat ook nog door het punt in het oneindige der Z-as, daar ieder der pooloppervlakken dat punt bevat. Daar het oorspronkelijk oppervlak in dat punt een cylinderpunt heeft, liggen daar 2 snijpunten, die eveneens onafhankelijk zijn van de keuze van l.

Er blijven dus $4n(n+2)-4(n^2-1)-2=2(4n+1)$ bewegelijke snijpunten over, dus $2(4n+1)$ bewegelijke raakpunten. De *klasse* van het oppervlak is dus $2(4n+1)$.

6. Het oppervlak is geheel daardoor gekenmerkt, dat het van den graad $(n+2)$ is, de lijn in het oneindige van het XY-vlak tot n-voudige rechte, en het punt in het oneindige der Z-as tot dubbelpunt heeft. Immers uit de aanwezigheid der n-voudige rechte volgt, dat x en y hoogstens tot den graad twee in de vergelijking kunnen voorkomen, en uit het bezit van het dubbelpunt, dat z hoogstens tot den graad n voorkomt, waaruit in verband met den graad in x, y en z de gegeven vorm der vergelijking volgt.

Opmerking van Dr. H. de Vries. Dat op de n-voudige rechte $(3n+1)$ lijnenparen rusten is slechts schijnbaar in tegenspraak met de stelling volgens welke een oppervlak van den p^{den} graad met $(p-2)$-voudige rechte $(3p-4)$ lijnenparen bezit [1]. Het aantal dier paren kan nl. bepaald worden door middel van

[1]) R. Sturm, Math. Ann. IV, 250 en J. de Vries, Versl. K. A. v. W. X, 742.

de meetkundige plaats der middelpunten der kegelsneden welke de $(p-2)$-voudige rechte tweemaal snijden. [1]) Bezit het oppervlak nu nog een dubbelpunt, dan bepaalt dit een lijnenpaar, ligt dus op de bedoelde meetkundige plaats; deze snijdt dan het oppervlak tweemaal in het dubbelpunt, terwijl aan deze doorsnijding slechts een lijnenpaar beantwoordt.

Vraagstuk LXXXV.

O 6 a α. Van welk omwentelingsoppervlak zijn de projecties der asymptotische lijnen op een vlak, dat de as loodrecht snijdt, congruente kegelsneden, die in den doorgang der as een brandpunt hebben? (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* F. SCHUH, M. J. VAN UVEN *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* M. J. VAN UVEN.

Kiezen we de z-as tot omwentelingsas en stellen we

$$\sqrt{x^2+y^2} = v, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos u, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin u,$$

dan kunnen we het algemeene omwentelingsoppervlak voorstellen door

$$\left.\begin{aligned} x &= v\cos u \\ y &= v\sin u \\ z &= \phi(v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1).$$

De asymptotische lijnen worden geprojecteerd op een vlak loodrecht op de as in congruente kegelsneden, die een brandpunt in de as hebben.

De vergelijking van zulk een kegelsnede is

$$v = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(u+\theta)} \quad \ldots\ldots\ldots 2).$$

Hier stelt p den parameter, ε de excentriciteit voor. Wegens de congruentie hebben p en ε voor alle kegelsneden dezelfde waarden. θ is de hoek, dien de groote as van een kegelsnede met het XY-vlak maakt.

[1]) J. DE VRIES, t. a. p.

De differentiaalvergelijking van deze kegelsneden is blijkbaar

$$\{1 + \varepsilon \cos(u + \theta)\}\, dv - \varepsilon v \sin(u + \theta)\, du = 0,$$

waaruit met behulp van 2) nog θ moet geëlimineerd worden. Het resultaat van deze eliminatie is

$$\frac{dv^2}{du^2} = \frac{v^2}{p^2}(\varepsilon^2 v^2 - p^2 + 2pv - v^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Nu is de differentiaalvergelijking der asymptotische lijnen

$$\mathrm{L}du^2 + 2\mathrm{M}du\,dv + \mathrm{N}dv^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4),$$

waarin L, M en N voldoen aan

$$\mathrm{L} : \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, & \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \mathrm{M} : \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{N} : \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, & \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Uit 1) leiden we af

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = -v^2 \phi'(v); \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = -v\phi''(v).$$

We krijgen dus

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}} = v\frac{\phi'(v)}{\phi''(v)} \text{ en } \mathrm{M} = 0.$$

De vergelijking 4) gaat nu over in

$$\frac{dv^2}{du^2} = -v\frac{\phi'(v)}{\phi''(v)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5).$$

Brengen we 5) in verband met 3), dan vinden we

$$\frac{\phi''(v)}{\phi'(v)} = -\frac{p^2}{v(\varepsilon^2 v^2 - p^2 + 2pv - v^2)},$$

waaruit volgt

$$\phi'(v) = e^{-p^2 \int \frac{dv}{v(\varepsilon^2 v^2 - p^2 + 2pv - v^2)}} = K \,.\, v(\varepsilon v + v - p)^{-\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}} (\varepsilon v - v + p)^{\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}},$$

zoodat

$$\phi(v) = K \int v \{(\varepsilon+1)v - p\}^{-\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}} \{(\varepsilon-1)v + p\}^{\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}} dv = K \times I + K',$$

of

$$\phi(v) = K \frac{\{(\varepsilon-1)v + p\}^{\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}} \{(\varepsilon+1)v - p\}^{\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}}}{\varepsilon^2 - 1} + K'.$$

Hier kan men $K' = 0$ stellen. Immers, omdat $z = \phi(v)$ is, komt dit neer op een translatie van het oppervlak in de richting OZ. In rechthoekige coördinaten is de vergelijking van het oppervlak dus

$$z = c\{(\varepsilon-1)\sqrt{x^2+y^2} + p\}^{\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}} \{(\varepsilon-1)\sqrt{x^2+y^2} - p\}^{\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}}.$$

Voor $\varepsilon > 1$ is $\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} > 0$, zoodat de teller van I niet oneindig groot kan worden, tenzij voor $v = \infty$.

Voor $\varepsilon < 1$ is $\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} < 0$, waaruit volgt, dat, voor 't geval de bedoelde kegelsneden ellipsen zijn, de uitdrukking I oneindig groot wordt wanneer men heeft

$$(\varepsilon+1)v - p = 0,$$

of

$$v = \frac{p}{\varepsilon+1}.$$

Voor $\varepsilon = 1$ wordt I oneindig groot. We keeren daarom terug tot de uitdrukking voor $\phi'(v)$; deze wordt

$$\phi'(v) = K \frac{v}{2v - p},$$

waaruit volgt

$$\phi(v) = K[2v + p \log(2v - p)] + K'.$$

Uit $I = \left\{\frac{(\varepsilon - 1)v + p}{(\varepsilon + 1)v - p}\right\}^{\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}} . \{(\varepsilon + 1)v - p\}$ volgt, dat voor $v = \infty$ deze uitdrukking imaginair wordt, wanneer $\varepsilon < 1$, en voor $v = 0$, wanneer $\varepsilon > 1$ is.

Vraagstuk LXXXVI.

M¹ 7 b. In SALMON—FIEDLER, Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven (2e Aufl bl. 90) wordt beweerd dat de omhullende der osculatiekoorden van de ellips een kromme is van den 6en graad en de 6e klasse, met vier buigpunten, vier keerpunten, zes dubbelpunten en zes dubbelraaklijnen. Toon de onjuistheid dezer bewering aan. (Dr. P. ZEEMAN GZ.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, F. SCHUH *en* Dr P. ZEEMAN GZ.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Zijn $x = a \cos \phi$, $y = b \sin \phi$ de coördinaten van een punt P der ellips, uitgedrukt in den bekenden parameter ϕ, dan is de vergelijking der bij P behoorende osculatiekoorde, omdat zij symmetrisch is met de raaklijn der ellips in P ten opzichte van de assen der ellips,

$$\frac{x}{a} \cos \phi - \frac{y}{b} \sin \phi = \cos 2\phi.$$

Voert men hier een nieuwen parameter $t = \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}$ in, dan verkrijgt men als vergelijking der rechte lijn, waarvan de omhullende moet worden onderzocht

$$\frac{x}{a}(1 - t^4) - 2\frac{y}{b} t(1 + t^2) = 1 - 6t^2 + t^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; 1)$$

Door een willekeurig punt van 't vlak gaan derhalve vier raaklijnen van deze kromme; zij is van de *vierde klasse.* De coördinaten van een punt der kromme, in functie van t, worden gevonden uit 1) en de vergelijking, die men daar-

uit door differentiatie ten opzichte van t verkrijgt. Men vindt

$$\frac{x}{a} = \frac{(1-t^2)(1+10t^2+t^4)}{(1+t^2)^3}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{2t(3-2t^2+3t^4)}{(1+t^2)^3}, \quad ..2)$$

waaruit blijkt, dat de kromme van den *zesden graad* is. Zij is verder, daar de coördinaten van een punt rationale functies van den parameter t zijn, eene unicursale kromme; het *geslacht der kromme is dus nul.*

Met behulp van de formules van PLÜCKER blijkt nu onmiddellijk, dat zij *vier dubbelpunten*, *zes keerpunten*, *drie dubbelraaklijnen* en *geen buigpunt* heeft.

Uit de vergelijkingen 1) en 2) kan men eenvoudig afleiden, waar de dubbelpunten, de keerpunten en de dubbelraaklijnen der kromme zijn gelegen. Zoo blijkt uit 1), dat die rechte een dubbelraaklijn zal zijn, wanneer men waarden t_1 en t_2 heeft, welke voldoen aan

$$\frac{1-t_1^4}{1-t_2^4} = \frac{2t_1(1+t_1^2)}{2t_2(1+t_2^2)} = \frac{1-6t_1^2+t_1^4}{1-6t_2^2+t_2^4}.$$

Hieraan wordt voldaan:

1e. door $t_1 = \pm i$, $t_2 = \mp i$; dit geeft de lijn in 't oneindige;

2e. door $t_1 = -1 \pm \sqrt{2}$, $t_2 = 1 \mp \sqrt{2}$; dit levert $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$;

3e. door $t_1 = 1 \pm \sqrt{2}$, $t_2 = 1 \mp \sqrt{2}$; dit levert $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Uit de vergelijkingen 2) of uit de vergelijking der kromme in rechthoekige coördinaten, nl.

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 4\right)^3 + 27\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = 0,$$

vindt men verder, dat de zes keerpunten samenvallen met de raakpunten der drie dubbelraaklijnen, terwijl de vier dubbelpunten imaginair zijn; voor hun coördinaten toch vindt men:

$$x = \pm 2ai\sqrt{2}, \; y = 0 \text{ en } x = 0, \; y = \pm 2bi\sqrt{2}.$$

OPMERKING VAN Dr. W. BOUWMAN. In een artikel van F. J. VAN DEN BERG (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, Deel XIX, 1891, bl. 82, is de onjuistheid der in SALMON-FIEDLER bij dit voorbeeld opgegeven getallen reeds aangetoond.

Vraagstuk LXXXVII.

R 1 6. Gegeven een lichaam van onveranderlijken vorm, dat zich op een willekeurige wijze beweegt. De meetkundige plaats te bepalen van de punten, welke door een daarin aangrijpende impulsie een in grootte en richting gegeven snelheid verkrijgen, terwijl de nieuwe schroefas evenwijdig is aan de oorspronkelijke.

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* F. SCHUH *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Wij nemen het zwaartepunt G als oorsprong en de hoofdtraagheidsassen van G als assen van een rechthoekig coördinatenstelsel aan.

Stel dat de snelheidscomponenten van G aanvankelijk u, v en w en de rotatiesnelheden om de assen ϕ, ψ en χ zijn; verder $\bar{X}$, $\bar{Y}$ en $\bar{Z}$ de componenten der in P aangrijpende impulsie, m de massa van het lichaam en ρ_x, ρ_y en ρ_z de hoofdtraagheidsstralen. Dan worden de snelheidscomponenten u', v' en w' van G, en de rotatiesnelheden ϕ', ψ' en χ' om de assen tengevolge van de impulsie

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + \frac{\bar{X}}{m}, \\ v' &= v + \frac{\bar{Y}}{m}, \\ w' &= w + \frac{\bar{Z}}{m}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \phi + \frac{\bar{Z}y - \bar{Y}z}{m\rho_x^2}, \\ \psi' &= \psi + \frac{\bar{X}z - \bar{Z}x}{m\rho_y^2}, \\ \chi' &= \chi + \frac{\bar{Y}x - \bar{X}y}{m\rho_z^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Opdat de nieuwe schroefas evenwijdig zij aan de oorspronkelijke, moet $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\psi'}{\psi} = \frac{\chi'}{\chi}$ zijn, dus

$$\left.\begin{aligned} \bar{Z}y - \bar{Y}z &= mk\rho_z^2\phi, \\ \bar{X}z - \bar{Z}x &= mk\rho_y^2\psi, \\ \bar{Y}x - \bar{X}y &= mk\rho_z^2\chi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Is $k \neq 0$, dan kan aan deze vergelijkingen alleen voldaan worden, als men heeft

$$x\rho_z^2\phi + y\rho_y^2\psi + z\rho_z^2\chi = 0, \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

dus als P in een door O gaand vlak gelegen is, en wel in het middelvlak der traagheidsellipsoïde $x^2\rho_z^2 + y^2\rho_y^2 + z^2\rho_z^2 = 1$, dat toegevoegd is aan de schroefas als richting van een koordenstelsel.

De algemeene oplossing der vergelijkingen 3), als aan 4) voldaan wordt, is

$$\left.\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{mk}{x^2+y^2+z^2}\{z\rho_y^2\psi - y\rho_z^2\chi\} + mlx, \\ \bar{Y} &= \frac{mk}{x^2+y^2+z^2}\{x\rho_z^2\chi - z\rho_z^2\phi\} + mly, \\ \bar{Z} &= \frac{mk}{x^2+y^2+z^2}\{y\rho_z^2\phi - x\rho_y^2\psi\} + mlz, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 5)$$

waarin l, evenals k, een willekeurige constante is. Volgens 1) en 2) krijgt men dus

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + lx + \frac{k}{x^2+y^2+z^2}\{z\rho_y^2\psi - y\rho_z^2\chi\}, \\ v' &= v + ly + \frac{k}{x^2+y^2+z^2}\{x\rho_z^2\chi - z\rho_z^2\phi\}, \\ w' &= w + lz + \frac{k}{x^2+y^2+z^2}\{y\rho_z^2\phi - x\rho_y^2\psi\}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 6)$$

$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \phi(1+k), \\ \psi' &= \psi(1+k), \\ \chi' &= \chi(1+k). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Nu voldoen de snelheidscomponenten v'_x, v'_y en v'_z, die het punt P door de impulsie verkrijgt, aan

$$v'_x = u' + z\psi' - y\chi',$$
$$v'_y = v' + x\chi' - z\phi',$$
$$v'_z = w' + y\phi' - x\psi',$$

zoodat men met behulp van 6) en 7) verkrijgt

$$\left.\begin{aligned} v'_x &= u + lx + \frac{k}{x^2+y^2+z^2}(z\rho_y^2\psi - y\rho_z^2\chi) + (1+k)(z\psi - y\chi), \\ v'_y &= v + ly + \frac{k}{x^2+y^2+z^2}(x\rho_z^2\chi - z\rho_x^2\phi) + (1+k)(x\chi - z\phi), \\ v'_z &= w + lz + \frac{k}{x^2+y^2+z^2}(y\rho_x^2\phi - x\rho_y^2\psi) + (1+k)(y\phi - x\psi). \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

In deze drie vergelijkingen zijn k en l willekeurige parameters; x, y en z de onbekenden, terwijl de overige grootheden gegeven zijn. Dus moeten x, y en z voldoen aan de vergelijking, die men verkrijgt door k en l te elimineeren. Deze vergelijking luidt

$$\begin{vmatrix} v'_x - u - (z\psi - y\chi), & x, & z\rho_y^2\psi - y\rho_z^2\chi + (z\psi - y\chi)(x^2+y^2+z^2) \\ v'_y - v - (x\chi - z\phi), & y, & x\rho_z^2\chi - z\rho_x^2\phi + (x\chi - z\phi)(x^2+y^2+z^2) \\ v'_z - w - (y\phi - x\psi), & z, & y\rho_x^2\phi - x\rho_y^2\psi + (y\phi - x\psi)(x^2+y^2+z^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Zij laat zich herleiden tot

$$\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)\{\rho_z^2\phi(v'_x - u - z\psi + y\chi) + \rho_y^2\psi(v'_y - v - x\chi + z\phi) + \\ &+ \rho_z^2\chi(v'_z - w - y\phi + x\psi) + (x^2+y^2+z^2)[\phi(v'_x - u) + \psi(v'_y - v) + \\ &+ \chi(v'_z - w)] - (\phi x + \psi y + \chi z)\{x(v'_x - u) + y(v'_y - v) + z(v'_z - w)]\} - \\ &- (x\rho_z^2\phi + y\rho_y^2\psi + z\rho_z^2\chi)[x(v'_x - u) + y(v'_y - v) + z(v'_z - w)]. \end{aligned}$$

Nu is echter ook voldaan aan 4) Daar x, y en z niet allen nul zijn, daar anders volgens 3) $k = 0$ zou wezen, welk geval we voorloopig hebben uitgesloten, kunnen we door $x^2+y^2+z^2$ deelen en vinden

$$\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)(a\phi + b\psi + c\chi) - (\phi x + \psi y + \chi z)(ax + by + cz) + \\ &+ p(a - z\psi + y\chi) + q(b - x\chi + z\phi) + r(c - y\phi + x\psi) = 0. \quad . \; . \; 9) \end{aligned}$$

Hierin is

$$a = v'_x - u \quad ; \quad b = v'_y - v \quad ; \quad c = v'_z - w.$$

$$p = \rho_x^2 \phi \quad ; \quad q = \rho_y^2 \psi \quad ; \quad r = \rho_z^2 \chi.$$

De meetkundige plaats is dus de snijlijn van het platte vlak 4) met het quadratische oppervlak 9), dus *een kegelsnede.*

Beschouwen wij x, y en z als de componenten van een vector $\bar{A}$; a, b en c als de componenten van een vector $\bar{B}$; ϕ, ψ en χ als de componenten van een vector $\bar{C}$; en p, q en r als de componenten van een vector $\bar{D}$, waar de streep aangeeft, dat een vector bedoeld is, terwijl de streep wordt weggelaten, als de scalarwaarde bedoeld is. Door invoering van het sinusproduct en cosinusproduct kan de vergelijking 9) ook geschreven worden

$$A^2 \cos_\pi (\bar{B}, \bar{C}) - \cos_\pi (\bar{C}, \bar{A}) . \cos_\pi (\bar{B}, \bar{A}) + \cos_\pi (\bar{D}, \bar{B}) +$$
$$+ \cos_\pi [\bar{D}, \sin_\pi (\bar{A}, \bar{C})] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9^*)$$

Deze vergelijkiug is onafhankelijk van het coördinatenstelsel, zoodat bij invoering van een ander rechthoekig coördinatenstelsel met G als oorsprong uit 9)* weer de vergelijking 9) ontstaat, maar nu voor willekeurige rechthoekige assen. De grootheden x, y, z, ϕ, ψ, χ, a, b en c hebben dan op de nieuwe assen betrekking, terwijl nu p, q en r de componenten volgens de nieuwe assen van den vector $\bar{D}$ voorstellen. We zijn nu vrij in de keus van het coördinatenstelsel, en kunnen dus het YZ-vlak loodrecht op den vector $\bar{D}$ plaatsen, waardoor $q = r = 0$ wordt; verder kunnen we nog het XY-vlak evenwijdig aan de schroefas nemen, waardoor $\chi = 0$ wordt. De meetkundige plaats wordt dan de snijlijn van

$$x = 0$$

en

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a\phi + b\psi) - (\phi x + \psi y)(ax + by + cz) + p(a - z\psi) = 0,$$

dus een kegelsnede in het YZ-vlak, waarvan de vergelijking is

$$a\phi y^2 + (a\phi + b\psi) z^2 - c\psi yz - p\psi z + pa = 0.$$

Behalve deze kegelsnede in het aan de schroefas toegevoegde middelvlak der traagheidsellipsoïde bestaat de meetkundige plaats nog uit een tweede gedeelte, dat men verkrijgt door

$k = 0$ te stellen. Voor $k = 0$ behoeft de vergelijking 4) niet bevredigd te zijn. De vergelijkingen 8) leveren dan, als men weer $v'_z - u = a$ stelt, enz.

$$\left.\begin{aligned} a &= lx + z\psi - y\chi, \\ b &= ly + x\chi - z\phi, \\ c &= lz + y\phi - x\psi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Deze drie vergelijkingen kan men door invoering van vectoren schrijven in den vorm

$$\bar{B} = l\bar{A} - \sin\pi\,(\bar{C},\ \bar{A}),$$

welke vergelijking van het coördinatenstelsel onafhankelijk is. Bij ontbinding volgens willekeurige onderling loodrechte assen krijgt men de vergelijkingen 10) terug, die dus voor een willekeurig rechthoekig assenstelsel met G als oorsprong gelden. We kunnen dus een assenstelsel invoeren, waarvan de X-as evenwijdig loopt aan de schroefas, zoodat $\psi = \chi = 0$ wordt, terwijl we het XY-vlak evenwijdig aan den vector $\bar{B}$ kiezen, waardoor $c = 0$ wordt. De vergelijkingen 10) worden dan

$$\left.\begin{aligned} a &= lx, \\ b + z\phi &= ly, \\ -y\phi &= lz. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

De vergelijking der meetkundige plaats vindt men door l te elimineeren; zij is

$$\left\| \begin{matrix} a\ , & x \\ b + z\phi\ , & y \\ -y\phi\ , & z \end{matrix} \right\| = 0.$$

De meetkundige plaats is dus een kubische ruimtekromme en wel de snijkromme der volgende drie quadratische oppervlakken

$$\phi\,(y^2 + z^2) + bz = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

$$\phi xy + az = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

$$\phi xz + bx - ay = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

Uit 12) ziet men, dat de kromme op een cirkelcylinder ligt, waarvan de X-as een beschrijvende lijn is, en de as in het

XZ-vlak ligt; dit deel der meetkundige plaats is dus een *kubische cirkel.*

Door uit 11) x, y en z op te lossen, krijgt men de volgende parametervoorstelling voor de punten der kromme

$$x = \frac{a}{l},$$

$$y = \frac{bl}{l^2 + \phi^2},$$

$$z = \frac{-b\phi}{l^2 + \phi^2}.$$

Hieruit ziet men, dat de eenige bestaanbare asymptoot ($l = 0$) der kromme een rechte in het XZ-vlak, evenwijdig aan de X-as is, nl.

$$y = 0 \quad , \quad z = -\frac{b}{\phi}.$$

Verder is de kromme symmetrisch ten opzichte van de Z-as, zooals blijkt als men l vervangt door $-l$, terwijl men door $l = \infty$ te stellen ziet, dat de kromme door G gaat.

Stelt men $l = \phi \cot \alpha$, dan wordt de parametervoorstelling

$$x = \frac{a}{\phi} \operatorname{tang} \alpha,$$

$$y = \frac{b}{2\phi} \sin 2\alpha,$$

$$z = -\frac{b}{2\phi}(1 - \cos 2\alpha),$$

waaruit men ziet, dat de kromme een op den cirkelcylinder opgerolde tangenslijn is, zoo dat het buigpunt der tangenslijn in G komt, en de beide asymptoten na het oprollen samenvallen. De raaklijn in G aan de kromme loopt evenwijdig aan den vector $\overline{B}$. Als men het geval $\phi = 0$, waarin de aanvankelijke beweging een translatie is, voorloopig uitsluit, ontaardt de kromme alleen dan, als de raaklijn in G loodrecht op of evenwijdig aan de X-as loopt, dus als de vectoren $\overline{B}$ en $\overline{C}$ loodrecht op of evenwijdig aan elkaar loopen. In het eerste geval is $a = 0$, en de kromme ontaardt in een cirkel van het YZ-vlak

en een hem loodrecht snijdende rechte (deze rechte verkrijgt men voor een impulsie nul, daar de punten dier rechte de gegeven snelheid reeds hebben). In het tweede geval is $b = 0$, en de kromme ontaardt in de X-as, zoodat nu de meetkundige plaats een rechte door G evenwijdig aan den vector C is.

Men overtuigt zich gemakkelijk dat de kromme rechts gewonden is, als a en ϕ hetzelfde teeken hebben, dus de vectoren B en C een scherpen hoek insluiten; in het tegenovergestelde geval is de kromme links gewonden. M. a. w. volgt men, bij G beginnende, de kromme in de richting van $\overline{B}$, dan voert men bij het doorloopen een wenteling uit tegengesteld aan die der schroefbeweging.

De gevraagde meetkundige plaats bestaat dus uit twee deelen: een kegelsnede in een vlak door G loodrecht op de as van maximum moment, aangevend de punten, waar de impulsie moet aangrijpen, als de rotatiesnelheid van het lichaam verandert; en een kubische ruimtekromme door G, met een asymptoot, evenwijdig aan de schroefas, aangevend de punten waar de impulsie moet aangrijpen, als niet alleen de schroefas zich evenwijdig verplaatst, maar ook de rotatiesnelheid dezelfde blijft.

In het bijzondere geval, dat $\phi = \psi = \chi = 0$, dus de aanvankelijke beweging een translatie, en dus de schroefas onbepaald is, zijn $\overline{X}$, $\overline{Y}$ en $\overline{Z}$ willekeurig, zoodat men in ieder punt een zoodanige impulsie kan doen aangrijpen, dat de nieuwe schroefas evenwijdig is aan de oorspronkelijke, en dit punt een gegeven snelheid krijgt. De meetkundige plaats wordt nu gevormd door alle punten der ruimte.

Vraagstuk LXXXVIII.

L' 16 b. Van een ellips zijn OA en OB de halve assen. Op het verlengde van OA zet men een stuk AC = OB uit en beschrijft een cirkel met OC als middellijn. Men verbindt nu een willekeurig punt D van dien cirkel met O en met A. Snijdt DA den cirkel nog in E, dan is AE de lengte van de halve middellijn der ellips, die langs OD, en AD de lengte van de halve middellijn, die langs OE valt.

Men vraagt een meetkundig bewijs van deze constructie, welke door den Oostenrijkschen generaal-majoor VON ARBTER in „Mitthei-

lungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens", Jahrgang 1900, S. 719, is medegedeeld. (C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, T. J. ALLERSMA, H. B. BONE Jr., Dr. W. BOUWMAN, H. BREMEKAMP, J. A. KERKHOVEN, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossingen.

I. Verplaatst men den driehoek OEC zoo dat E in O komt en EC langs OC valt, dan zal, wegens de gelijkheid der hoeken DEC en DOC, EA langs OD vallen. Komen door deze verplaatsing de punten O, A, C in O', A', C', achtereenvolgens op OB, OD en OC, dan is $O'A' = OA = a$ en $A'C' = AC = b$. Volgens een bekende constructie is A' een punt der ellips, zoodat EA inderdaad de lengte der halve middellijn langs OD aangeeft (H. B. B. en C. S.)

II. Laat men den cirkel, die OC tot middellijn heeft, rollen langs de binnenzijde van den cirkel, die O tot middelpunt en OC tot straal heeft, dan beschrijft A de bedoelde ellips, terwijl D en E zich langs OD en OE verplaatsen. Komt gedurende deze beweging A in het op OD gelegen punt A_1, terwijl D en E in D_1 en E_1 komen, dan valt A_1D_1 langs OD, omdat D steeds op OD blijft. Dus ligt ook E_1 op OD en wel in O, daar E steeds op OE blijft. Derhalve is $OA_1 = EA$ de halve middellijn langs CD.

(C. v. A., H. B., J. A. K., E. J. M. v. D. L. en F. S.)

OPMERKING. Neemt men het punt C op OA, zoodat dus $OC = a - b$ wordt, dan blijven constructie en bewijs geldig. [1])

(C. S.)

Vraagstuk LXXXIX.

K 1 c. P is een punt van den om driehoek ABC beschreven cirkel. Drie rechten, die door een der punten van BROCARD achtereenvolgens met AP, BP, CP evenwijdig loopen, snijden de zijden

[1]) Dit is ook door VON ARBTER opgemerkt. (C. v. A.)

CA, AB, BC en AB, BC, CA in de collineaire drietallen A_1, B_1, C_1 en A_2, B_2, C_2. Men vraagt dit te bewijzen.

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL *en* H. B. BONE Jr.

Oplossing *van* H. B. BONE Jr.

Zij Ω het eerste punt van BROCARD van $\triangle$ ABC, zoodat

$$\angle CB\Omega = \angle BA\Omega = \angle AC\Omega = \omega \text{ is.}$$

Dan is $\angle A\Omega C = 180° - \alpha$, waar α den hoek BAC aanduidt. Stel $\angle PA\Omega = \angle A\Omega A_1 = \phi$, dan is

$$\frac{AA_1}{A_1C} = \frac{\triangle A\Omega A_1}{\triangle A_1\Omega C} = \frac{A\Omega \sin\phi}{C\Omega \sin(\alpha+\phi)}. \quad \ldots\ldots\ldots 1)$$

Blijkbaar is $\angle A_1\Omega B_1 = \angle APB = \angle \gamma$, dus

$\angle A\Omega B_1 = \gamma - \phi$, $\angle B_1\Omega B = 180° - \beta - (\gamma - \phi) = \alpha + \phi$, en

$$\frac{BB_1}{B_1A} = \frac{B\Omega \sin(\alpha+\phi)}{A\Omega \sin(\gamma-\phi)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

Eindelijk is $\angle B_1\Omega C_1 = 180° - \angle BPC = \alpha$, dus $\angle B\Omega C_1 = \angle B\Omega B_1 - \angle B_1\Omega C = \alpha + \phi - \alpha = \phi$ en $\angle C\Omega C_1 = 180° - \gamma + \phi$, dus

$$\frac{CC_1}{C_1B} = -\frac{C\Omega \sin(\gamma-\phi)}{B\Omega \sin\phi}. \quad \ldots\ldots\ldots 3)$$

Uit 1), 2) en 3) volgt

$$\frac{AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1}{A_1C \,.\, B_1A \,.\, C_1B} = -1$$

en hieruit, in verband met 't omgekeerde van de stelling van MENELAUS, de collineaire ligging van het puntendrietal $A_1B_1C_1$. Het tweede drietal $A_2B_2C_2$ vindt men door uit te gaan van het 2e punt van BROCARD.

Vraagstuk XC.

K 4. Op de zijden van driehoek $A_1A_2A_3$ heeft men buitenwaarts de vierkanten $A_2A_3B_1C_1$, $A_3A_1B_2C_2$, $A_1A_2B_3C_3$, en daarna op B_2C_3,

B_3C_1, B_1C_2 buitenwaarts de vierkanten $B_2C_3D_1E_1$, $B_3C_1D_2E_2$, $B_1C_2D_3E_3$ beschreven. Men vraagt den driehoek $A_1A_2A_3$ te construeeren als de middens der rechten D_2E_3, D_3E_1, D_1E_2 gegeven zijn.

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Oplossing *van* Dr. H. VAN AUBEL.

Neemt men voor de equipollenties

$$A_3B_1 = A_2C_1 = iA_3A_2\ ,\quad A_1B_2 = A_3C_2 = iA_1A_3\ ,\quad A_2B_3 = A_1C_3 = iA_2A_1$$

eenen willekeurigen oorsprong, dan verkrijgt men

$$B_1 = iA_2 + (1-i)A_3,\quad C_1 = (1+i)A_2 - iA_3,$$
$$B_2 = iA_3 + (1-i)A_1,\quad C_2 = (1+i)A_3 - iA_1,$$
$$B_3 = iA_1 + (1-i)A_2,\quad C_3 = (1+i)A_1 - iA_2.$$

Evenzoo vindt men

$$D_1 = iB_2 + (1-i)C_3,\quad E_1 = (1+i)B_2 - iC_3,$$

en door substitutie

$$D_1 = (3+i)A_1 - (1+i)A_2 - A_3,\quad E_1 = (3-i)A_1 - A_2 - (1-i)A_3;$$

dus ook

$$D_2 = -A_1 + (3+i)A_2 - (1+i)A_3,\quad E_2 = -(1-i)A_1 + (3-i)A_2 - A_3,$$
$$D_3 = -(1+i)A_1 - A_2 + (3+i)A_3,\quad E_3 = -A_1 - (1-i)A_2 + (3-i)A_3.$$

Brengt men de waarden van D_2, E_3 in de equipollentie $M_1 = \frac{1}{2}(D_2 + E_3)$ over, dan heeft men

$$M_1 = -A_1 + (1+i)A_2 + (1-i)A_3. \quad \ldots\ldots\ 1)$$

Evenzoo

$$M_2 = (1-i)A_1 - A_2 + (1+i)A_3, \quad \ldots\ldots\ 2)$$
$$M_3 = (1+i)A_1 + (1-i)A_2 - A_3. \quad \ldots\ldots\ 3)$$

Door eliminatie van A_2, A_3 uit 1), 2), 3) vindt men

$$A_1 = -M_1 + (1-i)M_2 + (1+i)M_3,$$

of, M_2 tot oorsprong nemende,

$$M_2A_1 = -M_2M_1 + (1+i)M_2M_3 = M_1M_3 + iM_2M_3.$$

Stelt men nu $M_2N_1 = iM_2M_3$, dan is $M_2A_1 = M_2N_1 + M_1M_3$, of $N_1A_1 = M_1M_3$.

Hieruit volgt deze constructie:

Men trekt M_2N_1 binnenwaarts loodrecht op en gelijk aan M_2M_3, dan is N_1A_1 equipollent met M_1M_3. Op soortgelijke wijs bepaalt men de hoekpunten A_2, A_3.

Vraagstuk XCI.

K 8 a. Zijn I_1, I_2, I_3, I_4 en i_1, i_2, i_3, i_4 de middelpunten der vierkanten, welke buitenwaarts en binnenwaarts op de zijden van een vierhoek $A_1A_2A_3A_4$ kunnen beschreven worden, dan is

$$\overline{I_1i_3}^2 + \overline{I_2i_4}^2 + \overline{I_3i_1}^2 + \overline{I_4i_2}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_1}^2.$$

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, J. A. BARRAU, H. B. BONE Jr., E. D. J. DE JONGH Jr., F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

De middens van A_1A_2 en A_3A_4 noemen wij m_1 en m_2. Trekken wij door de middens n_2 en n_4 van A_2A_4 en A_1A_3 lijnen, die loodrecht op A_2A_4 en A_1A_3 staan en nemen wij hierop de stukken

$$n_2J_2 = n_2j_2 = \tfrac{1}{2}\,A_2A_4,\quad n_4J_4 = n_4j_4 = \tfrac{1}{2}\,A_1A_3,$$

dan is

$$\triangle\, A_1i_1J_4 \cong \triangle\, A_1I_1j_4,$$

want beide zijn $\sim \triangle\, A_1m_1n_4$ en verschillen hiervan 45° in stand.

Evenzoo is

$$\triangle\, A_4j_2I_3 \cong \triangle\, A_4J_2i_3,$$

want beide zijn $\sim \triangle\, A_4n_2m_3$ en verschillen hiervan 45° in stand.

Hieruit volgt

$$i_1J_4 = I_1j_4 = m_1n_4\sqrt{2} \text{ en } j_2I_3 = J_2i_3 = n_2m_3\sqrt{2}.$$

Omdat $m_1n_4m_3n_2$ een parallelogram is, dus

$$m_1n_4 = n_2m_3,$$

heeft men

$$i_1J_4 = I_1j_4 = j_2I_3 = J_2i_3.$$

Evenzoo blijkt, dat

$$I_1J_2 = i_1j_2 = j_4i_3 = J_4I_3,$$

derhalve zijn $i_1j_2I_3J_4$ en $j_4i_3J_2I_1$ parallelogrammen, die de zijden gelijk hebben.

Nu verschillen I_1j_4 en i_1J_4 beide 45° in stand met m_1n_4, derhalve is

$$I_1j_4 \perp i_1J_4.$$

Evenzoo is

$$I_1J_2 \perp i_1j_2;$$

de zijden der genoemde parallelogrammen staan dus loodrecht op elkaar.

Nu is

$$\angle J_2I_1j_4 \pm \angle n_2m_1n_4 = 90^\circ \quad , \quad \angle j_2i_1J_4 \mp \angle n_2m_1n_4 = 90^\circ,$$

alzoo

$$\angle J_2I_1j_4 + \angle j_2i_1J_4 = 180^\circ \text{ en } \angle J_2I_1j_4 = \angle i_1j_2I_3.$$

Derhalve is

$$\text{par. } i_1j_2I_3J_4 \overset{=}{\approx} \text{par. } j_4i_3J_2I_1 \text{ , dus } i_1I_3 = J_2j_4.$$

Verder heeft men

$$\overline{I_1i_3}^2 + \overline{J_2j_4}^2 = 2\overline{I_1j_4}^2 + 2\overline{I_1J_2}^2,$$

of

$$\overline{I_1i_3}^2 + \overline{I_3i_1}^2 = 4\overline{m_1n_4}^2 + 4\overline{m_1n_2}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_1}^2.$$

Evenzoo is

$$\overline{I_2i_4}^2 + \overline{I_4i_2}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2,$$

dus

$$\overline{I_1i_3}^2 + \overline{I_2i_4}^2 + \overline{I_3i_1}^2 + \overline{I_4i_2}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_1}^2.$$

Opmerking. Men verkrijgt de te bewijzen vergelijking uit de betrekkingen $\overline{I_1i_3}^2 + \overline{I_3i_1}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_1}^2$ en $\overline{I_2i_4}^2 + \overline{I_4i_2}^2 = \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_1A_2}^2$, welke men op bl. 383 van deel VIII, achter de oplossing van N°. 191, zal vinden.

(E. D. J. de J. en C. S.).

Vraagstuk XCII.

K 2 d. Uit een punt van de hyperbool van Kiepert trekt men drie rechten achtereenvolgens evenwijdig met de zijden B_1C_1, C_1A_1,

A_1B_1 van den eersten driehoek van BROCARD. Te bewijzen dat deze rechten de zijden BC, CA, AB van den oorspronkelijken driehoek in drie collineaire punten snijden.

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* Dr. H. VAN AUBEL.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Beschouwen wij ABC als assendriehoek en maken wij gebruik van barycentrische coördinaten. Stellen wij kortheidshalve

$$b^2c^2 - a^4 = A, \quad c^2a^2 - b^4 = B, \quad a^2b^2 - c^4 = C \ldots 1)$$

dan zijn de verg. van B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 achtereenvolgens:

$$Ax + Cy + Bz = 0, \quad Cx + By + Az = 0,$$
$$Bx + Ay + Cz = 0.$$

Trekken wij door een punt $P(x_1, y_1, z_1)$ de lijnen α, β, γ evenwijdig aan B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1; laten D, E, F de snijpunten zijn van α en BC, β en CA, γ en AB, dan is de verg. van α van den vorm

$$Ax + Cy + Bz + k(x + y + z) = 0,$$

terwijl voldaan is aan

$$Ax_1 + Cy_1 + Bz_1 + k(x_1 + y_1 + z_1) = 0.$$

derhalve is de verg. van α:

$$\{(A - C)y_1 + (A - B)z_1\}x + \{(C - A)x_1 + (C - B)z_1\}y +$$
$$+ \{(B - A)x_1 + (B - C)y_1\}z = 0,$$

en wordt het punt D bepaald door de verg.

$$x = 0, \quad \{(C - A)x_1 - (B - C)z_1\}y + \{(B - C)y_1 - (A - B)x_1\}z = 0.$$

Soortgelijke verg. bepalen de punten E en F. Zullen nu D, E, F op eene rechte lijn

$$lx + my + nz = 0$$

liggen, zoo moet men hebben

$$\frac{(C - A)x_1 - (B - C)z_1}{m} = \frac{(B - C)y_1 - (A - B)x_1}{n},$$

$$\frac{(A - B)y_1 - (C - A)x_1}{n} = \frac{(C - A)z_1 - (B - C)y_1}{l},$$

$$\frac{(B - C)z_1 - (A - B)y_1}{l} = \frac{(A - B)x_1 - (C - A)z_1}{m}.$$

Hieruit volgt door eliminatie van l, m, n, na deeling door $(A^2 + B^2 + C^2 - BC - CA - AB)(x_1 + y_1 + z_1)$,

$$(B - C)\, y_1 z_1 + (C - A)\, z_1 x_1 + (A - B)\, x_1 y_1 = 0.$$

Vervangen wij x_1, y_1, z_1 door x, y, z, zoo vinden wij hieruit met behulp van (1), na deeling door $a^2 + b^2 + c^2$:

$$(b^2 - c^2)\, yz + (c^2 - a^2)\, zx + (a^2 - b^2)\, xy = 0,$$

zijnde de verg. der hyperbool van KIEPERT. Alzoo:

Indien het punt P op de hyperbool van KIEPERT ligt, zullen de snijpunten D, E, F op eene rechte lijn liggen.

Vraagstuk XCIII.

A 2 b. Is (X, Y) een wortelstelsel van de vergelijking

$$u_{y_1^2} X^2 - 2u_{x_1 y_1} XY + u_{x_1^2} Y^2 = 0,$$

en (Y, Z) een wortelstelsel van

$$u_{z_1^2} Y^2 - 2u_{y_1 z_1} YZ + u_{y_1^2} Z^2 = 0,$$

dan voldoet (X, Z) aan

$$u_{z_1^2} Z^2 - 2u_{z_1 z_1} XZ + u_{z_1^2} X^2 = 0,$$

mits $u_{x_1^2}$, $u_{x_1 y_1}$, $u_{x_1 z_1}$, $u_{y_1^2}$, $u_{y_1 z_1}$, $u_{z_1^2}$ de waarden voorstellen welke de tweede afgeleiden van een ternairen vorm u, waarvan de discriminant verdwijnt, aannemen, als men daarin aan de veranderlijken waarden geeft, die de eerste afgeleiden van u gelijktijdig doen verdwijnen. Men vraagt het bewijs. (K. BES.)

Opgelost *door* K. BES en F. SCHUH.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Onderstel dat door $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ aan de vergelijkingen

$$u_{y_1^2} X^2 - 2u_{x_1 y_1} XY + u_{x_1^2} Y^2 = 0, \quad \ldots \quad 1)$$

$$u_{z_1^2} Y^2 - 2u_{y_1 z_1} YZ + u_{y_1^2} Z^2 = 0, \quad \ldots \quad 2)$$

$$u_{x_1^2} Z^2 - 2u_{z_1 x_1} XZ + u_{z_1^2} X^2 = 0 \quad \ldots \quad 3)$$

voldaan wordt; dan zijn de vergelijkingen (1), (2) en (3) ach-

tereenvolgens deelbaar door $bX - aY$, $cY - bZ$, $aZ - cX$. Deze vergelijkingen kunnen dus vervangen worden door

$$(bX - aY)(qX - pY) = 0,$$
$$(cY - bZ)(rY - q'Z) = 0,$$
$$(aZ - cX)(p'Z - r'X) = 0.$$

Hierin is

$$ap = u_{x_1^2} = ap',$$
$$bq = u_{y_1^2} = bq',$$
$$cr = u_{z_1^2} = cr',$$

waaruit volgt

$$p = p',\ q = q',\ r = r'.$$

Voor de vergelijkingen (1), (2) en (3) kan dus geschreven worden:

$$(bX - aY)(qX - pY) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$
$$(cY - bZ)(rY - qZ) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$
$$(aZ - cX)(pZ - rX) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Hieruit ziet men, dat als een der vier gemeenschappelijke wortelstelsels van (1) en (2) aan (3) voldoet, dit nog met een tweede gemeenschappelijk wortelstelsel het geval is, maar in het algemeen niet met de beide andere gemeenschappelijke wortelstelsels.

Door (1), (2) en (3) met (4), (5) en (6) te vergelijken vindt men:

$$ap = u_{x_1^2}, \qquad bq = u_{y_1^2}, \qquad cr = u_{z_1^2}; \quad . \quad . \quad 7)$$
$$aq + bp = 2u_{x_1y_1},\ br + cq = 2u_{y_1z_1},\ cp + ar = 2u_{z_1x_1}, \quad . \quad 8)$$

Nu is

$$\begin{vmatrix} ap + ap\ , & bp + aq\ , & cp + ar \\ aq + bp\ , & bq + bq\ , & cq + br \\ ar + cp\ , & br + cq\ , & cr + cr \end{vmatrix} = 0,$$

zooals onmiddellijk blijkt als men den determinant splitst in de som van twee determinanten, waarvan de eene ap, bp, cp, de andere ap, aq, ar als eerste rij heeft. Dus is

$$\begin{vmatrix} u_{x_1^2} & u_{x_1y_1} & u_{\ 1y_1} \\ u_{x_1y_1} & u_{y_1^2} & u_{y_1z_1} \\ u_{z_1x_1} & u_{y_1z_1} & u_{z_1^2} \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Aan deze voorwaarde moet voldaan zijn, zal het mogelijk wezen uit (7) en (8) de grootheden a, b, c, p, q en r op te lossen. Omgekeerd, is aan (9) voldaan, dan kunnen (7) en (8) opgelost worden. We kunnen n.l. a zoo aannemen, dat $a = p$ wordt, vervolgens b en q uit $aq + bp = 2u_{x_1y_1}$ en $bq = u_{y_1^2}$ oplossen, en daarna c en r uit $br + cq = 2u_{y_1z_1}$ en $cp + ar = 2u_{x_1z_1}$. Het is niet moeilijk in te zien, dat men dan twee stel waarden voor c en r vindt, die door verwisseling van c en r in elkaar overgaan, zoodat men slechts één waarde voor cr vindt. Heeft nu $u_{z_1^2}$ die waarde, dan kunnen de vergelijkingen worden opgelost, anders niet. Men kan dus $u_{x_1^2}$, $u_{y_1^2}$, $u_{x_1y_1}$, $u_{x_1z_1}$ en $u_{y_1z_1}$ nog willekeurig aannemen, terwijl er dan één waarde voor $u_{z_1^2}$ bestaat, die de vergelijkingen (7) en (8) oplosbaar maakt. Deze waarde van $u_{z_1^2}$ moet aan de vergelijking (9) voldoen, en daar die vergelijking slechts één waarde voor $u_{z_1^2}$ oplevert, moet de waarde voor $u_{z_1^2}$, die uit (9) volgt, dezelfde zijn als die welke (7) en (8) oplosbaar maakt, m. a. w. voor die oplosbaarheid levert (9) de voorwaarde, die noodig en voldoende is.

Nu moet bewezen worden, dat de vergelijking (9) identiek is met de in de opgave genoemde voorwaarde. Zij u een ternaire vorm, waarvan de eerste afgeleiden nul worden voor $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, zoodat men heeft

$$0 = u_{x_1} = x_1 u_{x_1^2} + y_1 u_{x_1y_1} + z_1 u_{x_1z_1},$$

$$0 = u_{y_1} = x_1 u_{x_1y_1} + y_1 u_{y_1^2} + z_1 u_{y_1z_1},$$

$$0 = u_{z_1} = x_1 u_{x_1z_1} + y_1 u_{y_1z_1} + z_1 u_{z_1^2}.$$

Aan deze vergelijkingen kan alleen dan door van nul verschillende waarden van x_1, y_1 en z_1 voldaan worden, als aan vergelijking (9) voldaan is. Is omgekeerd aan vergelijking (9) voldaan, dan kan men een ternairen vorm opstellen, zoodanig dat voor $x = x_1$, $y_1 = y_1$, $z = z_1$ de eerste afgeleiden nul zijn en de tweede afgeleiden gelijk worden aan $u_{x_1^2}$ enz., n.l. den vorm

$$\tfrac{1}{2}(u_{x_1^2}x^2 + u_{y_1^2}y^2 + u_{z_1^2}z^2 + 2u_{x_1y_1}xy + 2u_{x_1z_1}xz + 2u_{y_1z_1}yz).$$

Men kan n.l. volgens (9) x_1, y_1 en z_1 zoo bepalen, dat de eerste afgeleiden nul worden, waarbij dan de tweede afgeleiden gelijk worden aan $u_{x_1^2}$, enz.

Is dus aan de in de opgave genoemde voorwaarde of, wat op

hetzelfde neerkomt, aan vergelijking (9) voldaan, dan zijn de vergelijkingen (1), (2) en (3) van den vorm (4), (5) en (6), zoodat *twee* der *vier* gemeenschappelijke wortelstelsels van (1) en (2) aan de vergelijking (3) voldoen. De opgave is dus niet geheel juist gesteld.

Vraagstuk XCIV.

M¹ 5 1. Als twee vlakke kubische krommen elkaar in een punt O aanraken, dan raken alle krommen van den door hen bepaalden bundel elkaar in O aan. Men laat den bundel zoo veranderen, dat O en zes der overige basispunten op hun plaats blijven, terwijl de gemeenschappelijke raaklijn om O wentelt; wat is de meetkundige plaats van het bewegelijke basispunt. (K. Bes.)

Opgelost *door* K. Bes, H. B. Bone Jr., F. Schuh *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

Heeft de gemeenschappelijke raaklijn tot vergelijking $y = mx$, dan kan de bundel worden voorgesteld door

$$\lambda (y - mx + u_2 + u_3) + \mu (y - mx + v_2 + v_3) = 0,$$

waar de aanwijzers 2 en 3 den graad aangeven van homogene functies.

Voor $\lambda + \mu = 0$ bevat deze bundel de kromme

$$(u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) = 0,$$

welke blijkbaar in O een dubbelpunt heeft. Daar zij alle basispunten moet bevatten en haar vergelijking niet van m afhangt, is zij de meetkundige plaats van het bewegelijke basispunt.

Vraagstuk XCV.

K 14 d. Zijn twee veelvlakken naar den vorm gegeven, en is de som hunner oppervlakken standvastig, dan zal de som hunner inhouden een minimum worden, als de inhouden zich als de oppervlakken verhouden. (Steiner's Werke II, 227). Men vraagt het bewijs. (Dr. Z. P. Bouman.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, H. B. BONE Jr., Dr. Z. P. BOUMAN, H. BREMKAMP, C. A. CIKOT, J. A. KERKHOVEN, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH, Dr. C. STOLP, Dr. A. VAN THIJN *en* J. WOLFF.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Zijn O_1 en O_2 de oppervlakken, I_1 en I_2 de inhouden der veelvlakken, dan is

$$\frac{O_1^3}{I_1^2} = k_1, \frac{O_2^3}{I_2^2} = k_2, \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

waarin k_1 en k_2 constanten zijn, die afhangen van den gegeven vorm der veelvlakken. Door deze vergelijkingen logarithmisch te differentieeren vindt men

$$3I_1 dO_1 = 2O_1 dI_1 \;,\; 3I_2 dO_2 = 2O_2 dI_2 \;. \quad \ldots \quad 2)$$

Daar $O_1 + O_2$ constant is, heeft men $dO_1 + dO_2 = 0$. Wordt $I_1 + I_2$ stationair, dan is $dI_1 + dI_2 = 0$. Uit (2) vindt men dan

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{O_1}{O_2}, \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

zoodat de inhouden zich verhouden als de oppervlakken. Uit (1) volgt dan verder

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{k_1}{k_2},$$

aan welke vergelijking slechts door één paar veelvlakken voldaan wordt, zoodat $I_1 + I_2$ slechts voor één stationaire waarde vatbaar is.

Stelt O het gezamenlijk oppervlak der veelvlakken voor, dan is $I = I_1 + I_2$ stationair als men heeft

$$O_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} O \;,\; O_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} O,$$

$$I_1 = \frac{k_1}{(k_1 + k_2)^{3/2}} O^{\frac{3}{2}} \;,\; I_2 = \frac{k_2}{(k_1 + k_2)^{3/2}} O^{\frac{3}{2}}$$

$$I = \frac{O^{3/2}}{(k_1 + k_2)^{1/2}} \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

Bovendien kan I nog grenswaarden aannemen, als n.l. een der veelvlakken zich tot een punt heeft samengetrokken, dus als b.v. $O_2 = 0$, $I_2 = 0$ is, in welk geval $O_1 = O$ en $I = \frac{O^{3/2}}{k_1^{\frac{1}{2}}}$ wordt; de grenswaarde van I is dan $\frac{O^{3/2}}{k_1^{\frac{1}{2}}}$. De andere grenswaarde voor I is $\frac{O^{3/2}}{k_2^{1/2}}$. Beide grenswaarden zijn grooter dan de in vergelijking (4) opgegeven stationaire waarde en daar er geen andere stationaire of grenswaarden zijn, is de stationaire waarde van I een *absoluut* minimum, ieder der beide grenswaarden een maximum; is $k_1 < k_2$ dan is de grenswaarde $\frac{O^{3/2}}{k_1^{1/2}}$ een absoluut maximum. De kleinste waarde heeft I dus als aan vergelijking (3) voldaan is.

Vraagstuk XCVI.

0 6 g. Tusschen het lijnelement ds van een asymptotische lijn op een pseudospherisch oppervlak, met kromming $-\frac{1}{\rho^2}$, en het lijnelement ds' van haar afbeelding op den eenheidsbol bestaat de betrekking $ds = \rho ds'$. (Dr. Z. P. Bouman.)

Oplossing *van* Dr. Z. P. Bouman.

Tusschen het lijnelement ds van een oppervlak en het lijnelement ds' van zijn spherisch beeld bestaat de betrekking

$$ds'^2 = H(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2) - Kds^2,$$

waar K en H de totale en de gemiddelde kromming voorstellen, en D, D', D'' de bekende, door Gauss ingevoerde, symbolen zijn.

Voor den kromtestraal R der normaal-doorsnede van ds heeft men

$$\frac{1}{R} = \frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{ds^2}$$

Dus is

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{H}{R} - K.$$

In het beschouwde geval is nu $K = -\frac{1}{\rho^2}$ en $R = \infty$, dus $ds'^2 = ds^2 : \rho^2$ of $ds = \rho ds'$.

OPMERKING. Men vindt dezelfde uitkomst voor een cirkelpunt (umbilicaalpunt) op een minimaaloppervlak. Immers, dan is $H = 0$, dus $\rho_1 = -\rho_2 = \rho$ en $K = -\frac{1}{\rho^2}$.

Vraagstuk XCVII.

0 5 1 β. Vormen de kromtelijnen van een oppervlak een isothermisch stelsel, dan bestaat tusschen de hoofdkromtestralen ρ_1 en ρ_2 de betrekking

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2(\rho_1 - \rho_2)}\frac{\partial \rho_2}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1(\rho_2 - \rho_1)}\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right).$$

(Dr. Z. P. BOUMAN.)

Oplossing *van* Dr. Z. P. BOUMAN.

Men heeft

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2).$$

Zijn ρ_1 en ρ_2 de hoofdkromtestralen langs de lijnen $u = \text{const.}$ en $v = \text{const.}$, dan heeft men

$$D = -\frac{E}{\rho_2},\ D' = 0,\ D'' = -\frac{E}{\rho_1}.$$

De vergelijkingen van CODAZZI geven nu

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}D - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}D'' = 0,$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}D - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}D'' = 0.$$

Uit beide vergelijkingen vindt men

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial lE}{\partial v}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{\partial l\rho_2}{\partial v},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial lE}{\partial u}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)=\frac{\partial l\rho_1}{\partial u},$$

dus

$$\frac{1}{2}\frac{\partial lE}{\partial v}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\right)\frac{\partial\rho_2}{\partial v},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial lE}{\partial u}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\right)\frac{\partial\rho_1}{\partial u}.$$

De voorwaarde van integrabiliteit levert terstond de bedoelde differentiaalvergelijking.

Vraagstuk XCVIII.

0 4 c. Op een ontwikkelbaar oppervlak neemt men een stelsel van geodetische lijnen en hun rechthoekige doorsnijdingskrommen als parameterlijnen $v =$ const. en $u =$ const. aan. Men vraagt een uitdrukking voor den geodetischen kromtestraal der lijnen $u =$ const. en de differentiaalvergelijking der geodetische lijnen.

(Dr. Z. P. Bouman.)

Oplossing *van* Dr. Z. P. Bouman.

Het lijnelement wordt in het onderstelde geval voorgesteld door

$$ds^2 = du^2 + G dv^2. \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

De totale kromming, die hier nul is, kan beschouwd worden als differentiaalinvariant van ds^2, en daardoor gebracht worden in den vorm

$$K = -\frac{2G\frac{d^2G}{du^2}+\left(\frac{dG}{du}\right)^2}{4G^2}. \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Voor de geodetische kromming der lijnen $u =$ const. heeft men nu

$$\frac{1}{r_u} = -\frac{1}{2G}\frac{dG}{du}. \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

Hieruit vindt men gemakkelijk

$$K = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{r_u}\right) - \frac{1}{r_u^2}.$$

Nu is $K = 0$, bijgevolg

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{r_u}\right) - \frac{1}{r_u^2} = 0,$$

dus

$$\frac{1}{r_u} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{dr_u}{du} = -1.$$

De eerste dezer betrekkingen doet zien, dat het oppervlak twee stelsels orthogonale geodetische lijnen bevat. Immers, uit 3) blijkt, dat G een functie van v alleen is. Voert men als nieuwen parameter in $v_1 = \int \sqrt{G} dv$, dan gaat 1) over in

$$ds^2 = du^2 + dv_1^2.$$

De betrekking $\frac{dr_u}{du} = -1$ levert

$$r_u = -u + f(v).$$

Nu is

$$\frac{1}{-u + f(v)} = -\frac{1}{2G}\frac{dG}{du} = -\frac{d}{du} lG^{\frac{1}{2}},$$

dus

$$G^{\frac{1}{2}} = [u - f(v)]\, \phi(v).$$

De meest algemeene vorm voor het lijnelement is derhalve

$$ds^2 = du^2 + \{u - f(v)\}^2 \phi^2(v)\, dv^2.$$

Of, als men stelt $w = \int \phi(v)\, dv$,

$$ds^2 = du^2 + \{u - \psi(w)\}^2\, dw^2.$$

Vraagstuk IC.

K 1 c. Bij een gegeven driehoek het punt te bepalen, waarvoor de som der afstanden tot de hoekpunten maximum of minimum is, en te onderzoeken of het maximum of minimum absoluut of relatief is. (J. VAN DE GRIEND Jr.)

Opgelost *door* H. B. BONE Jr., J. VAN DE GRIEND Jr., F. SCHUH *en* Dr. A. VAN THIJN.

Oplossing *van* F. SCHUH. [1])

Zij ABC de gegeven driehoek en M een punt, waarvoor $S \equiv MA + MB + MC$ een stationaire waarde heeft, dan moet S bij iedere kleine verplaatsing van M een verandering ondergaan, die ten opzichte van die verplaatsing van hoogere orde is. Verplaatsen we nu M naar een naburig punt M′, waarbij $MA + MB$ standvastig blijft, dus langs de ellips door M, die A en B tot brandpunten heeft, dan geschiedt die verplaatsing MM′ in een richting, die loodrecht staat op de deellijn van den hoek AMB. Zal nu S, dus ook MC, een verandering van hoogere orde ondergaan, dan moet MM′ ook loodrecht op MC staan, m. a. w. CM moet den hoek AMB halveeren. Evenzoo is voor het stationair zijn van S noodig dat AM den hoek BMC en BM den hoek CMA halveert. Hieruit leidt men af, dat voor het stationair zijn van S noodig is, dat men heeft

$$\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ.$$

Is omgekeerd aan deze voorwaarde voldaan, dan ondergaat S een verandering van hoogere orde bij verplaatsing van M in twee verschillende richtingen, is dus stationair.

Het punt M waarvoor bovenstaande vergelijking geldt, is het snijpunt van twee cirkelsegmenten, die een hoek van 120° bevatten, en beschreven zijn op twee zijden van den driehoek, aan den kant van het derde hoekpunt. Deze cirkelsegmenten snijden elkaar echter niet binnen den driehoek als een der hoeken van den driehoek $\geqq 120^\circ$ is. We vinden dus

S heeft alleen voor driehoeken, waarvan alle hoeken kleiner dan 120° *zijn, een stationaire waarde, en wel in een binnen den driehoek gelegen punt M, waarvoor* $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$ *is.*

Bovendien zou S nog grenswaarden kunnen aannemen, hetgeen alleen gebeuren kan, als M in een der hoekpunten van den driehoek valt, daar alleen dan S ophoudt volgens TAYLOR ontwikkelbaar te zijn naar de coördinaten van M. Onderstel

---

[1]) Dit vraagstuk is met uitbreiding tot *n* punten behandeld door R. STURM (Ueber den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten, *Crelle's Journal*, *Bd.* 97 (1884) p. 49—61). Men vindt daar ook litteratuur over dit onderwerp.

dat M bv. in A valt. Verplaatsen we nu M naar M_1 op het verlengde van BA, dan is $M_1A + M_1B = MB + 2M_1M$ en $M_1C + MM_1 > MC$, dus $(M_1A + M_1B + M_1C) > (MA + MB + MC) + M_1M$, waar $MA = 0$ is. Hieruit volgt dat S in A, B of C geen stationaire en geen maximale waarde kan hebben.

Verplaatsen we M van A naar een punt M_2 dat op de deellijn van den hoek BAC binnen den driehoek ligt. Is $\angle BAC < 120°$, dan zijn, als MM_1 klein genoeg is, de hoeken AM_2B en AM_2C beide grooter dan 120°. Nu staat in een driehoek tegenover een hoek, die $\geqq 120°$ is, een zijde, die grooter is dan de tweede zijde vermeerderd met de helft der derde zijde. Men heeft dus

$$MB = AB > M_2B + \tfrac{1}{2} M_2A, \text{ en}$$
$$MC = AC > M_2C + \tfrac{1}{2} M_2A,$$

waaruit door optelling volgt

$$M_2A + M_2B + M_2C < MA + MB + MC.$$

Hieruit blijkt, dat S niet minimaal is als M in A valt, zoodat (daar S ook niet maximaal is) S in A geen grenswaarde vertoont. We vinden dus

Ligt M in het hoekpunt van een hoek van den driehoek, die kleiner is dan 120°, *dan heeft S daar geen grenswaarde.*

Heeft de driehoek slechts hoeken kleiner dan 120°, dan heeft S alleen in één punt M binnen den driehoek een stationaire waarde maar verder geen grenswaarden. Daar nu S als een positieve doorloopende functie, die niet 0 maar wel ∞ worden kan, noodzakelijk een kleinste waarde hebben moet, kan deze niet anders zijn dan de stationaire waarde. We vinden dus

Zijn alle hoeken van den driehoek $< 120°$, *dan heeft S slechts in één punt M binnen den driehoek een stationaire waarde die een absoluut minimum is, en geen grenswaarde.*

Is echter een der hoeken van den driehoek b.v. $\angle BAC \geqq 120°$, dan heeft S geen stationaire waarde en geen grenswaarde als M in B of in C valt. Daar S echter noodzakelijk een minimumwaarde hebben moet, kan die niet anders worden aangenomen dan in A.

Heeft de driehoek een hoek, die $\geqq 120°$ *is, dan heeft S geen stationaire waarden en slechts één grenswaarde, nl. als M in het hoekpunt van den stompen hoek valt; deze grenswaarde is een absoluut minimum.*

Oplossing *van* J. VAN DE GRIEND Jr.

I. Opdat de som PA + PB + PC, als het punt P beweeglijk is langs de rechte p, een maximum of minimum waarde hebbe, moet de toename dier som bij een kleine verplaatsing van P langs p van de tweede orde zijn. Deze toename is, als P verplaatst wordt over een positieven afstand ds en de hoeken, die de positieve richtingen van PA, PB en PC maken met de positieve richting van p, α, β en γ genoemd worden, gelijk aan $(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, ds$. De voorwaarde voor maximum of minimum is dus

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0.$$

Als men dus punten op gelijken afstand van P in de positieve richtingen der rechten PA, PB en PC neemt, moet het zwaartepunt dier drie punten op de door P getrokken normaal van p vallen. Zal er een maximum of minimum voor alle rechten door P bestaan, dan moet het zwaartepunt van deze punten in P vallen, d. w. z. de positieve richtingen der rechten PA, PB en PC moeten onderling hoeken van 120° maken.

Gaat de rechte p door een der hoekpunten A, dan zal zij zoodanige richting kunnen hebben, dat PA + PB + PC maximum of minimum is voor het punt A. Daarbij wisselt PA van teeken als P door A gaat. Voor dit geval vindt men de voorwaarde

$$\cos\phi = -\frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

waar α den hoek der positieve richtingen van AB en AC en ϕ den hoek van de positieve richting van p met de bissectrice van α voorstelt. De beide rechten, die hieraan voldoen, zullen samenvallen in de bissectrice van den overstaanden hoek als $\alpha = 120°$. Van een absoluut maximum of minimum is daarbij echter geen sprake, zooals men ziet bij het veranderen van de richting van p.

Zondert men het geval, dat de driehoek een hoek van 60° of 120° heeft, voorloopig uit, dan moet men dus volgens het eerst opgemerkte de punten construeeren, waaruit de zijden van $\triangle$ ABC onder hoeken van 120° gezien worden, of waaruit

een zijde BC onder een hoek van 120° en de beide andere onder hoeken van 60° gezien worden; in het laatste geval is PA negatief te nemen. Dergelijke punten bestaan er bij iederen driehoek twee, P_i en P_u; zij zijn de snijpunten van cirkels beschreven om gelijkzijdige driehoeken BCA′, CAB′ en ABC′, die buitenwaarts op de zijden van den driehoek zijn geplaatst.

Heeft de driehoek twee hoeken B en C beide grooter dan 60°, of beide kleiner dan 60°, maar is de derde kleiner dan 120°, dan valt P_u binnen den driehoek, P_i binnen hoek A; er kan dus sprake zijn van maximum of minimum voor $PA + PB + PC$ en voor $-PA + PB + PC$.

Heeft de driehoek een hoek A grooter dan 120°, dus de beide andere kleiner dan 60°, dan vallen beide snijpunten P buiten den driehoek; P_i binnen hoek A, P_u binnen den overstaanden hoek. In dat geval is dus alleen sprake van een maximum of minimum voor $-PA + PB + PC$.

In het eerste geval ($\angle B \gtrless 60°$, $\angle C \gtrless 60°$, $\angle A < 120°$) ziet men gemakkelijk in, dat de som $PA + PB + PC$ minimum is in het punt P_u, wanneer P langs een der drie cirkels beweeglijk gedacht wordt. Want in cirkel (M_a) is $P_uB + P_uC = A'P_u$, omdat BCA′ een ingeschreven gelijkzijdige driehoek is; nu ziet men gemakkelijk, dat A, P en A′ op een rechte liggen, dus $PA + PB + PC = A'A$. Denkt men zich een ander punt P′ van cirkel (M_a) verbonden met A, B en C, dan is weer $P'C + P'B = A'P'$, dus $P'A + P'B + P'C = A'P' + P'A > A'A$. De som is dus in P minimum.

Voor het snijpunt P_i vindt men door overeenkomstige redeneering dat, (voor $\angle B > 60°$ en $\angle C > 60°$) de som $-P_iA + P_iB + P_iC$ langs de drie cirkels minimum is.

II. Om het onderzoek naar den aard der minima in de punten P_i of P_u algemeen te doen geschieden, onderstellen wij dat de toename van $\pm PA + PB + PC$, terwijl P verplaatst wordt van P_i of P_u naar een willekeurig punt P′ van het vlak van den driehoek, in het punt P′ afgezet wordt loodrecht op het vlak van den driehoek. De verkregen eindpunten dezer stukken vormen dan een oppervlak, waarvan de indicatrix in het punt P_u (P_i) ons den aard van het minimum zal doen kennen. Is deze indicatrix een ellips, dan is het minimum absoluut; is zij een hyperbool, dan heeft men een relatief minimum en de

asymptoten scheiden de gebieden om P, waarvoor deze som minimum en waarvoor zij maximum is

Bepalen wij voor het onderzoek van de soort der indicatrix de toename van PA + PB + PC, waarbij wij voor positieve richtingen van PA, PB en PC kiezen de richtingen, die onderling hoeken van 120° maken, zoodat het teeken ± voor PA kan weggelaten worden. Wordt P verplaatst over een afstand ds in de richting van P_uA, dan vinden wij als $P_uA = a_1$, $P_uB = b_1$, $P_uC = c_1$ is, voor de toenamen van PA, PB en PC $-ds$, $(b_1^2 + ds^2 + b_1 ds)^{\frac{1}{2}} - b_1$ en $(c_1^2 + ds^2 + c_1 ds)^2 - c_1$; dus voor de toename van PA + PB + PC, als men zich bepaalt tot de termen van den 2den graad,

$$\frac{3ds^2}{8}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1}\right).$$

Denkt men zich het punt P verplaatst naar P′ langs de raaklijn van cirkel (M_a), en daarna van P′ uit weer over een afstand ds' in het verlengde van A′P′, dan maken nog de rechten $P'B = b_1'$, $P'C = c_1'$ en het verlengde van A′P′ hoeken van 120° met elkaar. Was het punt A dus gelegen in het verlengde van A′P′, dan zou de toename van P′A + P′B + P′C van P′ naar P″ $(P'P'' = ds')$ weer bedragen $\frac{3ds'^2_a}{8}\left(\frac{1}{b_1'} + \frac{1}{c_1'}\right)$. Nu A′ in A ligt, verschilt de werkelijke toename van de genoemde $P''P' - (P_uA - P''A)$. Deze toename is van de 3e orde, zooals blijkt als men haar schrijft in den vorm $AP_u \sin\delta \sin\delta'$, waarin δ en δ' de hoeken van P″A en P″P′ met AP′ zijn. Bij verwaarloozing van oneindig kleinen der 3e orde kan men dus voor de toename van P′ naar P stellen $\frac{3ds'^2}{8}\left(\frac{1}{b_1'} + \frac{1}{c_1'}\right)$. Uit deze waarde blijkt, dat de toename dezelfde is wanneer ds' wordt vervangen door $-ds'$, zoodat men zich van boven P′ uit naar A′ of in de tegengestelde richting over gelijke afstanden over het oppervlak moet verplaatsen om op dezelfde hoogte boven het raakvlak in P_u te komen, of m. a. w. om een doorsnede op dien afstand van het raakvlak te bereiken, die als indicatrix voor P_u kan beschouwd worden. Daaruit volgt, dat $P_uP'_a$ en A′P′, of bij de grens de raaklijn in P_u aan (M_a) en de rechte P_uA toegevoegde richtingen der indicatrix zijn. Evenzoo is de raaklijn aan (M_b) aan P_uB, de raaklijn aan (M_c)

aan P_sC toegevoegd. Deze drie paren rechten behooren dus tot een straleninvolutie, waarvan de dubbelstralen de asymptoten der indicatrix leveren. Zijn de dubbelstralen reëel, dan is de indicatrix een hyperbool; vallen ze samen, dan is zij de dubbele rechte, waarin de asymptoten samengevallen zijn; zijn ze onbestaanbaar, dan is zij een ellips.

Als de dubbelstralen der involutie samenvallen, moet van ieder paar der involutie een der stralen in deze dubbele rechte liggen. Daar dit niet de stralen PA, PB en PC kunnen zijn, moeten òf de raaklijnen aan de cirkels (M_a), (M_b) en (M_c) samenvallen, òf twee der raaklijnen, bijv. aan (M_b) en (M_c), moeten samenvallen met PA.

In het eerste geval hebben de cirkels twee aan twee een hoekpunt van den driehoek en de raaklijn in P gemeen; zij vallen dus samen in den omgeschreven cirkel van den driehoek, die nu gelijkzijdig moet zijn. Dan ligt het punt P_i willekeurig op den omtrek van den omgeschreven cirkel en men heeft $a_1 + b_1 + c_1 = 0$. Daar b_1 en c_1 positief zijn, is de toename in de richting PA, $\frac{3ds^2}{8}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1}\right)$ positief, zoodat in die richting de som PA + PB + PC in P_i minimum is; zij is het dus ook in elke richting behalve die van de raaklijn aan den cirkel; langs dien cirkel blijft PA + PB + PC in de punten A, B en C constant gelijk aan nul. Daar het reëele gebied van de hyperbool als indicatrix met een minimum overeenkomt, is deze dubbele rechte te beschouwen als het grensgeval eener hyperbool, waarvoor de asymptoten op de imaginaire as zijn samengevallen, waardoor het reëele gebied geopend is tot het geheele platte vlak.

Verplaatst men nu met behoud van BC (waardoor dus het stralenpaar P_iA, $P_iA'_a$ onveranderd blijft) A in de richting van P_i, zoodat $a_1 + b_1 + c_1$ positief wordt, of één hoek BA'C van den driehoek $> 60°$, en de beide andere $< 60°$, dan zal de raaklijn $P_iC'_a$ van den cirkel (M'_c) de zijde BC buiten $A_1A'_a$ in C'_a treffen, dus het puntenpaar A_1, A'_a van de punteninvolutie door de straleninvolutie op BC bepaald, vallen tusschen het paar C, C'_a. Hieruit volgt, dat de dubbelpunten, dus ook de dubbelstralen der involutie reëel zullen zijn. Beweegt zich het punt P nu langs een kromme door P_i waarvan de raaklijn binnen een van de hoeken der asymptoten valt, dan zal de som PA + PB + PC langs die kromme in P minimum zijn;

maximum wordt zij als de raaklijn binnen den anderen hoek valt. Ter onderscheiding van de hoeken der asymptoten, waarbinnen maxima en waarbinnen minima vallen, behoeft men alleen op te merken, dat de rechte P_iA in den hoek der minima ligt, omdat in $\frac{3ds^2}{8}\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}\right)$ altijd $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}$ positief is.

Wordt A verplaatst in de richting P_iA, dan wordt $a_1+b_1+c_1$ negatief; één der hoeken BAC wordt $< 60°$, de beide andere $> 60°$. Het puntenpaar A_1, A'_a zal gescheiden zijn door een enkel punt C'_a van een ander paar; de dubbelstralen zijn dus onbestaanbaar; de indicatrix is een ellips, het minimum absoluut. De assen der ellips zijn de onderling rechthoekige stralen der involutie.

In het tweede der hierboven genoemde gevallen (twee raaklijnen samenvallend met PA) heeft de driehoek een hoek A van 60° ($a_1 = 0$, b_1 en c_1 verschillend van teeken, P_i in A) of van 120° ($a_1 = 0$, b_1 en c_1 gelijk van teeken, P_u in A). In het eene geval ($\angle A = 60°$) is daarbij volgens het in den aanvang der oplossing opgemerkte alleen sprake van een minimum langs de bissectrice van den buitenhoek van A, de gemeenschappelijke raaklijn der beide cirkels (M_b) en (M_c), waarin 2 rechten zijn samengevallen. Dat hier werkelijk sprake is van een minimum voor $\pm PA - PB + PC$ (als $AB > AC$), waarbij PA van teeken wisselt als P door A gaat, blijkt, als men de waarde van de genoemde som langs een der cirkels (M_b) of (M_c) beschouwt. Door a_1 zeer klein positief en zeer klein negatief te nemen, blijkt evenals boven, dat in dit geval de indicatrix zich in overgang tusschen ellips en hyperbool bevindt, waarbij de asymptoten samenvallen op de reëele as (bij $-PA-PB+PC$ valt de straal PC in het imaginaire gebied), en dat de driehoek in het eerste geval twee hoeken grooter dan 60° en in het laatste 2 hoeken kleiner dan 60° heeft.

Het oppervlak heeft nu een dubbelpunt in A (overgang tusschen de bladen voor $PA-PB+PC$ en voor $-PA-PB+PC$); de raakkegel in dat punt raakt het vlak van den driehoek volgens de bissectrice van den hoek van 120° (want in die bissectrice zijn de raaklijnen aan de 2 krommen, volgens welke het gebogen vlak anders het vlak van den driehoek zou snijden, samengevallen). In het andere geval ($\angle A = 120°$) vindt men op soortgelijke manier, dat de bissectrice van $\angle A$ de eenige rechte is, waarvoor $\pm PA +$

$+ PB + PC$ minimum is. Terwijl, bij overgang van a_1 van negatief tot positief, P_u van het gebied buiten den driehoek naar dat binnen den driehoek overgaat, gaat de indicatrix over van hyperbool in ellips.

Samenvattende hebben wij, met uitzondering der bijzondere gevallen:

Als een hoek A van den driehoek kleiner is dan 60°, de beide andere grooter dan 60° zijn, ligt het punt P_u binnen den driehoek en het punt P_i daarbuiten, maar binnen hoek A; voor beide is $PA + PB + PC$ (waarbij PA voor P_i negatief is) absoluut minimum.

Als $120° > \angle A > 60°$ en de beide andere hoeken $< 60°$ zijn, liggen de punten als in 't eerste geval, maar het minimum voor P_i is relatief.

Als $\angle A > 120°$, en dus de beide andere $< 60°$ zijn, liggen beide punten P buiten den driehoek; P_i binnen $\angle A$ en P_u binnen den overstaanden hoek; voor beide is het minimum relatief.

Vraagstuk C.

K 11 e. Als vier cirkels elkaar, in cyclische volgorde, twee aan twee op een vijfden cirkel snijden, dan liggen hun tweede snijpunten ook op een cirkel. (J. VAN DE GRIEND Jr.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, H. B. BONE Jr., H. BREMEKAMP, J. VAN DE GRIEND Jr., E. D. J. DE JONGH Jr., J. A. KERKHOVEN, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH, Dr. C. STOLP *en* Dr. A. VAN THIJN.

Oplossing *van* J. A. BARRAU, J. VAN DE GRIEND JR. *en* Dr. A. VAN THIJN.

Wij noemen de snijpunten der cirkels c_1, c_2, c_3, c_4 achtereenvolgens A_{12}, B_{12}; A_{23}, B_{23}; A_{34}, B_{34}; A_{14}, B_{14} en onderstellen, dat A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{14} op een cirkel c_5 liggen. Neemt men A_{12} als centrum van inversie dan ontstaat een figuur, die op de volgende wijze is samengesteld. Drie rechten c'_1, c'_2, c'_5 vormen een driehoek met de hoekpunten B'_{12}, A'_{23}, A'_{14}, en dragen achtereenvolgens nog de punten B'_{14}, B'_{23}, A'_{34}. De cirkels c'_4 en c'_3, die achtereenvolgens door de drietallen A'_{14}, B'_{14}, A'_{34} en A'_{23}, B'_{23}, A'_{34} gelegd zijn, snijden elkaar nog

in het punt B'_{34}. Het is gemakkelijk aan te toonen, dat de punten B'_{12}, B'_{23}, B'_{34}, B'_{14} door een cirkel c'_0 kunnen verbonden worden. In de oorspronkelijke figuur liggen derhalve B_{12}, B_{23}, B_{34}, B_{14} op een cirkel c_0.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Wij zullen de cirkels in volgorde aanwijzen door 1, 2, 3, 4, de snijpunten van 1 en 2 door A en A', die van 2 en 3 door B en B', die van 3 en 4 door C en C', die van 4 en 1 door D en D'. Nu bewijzen wij, dat ABCD en A'B'C'D' beide of geen van beide koordenvierhoeken zijn.

Van de acht snijpunten liggen er telkens vier op één der vier cirkels. Die vier kunnen dus als hoekpunten van een koordenvierhoek beschouwd worden.

De vierhoeken AA'D'D en C'B'BC in de cirkels 1 en 3 geven de betrekkingen

$$\angle DAA' + \angle DD'A' = 180^\circ, \quad \angle C'B'B + \angle C'CB = 180^\circ \ldots 1).$$

In de cirkels 2 en 4 boog $A'B = 2\phi$, boog $C'D = 2\psi$ stellende, heeft men

$$\angle BAA' = \angle BB'A' = \phi, \quad \angle DCC' = \angle DD'C' = \psi.$$

De in 1) voorkomende hoeken kan men nu uitdrukken in de hoeken α, β, γ, δ van vierhoek ABCD, de hoeken α', β', γ', δ' van vierhoek A'B'C'D' en de hoeken ϕ en ψ. Immers men heeft

$$\angle DAA' = \alpha - \phi, \angle DD'A' = \delta' + \psi, \angle C'B'B = \beta' \cdot \phi, \angle C'CB = \gamma - \psi,$$

zoodat men voor 1) kan schrijven

$$\alpha + \delta' \cdot (\phi - \psi) = 180^\circ, \quad \beta' + \gamma + (\phi - \psi) = 180^\circ.$$

Hieruit volgt door eliminatie van $\phi - \psi$

$$\alpha + \delta' + \beta' + \gamma = 360^\circ$$

of

$$\alpha + \gamma = 360^\circ - (\beta' + \delta') = \alpha' + \gamma'.$$

De sommen $\alpha + \gamma$ en $\alpha' + \gamma'$ zullen dus beide of geen van beide de waarde 180° hebben. Is derhalve een van de twee vierhoeken een koordenvierhoek, dan is de andere het ook.

OPMERKING. Dit vraagstuk is ook als N°. 164 in deel I te vinden. (W. MANTEL).

Vraagstuk CI.

K 11 e. Een van stand en grootte veranderende cirkel N snijdt een vasten cirkel M. Waar moet het momentane uitwendige gelijkvormigheidspunt voor twee op elkaar volgende standen van N liggen, zal de hoek van M en N gedurende het eerste tijdselement constant blijven. (J. VAN DE GRIEND Jr.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, H. BREMEKAMP, J. VAN DE GRIEND Jr., E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH, Dr. A. VAN THIJN *en* J. WOLFF.

Oplossing *van* J. VAN DE GRIEND Jr. *en* F. SCHUH.

Zij N_1 een bepaalde stand van den veranderenden cirkel, die den cirkel M in de punten P en Q snijdt. Een tweeden stand N_2, die weinig van N_1 verschilt en waarbij de cirkel M onder denzelfden hoek gesneden wordt als in den stand N_1, kan men steeds bereiken over een tusschenstand N_3 heen, zoodanig dat de cirkels N_1 en N_3 elkaar in P inwendig raken en de cirkels N_2 en N_3 even grooten straal hebben; de middelpunten der cirkels N_2 en N_3 liggen dan op denzelfden afstand van het middelpunt van M. Het uitwendige gelijkvormigheidspunt G_{13} der cirkels N_1 en N_3 is nu het punt P. Het uitwendige gelijkvormigheidspunt G_{23} der cirkels N_2 en N_3 ligt oneindig ver op de verbindingslijn hunner middelpunten, welke, als de cirkels N_2 en N_3 tot elkaar naderen, meer en meer evenwijdig aan PQ wordt; de lijn $G_{13}G_{23}$ nadert dan tot PQ. Daar de drie uitwendige gelijkvormigheidspunten van drie cirkels op één rechte liggen, zal het uitwendige gelijkvormigheidspunt G_{12} der cirkels N_1 en N_2 tot PQ naderen als N_2 tot N_1 nadert.

Blijft de hoek met den vasten cirkel M standvastig, dan ligt het momentane uitwendige gelijkvormigheidspunt van twee opvolgende standen van den veranderenden cirkel N dus op de machtlijn van M en N.

Men ziet gemakkelijk in, dat het omgekeerde ook juist is.

Vraagstuk CII.

L¹ 17 a. De snijpunten van twee parabolen te construeeren,

waarvan de assen evenwijdig loopen, als hun brandpunten en richtlijnen gegeven zijn. (J. A. KERKHOVEN.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, H. B. BONE Jr., H. BREMEKAMP, E. D. J. DE JONGH Jr., J. A. KERKHOVEN, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT *en* Dr. A. VAN THIJN.

Oplossing *van* H. B. BONE Jr.

Als drie kegelsneden twee punten gemeen hebben, dan gaan de drie koorden, die ze nog twee aan twee gemeen hebben, door een punt. Wanneer twee der kegelsneden elkaar aanraken en de derde vervangen wordt door een dubbel gelegde rechte, die door het raakpunt gaat, dan vindt men hieruit de volgende eigenschap: „Trekt men door het raakpunt van twee elkaar rakende kegelsneden een willekeurige rechte en construeert de raaklijnen in de punten waar deze rechte de beide krommen ten tweeden male snijdt, dan ontmoeten deze raaklijnen elkaar op de gemeenschappelijke koorde der kegelsneden, die niet door hun raakpunt gaat."

Hebben de parabolen π_1 en π_2, met de brandpunten F_1 en F_2, evenwijdige richtlijnen r_1 en r_2, dus evenwijdige assen a_1 en a_2, dan raken zij elkaar in het oneindig ver gelegen punt van a_1 en a_2. Door toepassing van de boven genoemde eigenschap kan men nu twee punten van de gemeenschappelijke koorde van π_1 en π_2 vinden.

Daartoe zoeken we het snijpunt R_2 van a_1 met r_2, en bepalen de middelloodlijn van F_2R_2 Zij snijdt de topraaklijn van π_1 in een punt der bedoelde koorde. Een tweede punt vindt men door a_2 als snijlijn te nemen.

Hierdoor is de constructie teruggebracht tot het bepalen van de snijpunten van een rechte met een door brandpunt en richtlijn bepaalde parabool, dus tot het construeeren van de cirkels, welke door een gegeven punt gaan, een gegeven rechte aanraken en hun middelpunt op een gegeven rechte hebben.

OPMERKINGEN. I. Beschrijft men uit F_1 als middelpunt, met den afstand van r_1 en r_2 als straal, een cirkel Γ, dan zijn de gevraagde snijpunten van π_1 en π_2 de middelpunten der cirkels, welke door F_2 gaan, r_2 aanraken en Γ inwendig aanraken.

(T. J. A. EN J. A. K.)

II. Is S een der snijpunten van π_1 en π_2, dan heeft men, als F_1 en F_2 tusschen r_1 en r_2 liggen, $F_1S + F_2S = d$ (afstand van r_1 en r_2). Keeren de parabolen hun opening naar denzelfden kant, dan is $F_1S - F_2S = \pm d$. Het vraagstuk kan dus teruggebracht worden tot het bepalen van de snijpunten van twee kegelsneden, die een brandpunt gemeen hebben.

Zij F een gemeenschappelijk brandpunt van een ellips met tweede brandpunt F′ en groote as a' en een hyperbool met tweede brandpunt F″ en bestaanbare as a''. Beschrijft men uit F′ een cirkel Γ′ met straal a' en uit F″ een cirkel Γ″ met straal a'', dan is elk der verlangde snijpunten het middelpunt van een cirkel, die door F gaat en Γ′ en Γ″ raakt. Voor een parabool wordt de cirkel uit het tweede brandpunt vervangen door de richtlijn. (J. A. K.)

Vraagstuk CIII.

H 6 b. Te integreeren

$$(x_2-x_3+x_4-x_5)\,dx_1+(x_3-x_4+x_5-x_1)\,dx_2+(x_4-x_5+x_1-x_2)\,dx_3+$$
$$+(x_5-x_1+x_2-x_3)\,dx_4+(x_1-x_2+x_3-x_4)\,dx_5=0.$$

(Forsyth, Theory of differential equations, I, 171.)

(W. MANTEL.)

Oplossing *van* W. MANTEL.

Omdat overal slechts verschillen der veranderlijken staan, wordt eene vereenvoudiging verkregen door dezen als veranderlijken in te voeren. Wij stellen dus

$$x_1 = u_1 + x_5,\ x_2 = u_2 + x_5,\ x_3 = u_3 + x_5,\ x_4 = u_4 + x_5.$$

Daardoor verkrijgt men de differentiaalvergelijking

$$(u_2 - u_3 + u_4)\,du_1 + (u_3 - u_4 - u_1)\,du_2 + (u_4 + u_1 - u_2)\,du_3 +$$
$$+ (-u_1 + u_2 - u_3)\,du_4 = 0.$$

Door verdeeling in groepen met en zonder u_4 vindt men

$$\{(u_2 - u_3)\,du_1 + (u_3 - u_1)\,du_2 + (u_1 - u_2)\,du_3\} +$$
$$+ \{u_4\,d\,(u_1 - u_2 + u_3) - (u_1 - u_2 + u_3)\,du_4\} = 0$$

of

$$\{(u_2 - u_3)\,d\,(u_1 - u_3) - (u_1 - u_3)\,d\,(u_2 - u_3)\} +$$
$$+ \{u_4 d\,(u_1 - u_2 + u_3) - (u_1 - u_2 + u_3)\,du_4\} = 0.$$

Beide groepen zijn, op een factor na, totale differentialen, zoodat ze beide nul moeten zijn. De bedoelde factoren $\frac{1}{(u_2 - u_3)^2}$ en $\frac{1}{u_4^2}$, gelijk aan nul te stellen, zou in andere gevallen tot afzonderlijke oplossingen kunnen leiden; hier leidt het tot niets.

De integralen zijn dus

$$\frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3} = C_1, \quad \frac{u_1 - u_2 + u_3}{u_4} = C_2.$$

De gegeven vergelijking heeft derhalve tot integralen

$$x_1 - x_3 = C_1 (x_2 - x_3), \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = C_2 (x_4 - x_5).$$

Vraagstuk CIV.

0 4 h. Bepaal de algemeene vergelijking der regelvlakken, welke een gegeven rechte tot richtlijn hebben, terwijl het raakvlak in elk punt van die richtlijn een gegeven hoek maakt met het asymptotische vlak door de beschrijvende lijn, die in dat punt de richtlijn ontmoet. (W. MANTEL.)

Oplossing *van* W. MANTEL.

Wij kiezen de gegeven richtlijn tot x-as en nemen als vergelijkingen der beschrijvende lijn

$$x = az + b, \quad y = tz;$$

hierin zijn a en b functies van t. De tweede vergelijking stelt ook het raakvlak voor in het punt P, waar de beschrijvende lijn de x-as ontmoet. De vergelijking van het asymptotische vlak door deze beschrijvende lijn is nu

$$x - az - b - \frac{da}{dt}(y - tz) = 0.$$

Als dit met het raakvlak in P eenen hoek α maakt, dan is

$$\cos\alpha = \frac{\frac{da}{dt} + t\left(t\frac{da}{dt} - a\right)}{\sqrt{(1+t^2)\left\{1 + \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(t\frac{da}{dt} - a\right)^2\right\}}}.$$

Hieruit volgt door herleiding

$$\frac{da}{dt}(1+t^2) - at = \operatorname{cotg}\alpha\,(1+t^2+a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Stel $a = u\,(1+t^2)^{1/2}$, dan gaat deze vergelijking over in

$$\frac{du}{dt}(1+t^2) = \operatorname{cotg}\alpha\,(1+u^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Zij $t = \operatorname{tg}\phi$, dan is ϕ de hoek tusschen het raakvlak in P en XOY; door XOY om OX te draaien kan men eene standvastige bij ϕ voegen zonder het oppervlak te veranderen; de integratie-constante is dus overbodig. Als integraal der vergelijking

$$\frac{du}{d\phi} = \operatorname{cotg}\alpha\,(1+u^2)^{1/2}$$

vinden wij dan

$$u = \sinh(\phi \operatorname{cotg}\alpha).$$

Dan wordt $a = (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \sinh(\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{boog\,tg} t)$.

De beschrijvende lijn heeft tot vergelijkingen

$$x = z\,(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \sinh(\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{boog\,tg} t) + \mathrm{F}(t);\ y = tz.$$

De vergelijking van het oppervlak is dus

$$x = (y^2+z^2)^{1/2} \sinh\left(\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{boog\,tg}\frac{y}{z}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{y}{z}\right).$$

Door den laatsten term weg te laten houdt men de vergelijking van den richtkegel over. Is θ de hoek tusschen OX en de beschrijvende lijn, dan wordt

$$\operatorname{cotg}\theta = \sinh(\phi \operatorname{cotg}\alpha).$$

De basis van den richtkegel is dus eene loxodromische lijn.

Vraagstuk CV.

0 4 h. Gegeven zijn een cirkel en een rechte, die hem snijdt en loodrecht op zijn vlak staat. Men vraagt naar de vergelijking van een regelvlak, dat deze rechte tot richtlijn en den cirkel tot intrekkingslijn heeft. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, H. B. BONE Jr. *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Zij M het middelpunt van den gegeven cirkel, O het snijpunt van cirkel M met de gegeven lijn OZ, OX de door O gaande middellijn, OY de raaklijn in O, AB een van de beschrijvende lijnen van het gevraagde regelvlak, welke cirkel M en OZ snijdt in A en B. Wij nemen OX, OY, OZ tot coördinaatassen, stellen $OM = a$, $OB = q$, $\angle XOA = \omega$ en noemen de cosinussen van de richthoeken der lijn AB l, m, n. Dan zijn de coördinaten van A

$$x = a(1 + \cos 2\omega),\ y = a \sin 2\omega,\ z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

en de vergelijkingen van AB

$$\frac{x - a(1 + \cos 2\omega)}{l} = \frac{y - a \sin 2\omega}{m} = \frac{z}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Aan 2) moet voldaan worden door de coördinaten van B $(0, 0, q)$; derhalve is

$$\frac{-a(1 + \cos 2\omega)}{l} = \frac{-a \sin 2\omega}{m} = \frac{q}{n},$$

of

$$\left.\begin{array}{l} l = \dfrac{-a(1 + \cos 2\omega)}{N},\ m = \dfrac{-a \sin 2\omega}{N},\ n = \dfrac{q}{N}, \\ \text{waar} \\ N = \sqrt{\{a^2(1+\cos 2\omega)^2 + a^2 \sin^2 2\omega + q^2\}} = \sqrt{(4a^2 \cos^2 \omega + q^2)}. \end{array}\right\} \quad . \ . \ 3)$$

Beschouwen wij nu cirkel M als richtlijn van het regelvlak, zoo wordt de afstand h van het punt A (x, y, z) tot het punt waar AB de intrekkingslijn snijdt (zie o.a. FRENET, Recueil d'exercices n°. 287), bepaald door de vergelijking

$$h = -\frac{dx dl + dy dm + dz dn}{v^2}.$$

Zal nu cirkel M de intrekkingslijn zijn, zoo moet men hebben

$$h = 0 \text{ dus } dx dl + dy dm + dz dn = 0.$$

Door dx, dy, dz, dl, dm, dn uit 1) en 3) af te leiden en in de laatste vergelijking te substitueeren, vinden wij

$$\frac{2\, d\omega}{\sin 2\omega} = -\frac{dN}{N}.$$

Dus is

$$N = A \cot \omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

waar A eene willekeurige constante is. Stellen wij $A = 2Ca$ zoo volgt uit 3) en 4)

$$q = 2a \cot \omega \sqrt{(C^2 - \sin^2 \omega)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

waarin C weder eene willekeurige constante voorstelt.

Uit 2), 3), 5) vinden wij nu voor de vergelijkingen van AB

$$\frac{x - 2a \cos^2 \omega}{\cos^2 \omega} = \frac{y - 2a \sin \omega \cos \omega}{\sin \omega \cos \omega} = \frac{-z}{\cot \omega \sqrt{(C^2 - \sin^2 \omega)}},$$

en hieruit door eliminatie van ω voor het gevraagde regelvlak

$$(C^2x^2 + C^2y^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = y^2z^2(x^2 + y^2).$$

Dit is dus een oppervlak van den 6^{en} graad, symmetrisch ten opzichte van de vlakken XOY en XOZ.

Bijzonder geval. Voor $C = 1$ is de vergelijking van het regelvlak

$$x^2(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = y^2z^2(x^2 + y^2).$$

Door te stellen $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$, verandert zij in

$$z = \pm \cot \omega (r - 2a \cos \omega).$$

Verder volgt nu uit 3) en 5)

$$q = 2a \cot \omega \,.\, \cos \omega \;, \; N = 2a \cot \omega \;, \; n = \cos \omega;$$

derhalve is

$$\angle OBA = \angle AOX \text{ en } \angle OAB = \angle AOY.$$

Dit regelvlak is gemakkelijk te construeeren als volgt. Trek uit een willekeurig punt A van cirkel M de lijn OA, daarna in het vlak AOZ de lijn AB zóó dat $\angle OAB = \angle AOY$, dan is AB een van de beschrijvende lijnen. Uit elk punt A kan men 2 zulke beschrijvende lijnen trekken; eveneens uit elk punt B van OZ.

Opmerking van W. Mantel. Als de richtingscosinussen van de beschrijvende lijn als functies van een parameter gegeven zijn, zullen de differentialen dezer functies evenredig zijn met de richtingscosinussen der normaal van het regelvlak in het centrale punt.

Snijdt men nl. den richtkegel met een concentrischen bol met de eenheid als straal, dan zijn de coördinaten van een punt der snijkromme de richtingscosinussen der overeenkomstige beschrijvende lijn. De differentialen dezer cosinussen zijn dus evenredig aan de richtingscosinussen van de raaklijn der snijkromme. Deze raaklijn is loodrecht op de beschrijvende lijn en evenwijdig met het asymptotische vlak, dus evenwijdig aan de normaal in het centrale punt.

Vraagstuk CVI.

K 8 c. Om een gegeven cirkel een vierzijde te beschrijven, waarvan de middens der drie diagonalen gegeven zijn.

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Eigenschappen der figuur. De meetkundige plaats van de middelpunten der kegelsneden, die vier rechten raken, is een rechte lijn. Daar de diagonalen AC, BD, RS [1]) der vierzijde ook zijn te beschouwen als in dubbelrechten ontaarde kegelsneden, moeten de middens N, P, Q met het middelpunt O des ingeschreven cirkels op ééne rechte gegeven zijn. (Zie ook dl. VIII, vr. 35. Opm). Deze rechte is as van symmetrie voor de gegevens, bijgevolg ook voor de oplossingen. Wij zullen haar de as der figuur noemen.

De diagonalen worden ieder in het bijzonder door de overige twee harmonisch verdeeld, n.l. AC in de punten Q′ en P′, BD in Q′ en N′, RS in P′ en N′. Dientengevolge heeft men de betrekkingen

$$\overline{NA}^2 = NQ'.NP', \quad \overline{PB}^2 = PQ'.PN', \quad \overline{QR}^2 = QP'.QN' \quad . \; . \; . \; 1)$$

Met betrekking tot den cirkel is N′P′Q′ een pooldriehoek. Daar de punten N, P, Q op de zijden van driehoek N′P′Q′ liggen, gaan hun poollijnen door de overstaande hoekpunten en, daar zij ook op één middellijn van den cirkel gelegen zijn,

[1]) R is (AB, CD), S is (AD, BC).

staan hun poollijnen tevens loodrecht op die middellijn. De loodlijnen N'N'', P'P'', Q'Q'' op de as zijn dus de poollijnen der punten N, P, Q en men heeft, als r den straal van den cirkel voorstelt,

$$ON \,.\, ON'' = OP \,.\, OP'' = OQ \,.\, OQ'' = r^2. \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Het punt O is het hoogtepunt van driehoek N'P'Q'. Immers de verbindingslijnen van O met de hoekpunten van dezen driehoek staan loodrecht op de poollijnen dezer hoekpunten, dus loodrecht op de overstaande zijden. Daar nu $OP' \perp N'P$, zijn de rechthoekige driehoeken OP'P'' en N'PN'' gelijkvormig, waaruit volgt, dat

$$P'P'' : PN'' = OP'' : N'N'' \quad \text{of} \quad N'N'' \,.\, P'P'' = OP'' \,.\, PN''. \;.\; 3)$$

Wordt uit R de loodlijn RT op de as neergelaten, dan zijn de driehoeken QRT, QN'N'' en QP'P'' gelijkvormig. Wegens de betrekking 1) tusschen de schuine zijden dezer driehoeken vindt men nu voor de rechthoekszijden

$$\overline{QT}^2 = QN'' \,.\, QP'', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

$$\overline{RT}^2 = N'N'' \,.\, P'P''.$$

De tweede van deze vergelijkingen kan volgens 3) vervangen worden door

$$\overline{RT}^2 = OP'' \,.\, PN''. \;.\; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Constructie. Na constructie van ON'' en OP'' als derde evenredigen tot bekende lijnen volgens 2), worden de punten N'' en P'' op de as bepaald. Verder kan men naar 4) en 5) de lengten van QT en RT als middenevenredigen tusschen bekende lijnen construeeren en achtereenvolgens de ligging der punten T en R bepalen. Trekt men eindelijk de rechte RQ en neemt men daarop QS = QR, dan behoeft men nog slechts uit R en S de raaklijnen aan den cirkel te trekken en de vierzijde is geconstrueerd.

Mogelijkheid der constructie. Elke twee hoekpunten van driehoek N'P'Q' moeten een diagonaal harmonisch verdeelen en dus aan één kant van het *midden* dier diagonaal gelegen zijn. De geheele driehoek moet dus aan één kant van de as liggen. Die as nemen wij nu als x-as van een rechthoekig coördinaten-

stelsel aan met O als oorsprong. Van de punten N′, P′, Q′ noemen wij de abscissen x_1, x_2, x_3, de ordinaten y_1, y_2, y_3. Daar die punten op elkaars poollijnen liggen, bestaan tusschen hun coördinaten de betrekkingen

$$x_2x_3 + y_2y_3 = x_3x_1 + y_3y_1 = x_1x_2 + y_1y_2 = r^2. \quad . \quad . \quad 6)$$

Nu zullen de punten aan ééne zijde van de x-as liggen, wanneer de ordinaten gelijke teekens hebben en dus de producten der ordinaten twee aan twee genomen *positief* zijn. Blijkens 6) wordt aan die voorwaarde voldaan, als r^2 grooter is dan het grootste van de drie producten x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2.

Het middelpunt O van den cirkel kan al of niet tusschen de punten N, P, Q gegeven zijn. In het eerste geval heeft O een van de drie punten aan den éénen kant, welk punt wij N noemen; de punten P en Q liggen dan aan den anderen kant. In het tweede geval noemen wij N dat punt, hetwelk van O het verst verwijderd is. In beide gevallen beschouwen wij de x-as als positief in de richting OP.

Uit hetgeen aangenomen is omtrent de ligging van N, P en Q volgt, dat P′ en Q′ aan den positieven kant van de y-as liggen, terwijl N′ òf aan den negatieven kant ligt òf dichter bij de as dan P′ en Q′. Wat de abscissen betreft kan men dus zeggen, dat x_2 en x_3 positief zijn, terwijl x_1 òf negatief is òf een kleiner positieve waarde heeft dan x_2 en x_3. Van de drie producten der abscissen is dus $x_2x_3 = \mathrm{OP''} \,.\, \mathrm{OQ''}$ het grootste. Volgens 2) is nu $\mathrm{OP''} \,.\, \mathrm{OQ''} = r^4 : \mathrm{OP} \,.\, \mathrm{OQ}$ en de voorwaarde voor de bestaanbaarheid der vierzijde wordt $r^2 \geqq r^4 : \mathrm{OP} \,.\, \mathrm{OQ}$ of $\mathrm{OP} \,.\, \mathrm{OQ} \geqq r^2$.

Uiterste geval van bestaanbaarheid. Met $r^2 = \mathrm{OP} \,.\, \mathrm{OQ}$ komt overeen $r^2 = \mathrm{OP''} \,.\, \mathrm{OQ''} = x_2x_3$, in welk geval uit 6) volgt $y_2y_3 = 0$, $y_3y_1 > 0$, $y_1y_2 > 0$; dus is $y_2 = y_3 = 0$, $y_1 = \infty$ (want y_3y_1 en y_1y_2 zijn niet ∞), d. w. z. dat Q′ met Q″ en P′ met P″ in de as samenvalt. Maar ook Q valt met P″ en P met Q″ samen, gelijk uit 2) blijkt, wanneer men daarin r^2 door OP . OQ vervangt. Daar N′ een eindige abscis heeft en een oneindige ordinaat, staan N′Q′ en N′P′ in P en Q loodrecht op de x-as. De vierzijde wordt een deltoïde met de x-as als diagonaal van symmetrie.

Het vraagstuk; „Een deltoïde te construeeren, als gegeven

zijn de middens der diagonalen en het middelpunt des ingeschreven cirkels," wordt met de constructie van $r = \sqrt{OP \cdot OQ}$ tot het opgegeven vraagstuk teruggebracht. Bedenkt men, dat nu P′, P″, Q en T samenvallen, gelijk ook Q′, Q″ en P, dan vindt men uit 2) en 5)

$$ON \cdot ON'' = OP \cdot OQ \ , \ \overline{RQ}^2 = OQ \cdot PN'',$$

met behulp waarvan men achtereenvolgens N″ en R bepaalt.

In plaats van de uiteinden (R en S) eener diagonaal loodrecht op de as te zoeken, doet men in dit geval beter de uiteinden A en C te construeeren van de diagonaal van symmetrie, daar dan de constructie van ON″ overbodig wordt. Men vindt nl. uit de eerste vergelijking 1) voor dit bijzondere geval

$$\overline{NA}^2 = \overline{NC}^2 = NP \cdot NQ.$$

Vraagstuk CVII.

K 5 d. Van een veranderlijken driehoek ABC bewegen de hoekpunten B en C zich langs een rechte OX, het hoekpunt A langs een rechte OY, loodrecht op OX, terwijl het voetpunt B′ der hoogtelijn uit B vast ligt. Men vraagt naar de meetkundige plaatsen van het midden van AB, het voetpunt C′ der hoogtelijn uit C en het zwaartepunt; verder naar de omhullenden van AB en CC′.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, H. B. BONE Jr., H. BREMEKAMP, E. D. J. DE JONGH Jr., E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* J. A. BARRAU *en* H. B. BONE Jr.

1. Het midden M van AB is het middelpunt van een cirkel, die door A, B, O en B′ gaat. Dus is MO = MB′ en beschrijft M de middelloodlijn *m* van OB′.

2. Daar OB′C′ de voetpuntsdriehoek van ABC is, wordt hoek B′OC′ door OY middendoor gedeeld. De meetkundige plaats van C′ is dus de rechte *l*, die ten opzichte van OY symmetrisch ligt met OB′.

3. Omdat de projectie van M op OY het midden is van OA, beschrijven M en A op m en OY gelijkvormige puntenreeksen. De door A beschreven reeks is perspectief met de reeks, welke C op OX doorloopt (centrum B'); dus zijn de reeksen (M) en (C) projectief.

Het zwaartepunt Z, dat op CM ligt, beschouwen wij als het snijpunt van twee rechten, die evenwijdig zijn met m en OX. De punten welke deze rechten op OX en m insnijden, beschrijven blijkbaar reeksen, die achtereenvolgens met de reeksen (C) en (M) gelijkvormig, dus onderling projectief zijn.

Derhalve is de meetkundige plaats van Z het voortbrengsel van twee projectieve bundels van evenwijdige stralen, dus een hyperbool, waarvan de asymptoten evenwijdig loopen aan m en OX.

Door na te gaan wanneer C of M oneindig ver liggen vindt men gemakkelijk, dat een der asymptoten den afstand tusschen B' en OX loodrecht middendoor deelt, terwijl de tweede door de projectie van B' op OX gaat.

4. Als men de letters B en C verwisselt, nemen de rechten AB en CC' elkanders plaatsen in; zij hebben dus dezelfde omhullende. De punten A en B beschrijven op OY en OX projectieve reeksen, en daar zij tegelijk oneindig ver komen te liggen, omhult AB een parabool.

Het punt C' draagt twee onderling loodrechte raaklijnen, dus is de rechte l de richtlijn der parabool. Zijn E en F de projecties van B' op OX en OY (die beiden de parabool aanraken), dan is EF ook een raaklijn der parabool, en wel, omdat zij evenwijdig is aan l, de topraaklijn. Maar dan is B' het brandpunt der parabool.

Vraagstuk CVIII.

0 8 a. Een gegeven parabool verplaatst zich zoo, dat ze steeds door een gegeven punt P gaat, terwijl haar brandpunt F de rechte PF doorloopt. Men vraagt de beide poolkrommen der beweging te bepalen. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH *en* J. WOLFF.

Oplossing *van* J. WOLFF.

1. Wij kiezen het gegeven punt tot oorsprong en de rechte, welke door F wordt doorloopen, tot X-as van een rechthoekig coördinatenstelsel. Als beginstand nemen wij den stand der parabool, waarin de top T in O is, het brandpunt dus in F_0 op OX, zoodat $OF_0 = \frac{1}{2}p$ is. Voor een anderen stand ligt het tijdelijk rotatiecentrum (de pool) ten eerste op de rechte door F loodrecht op OX getrokken, ten tweede op de normaal in O aan de parabool.

De raaklijn in O snijdt de topraaklijn in een punt S van den cirkel, die OF tot middellijn heeft. De topraaklijn moet den cirkel aanraken, die met een straal gelijk aan $\frac{1}{2}p$ en F als middelpunt is beschreven. Snijdt deze cirkel de X-as tusschen O en F in het punt L, dan is SL de tweede raaklijn uit S naar dien cirkel. Immers SF is evenwijdig met de normaal der parabool in O, maakt dus gelijke hoeken met den voerstraal OF en de as TF.

Als men dus op den cirkel, die OF tot middellijn heeft, het punt A bepaalt, dat in F_0 op OX wordt geprojecteerd, dan snijdt OA de rechte door F loodrecht op OX in de pool C.

Uit deze constructie volgt terstond, dat de coördinaten van C voldoen aan

$$x : \tfrac{1}{2}p = y : \sqrt{\tfrac{1}{2}p\,(x - \tfrac{1}{2}p)}.$$

De poolkromme in het vaste vlak heeft dus tot vergelijking

$$2x^3 = p\,(x^2 + y^2).$$

Dit is een kubische kromme met geïsoleerd punt O, waar de raaklijnen isotroop zijn. In F_0 snijdt ze OX loodrecht.

2. Om den beginstand C_0 van C te vinden, moeten wij de rechte FC in den stand F_0C_0 brengen, welke verkregen wordt door de positieve Y-as met het uurwerk een hoek te laten draaien, die het dubbel is van den hoek $\theta = \mathrm{FOC}$. Want de rechte FT had aanvankelijk den stand FO, en $\angle \mathrm{OFT} = 2 \angle \mathrm{FOC}$.

Voor de coordinaten x_0 en y_0 van C_0 vinden we nu de betrekkingen

$$x_0 - \tfrac{1}{2}p = y \sin 2\theta \text{ en } y_0 = y \cos 2\theta.$$

Als wij poolcoördinaten invoeren, komt de bepaling van de

meetkundige plaats van C_0 dus neer op de eliminatie van r en θ uit de drie vergelijkingen

$$x_0 - \tfrac{1}{2}p = 2r\sin^2\theta\cos^2\theta,\ y_0 = r\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta),\ 2r\cos^3\theta = p.$$

Nu is

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{x_0 - \frac{1}{2}p}{p} \text{ en } \operatorname{tg}\theta = \frac{2y_0}{\frac{3}{2}p - x_0}.$$

Hieruit volgt voor de poolkromme in het bewegelijke vlak

$$4py_0^2 = (x_0 - \tfrac{1}{2}p)(x_0 - \tfrac{3}{2}p)^2.$$

Deze kubische kromme heeft blijkbaar een dubbelpunt in $x = \frac{3}{2}p$, $y = 0$, waar zij de rechten $2y = \pm x$ tot raaklijnen heeft. In F_0 raakt zij de vaste poolkromme aan.

Vraagstuk CIX.

L[1] 17 e. Men beschouwt het stelsel van gelijkvormige ellipsen, die een gemeenschappelijken top A hebben en door een gegeven punt P gaan. Gevraagd wordt naar de meetkundige plaats van het tegenpunt A′ van A en de omhullende der raaklijn in A′.

Opgelost *door* T. J. Allersma, J. A. Barrau, H. Bremekamp, E. J. M. van de Laarschot *en* F. Schuh.

Oplossing *van* J. A. Barrau.

1. Daar de ellipsen, waarvan de groote assen de standen AA′ en AP hebben, gelijkvormig zijn, ligt op de ellips (AP) een punt B, dat gelijkstandig is met P, beschouwd als punt der ellips (AA′), dat dus bepaald wordt door $\angle BAP = \angle PAA'$ en $AB \times AA' = \overline{AP}^2$.

Het spiegelpunt C van B ten opzichte van de rechte AP ligt dus op AA′, zoo dat $AC \times AA' = \overline{AP}^2$; hieruit volgt, dat de meetkundige plaats van A′ de inversie is van de ellips (AP), met A tot centrum en AP tot straal van inversie. Zij is dus eene kubische kromme met geïsoleerd punt in A, dus van de 4e klasse, gaande door P en symmetrisch ten opzichte van AP.

Hare vergelijking in rechthoekige coördinaten, met A als oorsprong en AP als X-as, vinden we door in de vergelijking,

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

der ellips (AP) te substitueeren

$$x=\frac{4a^2}{\rho}\cos\phi \quad \text{en} \quad y=\frac{4a^2}{\rho}\sin\phi.$$

Dan komt de poolvergelijking der kromme,

$$2a\,(a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi)=b^2\rho\cos\phi,$$

voor den dag en hieruit vinden we

$$2a\,(b^2x^2+a^2y^2)=b^2x\,(x^2+y^2).$$

De asymptotische richtingen zijn dus de isotrope richtingen en de richting der y-as; de reëele asymptoot heeft tot vergelijking

$$b^2x=2a^3.$$

2. Daar de gevonden kubische kromme de voetpuntenlijn is van de omhullende (α) der raaklijn in A′ aan de ellips (AA′) ten opzichte van A als pool, en tevens de inversie der ellips (AP), is (α) de reciproke poolkromme der ellips ten opzichte van den cirkel van inversie, dus eene parabool met top in P en as AP.

Haar snijpunt met AY is de pool van de raaklijn aan (AP) in het einde der korte as, heeft dus tot ordinaat $4a^2:b$, zoodat de parameter der parabool gelijk is aan $4a^3:b^2$.

In het geval $a=b$, dus als de gegeven ellips een cirkel is, ontaardt de kubische kromme in de rechte door P loodrecht op AP en twee isotrope rechten; het brandpunt der parabool valt in A.

Voor $a<b$, dus als AA′ is de korte as, gaat de algemeene oplossing weder door, de kubische kromme ligt aan de andere zijde van P. Haar asymptoot en het brandpunt der parabool komen tusschen A en P en wel (evenals in het 1e geval) evenver aan weerszijden van het midden van AP.

Vraagstuk CX.

A 1 b. Bewijs de identiteit

$$x^n-n_1(x-1)^n+n_2(x-2)^n\ldots\ldots+(-1)^n n_n(x-n)^n\equiv n!,$$

waarin x een willekeurig, n een positief geheel getal is, terwijl n_t een binomiaalcoëfficient voorstelt. (Dr. G. SCHOUTEN.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, H. B. BONE Jr., F. SCHUH, Dr. G. SCHOUTEN *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

Als men alle termen der vergelijking met $(n+1)\,dx$ vermenigvuldigt en daarna tusschen de grenzen $(x-1)$ en x integreert, daarbij rekening houdende met de betrekking $n_{p-1}+n_p=(n+1)_p$, dan heeft de uitkomst denzelfden vorm, met dien verstande dat n door $n+1$ is vervangen. Voor $n=1$ heeft men $x-(x-1)=1$; dus is de vergelijking een identiteit voor alle positieve geheele getallen.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Het eerste lid der vergelijking

$$x^n - n_1(x-1)^n + n_2(x-2)^n - \ldots + (-1)^n n_n (x-n)^n \equiv n!$$

stelt naar den vorm het n^e verschil voor van de rij der getallen

$$(x-n)^n,\ (x-n+1)^n,\ \ldots\ldots (x-1)^n,\ x^n;$$

het is dus in x van den graad nul, dus onafhankelijk van de waarde van x. De betrekking zal dus bewezen zijn, wanneer zij juist blijkt te zijn voor een bepaalde waarde van x. En haar juistheid staat reeds vast voor x gelijk aan nul; want stelt men $x=0$ en deelt men de vergelijking door $(-1)^n$, dan heeft men

$$-n_1 1^n + n_2 2^n - n_3 3^n + \ldots\ldots + (-1)^n n_n n^n \equiv (-1)^n n!,$$

wat reeds op twee verschillende manieren in vraagstuk 183 van dl. VII bewezen is.

Vraagstuk CXI.

C 2 d. Druk, voor bestaanbare waarden van x, de integraal

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^3-x}}$$

in bekende functies uit. (Dr. G. SCHOUTEN.)

Opgelost *door* H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT *en* Dr. G. SCHOUTEN.

Oplossing *van* Dr. G. SCHOUTEN.

Stel $x = \wp u$, dan is

$$I = \int \frac{2\wp' u du}{\wp^2 u \sqrt{4\wp^3 u - 4\wp u}}.$$

Worden dus $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ tot invarianten van $\wp u$ gekozen, zoodat $\wp\omega = 1$, $\wp\omega'' = 0$, $\wp\omega' = -1$ de wortels van $\wp'^2 u = 0$ zijn, dan gaat de integraal over in

$$I = \int \frac{-2du}{\wp^2 u}.$$

Omdat $1 : \wp^2 u$ tot dubbele pool heeft $u = \omega''$, moet deze functie in de omgeving van ω'' ontwikkeld worden. Men vindt

$$\frac{1}{\wp^2 u} = \tfrac{1}{6}\wp''(u - \omega'') + \tfrac{1}{3},$$

zoodat de integraal overgaat in

$$I = -\tfrac{1}{3}[\wp'(u - \omega'') + 2u] + C.$$

Voor waarden van x grooter dan 1 is u kleiner dan ω en bestaanbaar, dus

$$\int_1^x \frac{dx}{x^2\sqrt{x^3 - x}} = \tfrac{1}{3}\{2(\omega - u) - \wp'(u - \omega'')\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Voor waarden van x tusschen 0 en 1 is u van den vorm $iu + \omega$, dus is

$$\int_x^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^3 - x}} = \tfrac{1}{3}\{\wp'(iu - \omega') + 2iu\} = \tfrac{1}{3}i\left\{\bar{\wp}'\left(u - \frac{\omega'}{i}\right) + 2u\right\} \quad (2)$$

Voor waarden van x tusschen 0 en -1 is u van den vorm $u + \omega'$, dus is

$$\int_{-1}^x \frac{dx}{x^2\sqrt{x^3 - x}} = -\tfrac{1}{3}\{\wp'(u - \omega) + 2u\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Voor waarden van x kleiner dan -1 is u zuiver imaginair en kleiner dan ω', zoodat

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^3-x}} &= \tfrac{1}{3}\left\{p'(iu-\omega'')+2i\left(u-\frac{\omega'}{i}\right)\right\}\\ &= \tfrac{1}{3}i\left\{\bar{p}'\left(u-\frac{\omega''}{i}\right)+2\left(u-\frac{\omega'}{i}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Bijzondere gevallen.

Uit (1) blijkt $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^3-x}} = \tfrac{2}{3}\omega,$

Uit (4): $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^3-x}} = -\tfrac{2}{3}\omega',$

terwijl (2) en (3) aangeven, dat de waarde van de integraal zoowel tusschen 0 en 1 als tusschen 0 en -1 oneindig groot is.

Vraagstuk CXII.

C 2 d. Rectificeer den boog der lemniscaat

$$r^2 = a^2 \cos 2\Theta.$$

(Dr. G. SCHOUTEN.)

Opgelost *door* H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH *en* Dr. G. SCHOUTEN.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Voor het boogelement ds heeft men

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2.$$

Hierin is

$$rdr = -a^2 \sin 2\theta\, d\theta,$$

dus

$$(dr)^2 = \frac{a^2 \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}(d\theta)^2.$$

Men vindt derhalve

$$(ds)^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}(d\theta)^2,$$

of

$$ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\, d\theta.$$

Stelt men nu $\sin\theta = x$, dan vindt men

$$s = a\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-2x^2)}},$$

of voor $2x^2 = \sin^2\phi$,

$$s = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\phi}} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\,.\,\mathrm{F}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\phi).$$

De lengte van den boog wordt dus in ϕ uitgedrukt door een elliptische integraal van de eerste soort met modulus $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, waarin ϕ met θ samenhangt door de betrekking

$$\sin\phi = \sqrt{2}\,.\,\sin\theta,$$

of

$$\cos\phi = \sqrt{\cos 2\theta}.$$

De lengte van een quadrant der lemniscaat wordt gevonden door $\theta = \frac{1}{4}\pi$, dus $\phi = \frac{1}{2}\pi$, te stellen, zij is dus gelijk aan

$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\,.\,\mathrm{F}_1(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}),$$

waarin F_1 de complete integraal voorstelt.

Oplossing *van* H. BREMEKAMP *en* E. J. M. VAN DE LAARSCHOT.

Het boogelement ds wordt bepaald door

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 = \frac{a^2}{\cos 2\vartheta}\, d\vartheta^2.$$

Voor de lengte van den boog tusschen twee voerstralen vinden we:

$$s_{12} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}.$$

We kunnen volstaan met het eerste boogquadrant te berekenen, waarbij $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \frac{\pi}{4}$; in dit geval ligt in het integratievak geen vertakkingspunt der functie.

De substitutie $\cos 2\vartheta = z$ levert

$$s_{12} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{i\sqrt{4z(z-1)(z-2)}}.$$

Wij stellen nu

$$z = \wp u\,;\; e_1 = 1\,,\; e_2 = 0\,,\; e_3 = -1.$$

Het periodenparallelogram is een quadraat; we hebben derhalve een harmonische $\wp$-functie of lemniscaatfunctie.

$$s_{12} = \frac{a}{i}\int_{u_1}^{u_2} du = \frac{a}{i}(u_2 - u_1) \quad . \; . \; . \; . \quad 1)$$

waarbij u_1 en u_2 bepaald worden uit:

$$\wp u_1 = \cos 2\vartheta_1\,,\; \wp u_2 = \cos 2\vartheta_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Voor de lengte van een quadrant vinden wij

$$s = \frac{a}{i}\int_{\omega_1}^{-\omega_2} du = \frac{a}{i}(-\omega_2 - \omega_1) = \frac{a\omega_3}{i} = a\omega_1.$$

(We kunnen nog opmerken, dat u zich steeds beweegt tusschen ω_1 en $-\omega_2$, zoodat de uitdrukking in 1) altijd reëel is.)

Om ω_1 te bepalen hebben wij

$$q = e^{\pi i \frac{\omega_3}{\omega_1}} = e^{-\pi} = 0{,}04321\,,$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \cdot \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + \ldots)^2 = 1{,}3110.$$

Om vergelijking 2) op te lossen zullen we uit $\wp u$ eerst afleiden de waarde voor een reëel argument.

Uit de bekende formule

$$(\wp u - e_1)\,[\wp(u - \omega_1) - e_1] = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$$

volgt

$$\wp(u-\omega_1) = 1 + \frac{2}{\wp u - 1},$$

of, omdat voor deze $\wp$-functie $\omega_3 = i\,\omega_1$ is,

$$\wp\frac{u-\omega_1}{i} = -1 - \frac{2}{\wp u - 1}.$$

We moeten nu $\frac{u-\omega_1}{i}$ bepalen, als gegeven is

$$\wp\frac{u-\omega_1}{i} = -1 - \frac{2}{\wp u - 1} = \cot^2\vartheta.$$

Schrijven we, ter bekorting $\frac{u-\omega_1}{i} = u'$, $\frac{u'}{2\omega_1} = v'$, dan is

$$\frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt{\wp u'-e_2} - \sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt{\wp u'-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt{\wp u'-e_2} + \sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt{\wp u'-e_3}} =$$

$$= \frac{q\cos 2\pi v' + q^9\cos 6\pi v'}{1 + q^4\cos 4\pi v'}.$$

Voor een benadering in 5 decimalen kunnen we dus nemen

$$\frac{\sqrt[4]{2}\cot\vartheta - \sqrt{\cot^2\vartheta + 1}}{\sqrt[4]{2}\cot\vartheta + \sqrt{\cot^2\vartheta + 1}} = q\cos 2\pi v'.$$

Voeren we hier $\sqrt[4]{2}\cot\vartheta = \operatorname{tg}\phi$ in, dan wordt $\cos 2\pi v' = \frac{1}{q}\operatorname{tg}\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)$, waaruit v' te bepalen is; in verband met ω_1 wordt dan ook u bekend.

Vraagstuk CXIII.

C 2 d. Voor bestaanbare waarden van x de integraal

$$\int \frac{ax+b}{x-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

in bekende functies uit te drukken. (Dr. G. SCHOUTEN.)

Opgelost *door* H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT *en* Dr. G. SCHOUTEN.

Oplossing *van* Dr. G. SCHOUTEN.

Door in de integraal $x = \wp u$ te stellen gaat ze over in

$$\int \frac{a\wp u + b}{\wp u - 1} \frac{2\wp' u du}{\sqrt{4\wp^3 u - 4}}.$$

Kiest men dus tot invarianten van $\wp u$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4,$$

zoodat $\sqrt{4\wp^3 u - 4} = -\wp' u$ en $\wp\omega_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ is, en $\wp\omega_2 = \wp\omega'_2 = 1$, $\wp\omega_3 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ de wortels van $\wp'^2 u = 0$ zijn, dan gaat I over in

$$\mathrm{I} = \int -2 \frac{a\wp u + b}{\wp u - 1} du$$

$$= -2au - 2(a + b) \int \frac{du}{\wp u - 1}.$$

Verandert x van 1 tot ∞, dan gaat u van ω_2 tot 0. Verandert echter x van 1 tot $-\infty$, dat gaat u van ω'_2 tot 0; u heeft dan zuiver imaginaire waarden.

Voor waarden van x grooter dan 1 moet dus $\frac{1}{\wp u - 1}$ ontwikkeld worden in de omgeving van $u = \omega_2$, voor die van x kleiner dan 1 in die van $u = \omega'_2$.

In 't eerste geval vindt men

$$\frac{1}{\wp u - 1} = \tfrac{1}{3}\wp(u - \omega_2) - \tfrac{1}{3}.$$

In 't tweede geval

$$\frac{1}{\wp u - 1} = \tfrac{1}{3}\wp(u - \omega'_2) - \tfrac{1}{3}.$$

Voor waarden van x grooter dan 1, dus voor $u < \omega_2$, is

$$\mathrm{I} = -2au - 2(a + b)\int(\tfrac{1}{3}\wp(u - \omega_2) - \tfrac{1}{3})\,du =$$

$$= -\tfrac{2}{3}\left[(2a - b)u + (a + b)\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_2 - u) + \mathrm{C}\right].$$

Voor waarden van x kleiner dan 1, dus voor $iu < \omega'_2$, is

$$I = -2aiu - 2(a+b)\int \frac{diu}{piu - 1} =$$

$$= -\tfrac{2}{3}\left[(2a-b)\,iu + (a+b)\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'_2 - iu)\right] + C =$$

$$= -\tfrac{2}{3}\,i\left[(2a-b)\,u - (a+b)\frac{\sigma'}{\sigma}\left(\frac{\omega'_2}{i} - u\right)\right] + C.$$

Vraagstuk CXIV.

K 13 b. In ieder zijvlak van een drievlakkenhoek trekt men door het hoekpunt een rechte loodrecht op de overstaande ribbe. Aan te toonen, dat deze drie rechten in eenzelfde vlak liggen.

(F. SCHUH.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, H. B. BONE Jr., Dr. Z. P. BOUMAN, Dr. W. BOUWMAN, H. BREMEKAMP, E. D. J. DE JONGH Jr., A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, J. C. DE MASIER, Dr. G. K. NUGTEREN, F. SCHUH, Dr. C. STOLP, Dr. A. VAN THIJN, C. WAFELBAKKER, J. WOLFF.

Oplossing.

Wij noemen de ribben van den drievlakkenhoek a, b, c, de overstaande zijvlakken α, β, γ. De rechte a_1 in α, die door het hoekpunt O loodrecht op a is getrokken, staat blijkbaar loodrecht op het vlak α_1 dat a loodrecht op α projecteert. De drie „hoogtevlakken" α_1, β_1, γ_1 snijden elkaar, volgens een bekende eigenschap, in een rechte d. De in de opgave bedoelde rechten a_1, b_1, c_1 staan nu in O loodrecht op d, liggen derhalve in één vlak δ.

OPMERKING. De rechten a', b', c' die in O loodrecht staan op de vlakken α, β, γ, bepalen den supplementairen drievlakkenhoek. Zij liggen achtereenvolgens in de hoogtevlakken α_1, β_1, γ_1, die tevens hoogtevlakken zijn van den supplementairen drievlakkenhoek. Daar verder a_1 in het vlak α' ligt, dat in O loodrecht op a staat, heeft men de eigenschap: „Zijn twee concentrische drievlakkenhoeken supplementair, dan gaan de verbindingsvlakken aa', bb', cc' van overeenkomstige ribben

door een rechte d, terwijl de snijlijnen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ van overeenkomstige zijvlakken in een vlak δ liggen, dat loodrecht op d staat."

Vraagstuk CXV.

K 4. Een ongelijkzijdigen driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de grondlijn en de omtrek, als men weet dat de rechten welke de aan de grondlijn gelegen buitenhoeken middendoor deelen (gerekend van de hoekpunten tot aan de verlengde overstaande zijden) even lang zijn. (Dr. C. STOLP.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, H. B. BONE Jr., H. BREMEKAMP, E. D. J. DE JONGH Jr., A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing.

1. Zij a de gegeven grondlijn, terwijl dan verder nog $b+c=p$ bekend is. Zijn BE en CF de rechten, die de buitenhoeken van B en C middendoor deelen en E en F de snijpunten met de verlengde overstaande zijden. Nu is volgens een bekende eigenschap

$$\overline{BE}^2 = EA \times EC - ac,$$

waarin voor $a > c$

$$EA = \frac{c}{a-c}\,b \quad , \quad EC = \frac{a}{a-c}\,b$$

is, dus

$$\overline{BE}^2 = \frac{ac}{(a-c)^2}\{b^2-(a-c)^2\} = \frac{4ac}{(a-c)^2}(s-a)(s-c).$$

Tot hetzelfde resultaat komt men als $a < c$ is.
Op dezelfde wijze vindt men

$$\overline{CF}^2 = \frac{4ab}{(a-b)^2}(s-a)(s-b).$$

Nu is gegeven, dat $BE = CF$ is, dus dat men heeft

$$\frac{c(s-c)}{(a-c)^2} = \frac{b(s-b)}{(a-b)^2},$$

of

$$c(s-c)(a-b)^2 - b(s-b)(a-c)^2 = 0,$$

of

$$(b-c)\{s(bc-a^2) + a^2(b+c) - 2abc\} = 0,$$

of

$$(b-c)\{a^2(s-a) - bc(2a-s)\} = 0.$$

Daar verder gegeven is $b \neq c$, heeft men

$$a^2(s-a) = bc(2a-s),$$

of, daar $b+c=p$ is,

$$bc = \frac{a^2(p-a)}{3a-p}.$$

Daar a en p gegeven zijn, is hiermede $bc = q^2$ bekend.

Uit $b+c=p$ en $bc=q^2$ kunnen b en c geconstrueerd worden, waarmede de gevraagde driehoek gevonden is.

2. Het blijkt, dat er nooit meer dan één driehoek mogelijk is als we congruente driehoeken voor slechts één oplossing tellen. Het kan echter ook zijn, dat er geen driehoek aan de vraag voldoet. In de eerste plaats moet natuurlijk $p > a$ zijn, terwijl we voor q alleen dan een bestaanbare waarde vinden als $p < 3a$ is. Verder kunnen uit $b+c=p$ en $bc=q^2$ alleen dan verschillende bestaanbare waarden voor b en c gevonden worden als $q < \frac{1}{2}p$ is, dus voor

$$\frac{a^2(p-a)}{3a-p} < \frac{p^2}{4},$$

of

$$(p-2a)(2a^2+p^2-ap) < 0,$$

of, daar $2a^2+p^2-ap$ steeds > 0 is, voor

$$p < 2a.$$

Is nu aan de reeds gevonden voorwaarde $a < p < 2a$ voldaan, dan kan daarmede alleen dan een driehoek geconstrueerd worden als $(b-c)^2 < a^2$ is, of $p^2 - 4q^2 < a^2$. Deze voorwaarde luidt dus:

$$p^2 - \frac{4a^2(p-a)}{3a-p} < a^2,$$

of

$$(3a-p)p^2 - 4a^2(p-a) - a^2(3a-p) < 0,$$

of

$$(a - p)^3 < 0,$$

of

$$a < p,$$

een voorwaarde, waaraan volgens onderstelling reeds voldaan is.

De eenige voorwaarde, waaraan a en p moeten voldoen, wil er een driehoek mogelijk zijn, die aan de vraag voldoet, is dus

$$a < p < 2a.$$

Opmerking. De betrekking

$$\frac{c(s-c)}{(a-c)^2} = \frac{b(s-b)}{(a-b)^2}$$

kan achtereenvolgens herleid worden tot

$$\frac{s-b}{c}\left(\frac{c}{a} - 1\right)^2 = \frac{s-c}{b}\left(\frac{b}{a} - 1\right)^2,$$

$$\frac{(b-c)s - (b^2 - c^2)}{bc} = \frac{(b-c)s}{a^2} - 2\frac{b-c}{a},$$

$$\frac{s^2 - (b+c)s + bc}{bc} = \frac{s^2}{a^2} - \frac{2s}{a} + 1,$$

$$\frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{(s-a)^2}{a^2}, \quad \sin \tfrac{1}{2} A = \frac{s-a}{a}.$$

De hoek A kan dus geconstrueerd worden, en daardoor is het vraagstuk teruggebracht tot het construeeren van een driehoek uit grondlijn, tophoek en som der opstaande zijden. (C. S.)

Vraagstuk CXVI.

L^2 14 a. Men beschouwt een driehoek, die door raaklijnen van een gegeven quadratisch oppervlak wordt gevormd, en construeert nu de punten T die met de hoekpunten van dien driehoek door raaklijnen van het oppervlak verbonden worden. Bepaal de meetkundige plaats der punten in de onderstelling dat het vlak van den driehoek en een der hoekpunten of een der zijden vast blijft.

(Dr. H. de Vries.)

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

Wij noemen de raaklijnen der zijden BC, CA, AB van den raaklijnendriehoek achtereenvolgens U, V en W. De kegels (A) en (B), welke het quadratische oppervlak F_2 omhullen en hun toppen in A en B hebben, snijden elkaar volgens een kegelsnede, waarvan het vlak gaat door de rechte WC en de pool P van het vlak ABC ten opzichte van F^2. Immers, waren A en B twee willekeurig gelegen punten, dan zouden die omhullingskegels de beide raakvlakken door AB aan F^2 gemeen hebben (elkaar dus tweemaal raken) en elkaar snijden volgens twee kegelsneden, waarvan de vlakken de poollijn van AB gemeen hadden. Nu AB raaklijn van F^2 is, behoort zij tweemaal tot de doorsnede der kegels; (A) en (B) hebben dus nog een kegelsnede gemeen, gelegen in het vlak door C en de poolrechte WP van AB.

De drie omhullingskegels (A), (B) en (C) snijden elkaar dus, twee aan twee genomen, in drie kegelsneden, gelegen in de vlakken PWC, PUA en PVB, welke het snijpunt O van AU, BV en CW gemeen hebben, elkaar dus in de rechte PO snijden. Op deze rechte hebben de drie kegels twee punten T gemeen, welke met ABC twee viervlakken bepalen, waarvan alle ribben aan F^2 raken.

Als nu B en C zich langs de uit A getrokken raaklijnen verplaatsen, dan beschrijft O een kegelsnede, die F^2 in V en W aanraakt. De rechte PO beschrijft dus een quadratischen kegel (P), waarvan elke ribbe door kegel (A) in twee punten T wordt gesneden. De meetkundige plaats van T is dus de doorsnede van (P) en (A); zij bestaat bijgevolg uit twee elkaar in V en W snijdende kegelsneden.

Wanneer nu A zich langs AB beweegt, waardoor V van plaats verandert, dan zullen de zooeven gevonden kegelsneden een oppervlak voortbrengen, dat met elken kegel (A) twee kegelsneden gemeen heeft. Dit oppervlak is dus quadratisch.

Vraagstuk CXVII.

L^2 14 a. Als alle ribben van een viervlak een quadratisch oppervlak aanraken, gaan de verbindingslijnen der op overstaande ribben

gelegen raakpunten door één punt S. Bepaal de meetkundige plaats van S als het viervlak op dezelfde wijze verandert als in het voorgaande vraagstuk. (Dr. H. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

Wij noemen, evenals in het voorgaande vraagstuk, de raakpunten van BC, CA, AB met F^2 achtereenvolgens U, V, W, en wijzen de raakpunten van TA, TB, TC door A_1, B_1, C_1 aan. Aangezien nu het bewijs voor de beide vragen onder *c*) en *d*) in de oplossing van vraagstuk N°. 48 onafhankelijk is van de omstandigheid dat men te doen heeft met een bol, dus op een willekeurig quadratisch oppervlak F^2 van toepassing is, zullen wij het bewijs voor het bestaan van een snijpunt S der drie rechten UA_1, VB_1, WC_1 als geleverd beschouwen. Dit punt S ligt op de rechte die wij in de oplossing van het voorgaande vraagstuk PO genoemd hebben. Immers het punt T ligt op deze rechte; de verbindingslijnen van dit punt met A, B, C liggen dus in de vlakken POA, POB, POC, die achtereenvolgens door U, V, W gaan. Hieruit volgt dat de lijn UA_1 in het eerstgenoemde vlak, VB_1 in het tweede, en WC_1 in het derde ligt; hun snijpunt S ligt dus op de snijlijn PO van deze vlakken. Op de lijn PO liggen echter twee punten T; dus vinden wij ook op iedere lijn PO twee punten S.

Het is nu gemakkelijk in te zien dat een punt S nooit met P kan samenvallen. Lag n.l. S in P, dan vielen de lijnen VSB_1, WSC_1 achtereenvolgens samen met VP en WP; B_1 zou dus samenvallen met V, C_1 met W. Voor een punt T *buiten* het vlak ABC is dit niet mogelijk, omdat dan de lijn BC met B_1C_1 zou moeten samenvallen, dus geen raaklijn van F^2 zou zijn; voor een punt T *in* dat vlak, dus in V of in W, vallen, zooals gemakkelijk is in te zien, de beide op PO gelegen punten S met dat punt samen, zoodat zij ook dan niet in P kunnen liggen. Hieruit volgt nu, dat indien A vast blijft, terwijl B en C zich bewegen, op iedere ribbe van den kegel (P) twee punten S gelegen zijn, die nooit met P kunnen samenvallen, die echter op de ribben PV en PW in V en W samenvallen. De meetkundige plaats der punten S bestaat dus, evenals die der punten T, uit twee elkaar in V en W snijdende kegelsneden.

Wanneer nu ook A zich verplaatst, zullen deze beide kegelsneden een quadratisch oppervlak voortbrengen, dat F^2 volgens de kegelsnede UVW aanraakt. Immers, de volledige doorsnede van dit oppervlak met elken kegel (P) bestaat uit de zooeven gevonden kegelsneden.

Vraagstuk CXVIII.

P 1 e. Men beschouwt twee driehoeken, die achtereenvolgens tot zijden hebben de rechten I, II, III en I′, II′, III′, en verbindt in elken driehoek de middens der zijden door de rechten 1, 2, 3 en 1′, 2′, 3′. Te bewijzen dat de drie rechten die de punten (I, I′) (II, II′) (III, III′) achtereenvolgens met (1, 1′) (2, 2′) (3, 3′) verbinden, door één punt gaan. (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, H. B. BONE Jr., W. MANTEL, F. SCHUH, Dr. A. VAN THIJN *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* H. B. BONE Jr.

Wij beschouwen de affine transformatie, welke de rechten I, II, III achtereenvolgens in I′, II′, III′ omzet. Daar homologe puntenreeksen gelijkvormig zijn, gaan de rechten 1, 2, 3 dan over in 1′, 2′, 3′. Het punt (I, I′) gaat over in een punt van de rechte 1′, het punt (1, 1′) in een op 1′ gelegen punt. Daar twee punten van hun verbindingslijn langs evenwijdige rechten verplaatst worden, geschiedt dit met alle punten dier verbindingslijn, en is er een punt op die lijn, dat op zijn plaats blijft. Daar de affine transformatie slechts één dubbelpunt bezit, gaan de drie in de opgave bedoelde verbindingslijnen door dat dubbelpunt.

Oplossing *van* W. MANTEL.

We noemen de hoogten der beide driehoeken achtereenvolgens h_1, h_2, h_3 en h'_1, h'_2, h'_3. De rechten I, 1, I′, 1′ sluiten een parallelogram in, waarvan de langs 1 en I′ gelegen zijden zich verhouden als h'_1 en h_1. Het kan dus geacht worden te dienen tot het samenstellen van twee krachten, groot $1 : h_1$ en $1 : h'_1$, werkende langs I en I′, en die ten op-

zichte van de punten (II, III) en (II′, III′) tegengestelde momenten, gelijk aan de eenheid, hebben.

Drie krachten, groot $1:h_1$, $1:h_2$, $1:h_3$, langs de rechten I, II, III, zijn gelijkwaardig met een koppel met een moment één; de langs I′, II′, III′ aangenomen krachten $1:h'_1$, $1:h'_2$, $1:h'_3$ zijn gelijkwaardig met een koppel van moment -1. De zes ingevoerde krachten zijn dus in evenwicht. Stelt men ze twee aan twee samen, dan verkrijgt men dus drie krachten, waarvan de richtingslijnen door één punt gaan. Blijkbaar vindt men de figuur der opgave als men de krachten langs I en I′, die langs II en II′ en die langs III en III′ samenstelt.

Vraagstuk CXIX.

K 13 c. Gegeven zijn twee driezijdige pyramiden met gemeenschappelijken top T, waarvan de gronddriehoeken in één vlak liggen. Aan elk hoekpunt van den eersten gronddriehoek wordt een hoekpunt van den tweeden toegevoegd. Brengt men door elk dier punten een vlak evenwijdig met het overstaande zijvlak, dan ontstaan twee nieuwe driezijdige pyramiden, waarvan de opstaande zijvlakken in paren zijn gerangschikt. De snijpunten dezer drie paren bepalen een hyperboloïde, die door den top T gaat. Men vraagt het bewijs. (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* H. B. BONE Jr., Dr. Z. P. BOUMAN, F. SCHUH *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* H. B. BONE Jr. *en* Dr. H. DE VRIES.

Beschouwt men het vlak der gronddriehoeken als beeldvlak en den gemeenschappelijken top als centrum van een centrale projectie, dan hebben de zes vlakken, welke telkens evenwijdig loopen met een opstaand zijvlak, den doorgang van dat zijvlak tot vluchtlijn. De centrale projecties der drie snijlijnen, welke zij, twee aan twee genomen, bepalen, gaan, volgens het vorige vraagstuk, door één punt. De snijlijnen zelf rusten dus op een rechte welke door T gaat; derhalve ligt de top op de hyperboloïde der drie snijlijnen.

OPMERKING. Dat de drie rechten niet door één punt gaan blijkt hieruit dat de verbindingslijnen hunner doorgangen niet evenwijdig zijn met de verbindingslijnen der overeenkomstige vluchtpunten. (H. D. V.)

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarbij aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, Dr. D. COELINGH, Amsterdam, Mauritskade 58, bij wien men ook klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in de toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenheid van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van twee zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderrichtinghe dienende tot het maecken vande reductien van de tacxcustingen tot gereede penningen, om dien-volgende te eysschen en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Heeren Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten, geteekend JOHAN DE WITT, 1671)]
in den handel *f* 6,00 . . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 1892
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen, tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, deel 1—8 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,00 . . . . voor de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle des publications mathématiques, deel 1—10, van elk twee stukken à *f* 4,00 en bij overcompleete stukken, per stuk *f* 2,00.

Tables des matières des volumes I—V . . . . *f* 2,00.
" " " " " VI—X . . . . *f* 3,00.

HARVARD COLLEGE LIBRARY CAMBRIDGE, MASS.

Vraagstuk CXX.

L² 3 a. Gegeven een quadratisch oppervlak O^2 en twee ten opzichte van O^2 aan elkaar toegevoegde rechten g en g'. Construeer een rechte h, die met haar toegevoegde h' en de rechten g, g' een hyperboloïdisch viertal vormt. (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* W. MANTEL.

De snijpunten van g en g' met O^2 noemen wij P, Q; R, S. Worden de vlakken QRS, RSP, SPQ, PQR achtereenvolgens door $w=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ aangewezen, dan heeft O^2 tot vergelijking

$$wx + yz = 0.$$

Een willekeurige hyperboloïde door g en g' heeft tot vergelijking

$$Awy + Bwz + Cxy + Dxz = 0.$$

Een beschrijvende lijn van het door g en g' aangewezen stelsel wordt voorgesteld door

$$w = \lambda(Cy + Dz) \quad , \quad x + \lambda(Ay + Bz) = 0.$$

Om hiervan de poollijn ten opzichte van O^2 te vinden, nemen we de poolvlakken van twee op haar gelegen punten. De punten

$$w = 0,\ x = \lambda(AD - BC),\ y = -D,\ z = C$$

en

$$w = \lambda(AD - BC),\ x = 0,\ y = -B,\ z = A$$

leveren voor die poollijn de vergelijkingen

$$\lambda Ew + Cy - Dz = 0,\ \lambda Ex + Ay - Bz = 0, \text{ waar } E = AD - BC \text{ is.}$$

Deze vergelijkingen moeten nu herleidbaar zijn tot den vorm

$$w = \lambda'(Cy + Dz) \quad , \quad x + \lambda'(Ay + Bz) = 0.$$

Hiertoe moet voldaan worden aan de voorwaarden

$$(E\lambda\lambda' + 1)C = 0,\ (E\lambda\lambda' - 1)D = 0,\ (E\lambda\lambda' - 1)A = 0,\ (E\lambda\lambda' + 1)B = 0.$$

Men vindt hieruit

$$B = 0,\ C = 0 \text{ of } A = 0,\ D = 0.$$

De rechten h en h' worden dus voorgesteld door

$$\left.\begin{array}{l} w - \lambda D z = 0, \\ x + \lambda A y = 0, \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} z - \lambda A w = 0, \\ y + \lambda D x = 0, \end{array}\right\}$$

of door

$$\left.\begin{array}{l} w - \lambda C y = 0, \\ x + \lambda B z = 0, \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y - \lambda B w = 0, \\ z + \lambda C x = 0. \end{array}\right\}$$

Men moet dus op O^2 twee rechten nemen, die g en g' ontmoeten (PS en QR of PR en QS); een willekeurige snijlijn van dit tweetal en haar poollijn ten opzichte van O^2 voldoen dan aan de vraag.

Vraagstuk CXXI.

Q 2. De vergelijking op te stellen van de meetkundige plaats der rechten, die vier willekeurig in een R_4 aangenomen vlakken snijden. Uit deze vergelijking af te leiden, dat tot die meetkundige plaats nog elf andere vlakken behooren, en de configuratie der bedoelde vijftien vlakken te onderzoeken. (Dr. H. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

De vier gegeven vlakken ε_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ snijden elkaar twee aan twee in punten, die wij als volgt aanduiden: $P_1 = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)$, $P_2 = (\varepsilon_1 \varepsilon_3)$, $P_3 = (\varepsilon_1 \varepsilon_4)$, $P_4 = (\varepsilon_2 \varepsilon_3)$, $P_5 = (\varepsilon_2 \varepsilon_4)$, $P_6 = (\varepsilon_3 \varepsilon_4)$; de eerste vijf kiezen wij als de hoekpunten van een coördinatensimplex S_5, het zesde als eenheidspunt E; de homogene coördinaten van dit laatste punt zijn dan alle gelijk aan de eenheid.

Het vlak ε_1 bevat nu de hoekpunten P_1, P_2, P_3 van het simplex, heeft dus de beide vergelijkingen $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Evenzoo volgt dat de vergelijkingen van ε_2 zijn $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Het vlak ε_3 bevat de punten P_2, P_4, P_6; noemen wij dus de i^e coördinaat van het hoekpunt P_i $(i = 1 \ldots . 5)$, de eenige dus die niet 0 is, p_i, dan heeft ε_3 de volgende matrix-vergelijking *):

$$\left\| \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| 0, \text{ waaruit volgt: } x_1 : x_3 : x_5 = 1 : 1 : 1.$$

*) P. H. SCHOUTE, „Mehrdimensionale Geometrie" I, p. 154.

Eindelijk bevat ε_4 de punten P_3, P_5, P_6, en heeft dus de matrixvergelijking:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = 0, \text{ waaruit volgt: } x_1 : x_2 : x_4 = 1 : 1 : 1.$$

Wij nemen nu in ε_4 een willekeurig punt P met de coördinaten c_i $(i = 1 \ldots . 5)$ aan en brengen door dit punt en de vlakken ε_1, ε_2, ε_3 drie driedimensionale ruimten; deze snijden elkaar volgens een rechte die tot de gezochte meetkundige plaats behoort. De vergelijkingen dezer ruimten zijn achtereenvolgens

$$c_5 x_4 - c_4 x_5 = 0,$$

$$c_3 x_2 - c_2 x_3 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{of } c_1 (x_3 - x_5) + c_3 (x_5 - x_1) + c_5 (x_1 - x_3) = 0.$$

De voorwaarde dat P in ε_4 ligt wordt uitgedrukt door de matrixvergelijking

$$\left\| \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = 0, \text{ waaruit men vindt}$$

$$c_2 - c_4 = 0 \quad \text{en} \quad c_1 - c_4 = 0.$$

Elimineert men nu uit de laatste vijf vergelijkingen de grootheden c_i $(i = 1 \ldots . 5)$, dan vindt men voor de gezochte meetkundige plaats de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_5 & 0 & x_5 - x_1 & 0 & x_1 - x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x_3 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 & x_4 \end{vmatrix} = 0, \text{ of eenvoudiger}$$

$$x_1 x_2 x_5 - x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 - x_2 x_3 x_5 + x_3 x_4 x_5 - x_2 x_4 x_5 = 0.$$

Deze vergelijking is homogeen en van den 3^{en} graad; de gezochte meetkundige plaats is dus een kubische driedimensionale ruimte, d. w. z. zij heeft de eigenschap door een willekeurige rechte van R_4 in 3 punten gesneden te worden. Schrijven wij de vergelijking in den vorm

$$x_3x_4(x_5 + x_2 - x_1) + x_2x_5(x_1 - x_3 - x_4) = 0,$$

dan ziet men dat hieraan voldaan wordt door $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, en door $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ zoodat ε_1 en ε_2 tot de meetkundige plaats behooren. Even gemakkelijk ziet men dat ε_3 en ε_4 geheel in de kubische ruimte gelegen zijn. Men kan echter aan bovenstaande vergelijking nog op verscheidene andere manieren voldoen, bijv. door te stellen

$$x_5 + x_2 - x_1 = 0 \quad \text{en} \quad x_1 - x_3 - x_4 = 0.$$

Daar deze vergelijkingen lineair zijn stellen zij ieder afzonderlijk een R_3, en dus samen een plat vlak voor, dat blijkbaar tot de meetkundige plaats behoort; wij noemen het ε_5.

Evenzoo vindt men de zes vlakken, bepaald door

$$\begin{array}{lll} x_2 = 0, & x_4 = 0 & , \ \varepsilon_6. \\ x_3 = 0, & x_5 = 0 & , \ \varepsilon_7. \\ x_2 = 0, & x_5 - x_1 = 0 & , \ \varepsilon_8. \\ x_5 = 0, & x_2 - x_1 = 0 & , \ \varepsilon_9. \\ x_3 = 0, & x_1 - x_4 = 0 & , \ \varepsilon_{10}. \\ x_4 = 0, & x_1 - x_3 = 0 & , \ \varepsilon_{11}. \end{array}$$

Beschouwt men de vergelijking in uitgewerkten vorm, dan ziet men dat zij bevredigd wordt door te substitueeren $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1$, of $x_1 : x_4 : x_5 = 1 : 1 : 1$; hierdoor worden twee nieuwe vlakken ε_{12} en ε_{13} aangewezen.

Eindelijk kan men haar bevredigen door

$$x_2 - x_3 = 0, \ x_4 - x_5 = 0, \ (\text{vlak } \varepsilon_{14})$$
$$\text{of } x_2 - x_4 = 0, \ x_3 - x_5 = 0, \ (\text{vlak } \varepsilon_{15})$$

Voor het snijpunt der vlakken 1 en 5 heeft men

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1 \quad , \quad x_4 = 0 \quad , \quad x_5 = 0.$$

Dit punt bevindt zich niet onder de punten $P_1 \ldots . P_6$; wij

noemen het P_7. Het snijpunt P_8 der vlakken 2 en 5 heeft tot coördinaten

$$x_1 : x_4 : x_5 = 1 : 1 : 1 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0.$$

Het vlak 3 snijdt 5 in een punt P_9, waarvoor

$$x_1 : x_3 : x_5 = 1 : 1 : 1 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_4 = 0,$$

en het vlak 4 snijdt 5 in een punt P_{10}, waarvoor

$$x_1 : x_2 : x_4 = 1 : 1 : 1 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_5 = 0.$$

De tien punten P_i $(i = 1, \ldots . 10)$ zijn dubbelpunten der kubische ruimte, en de vijftien vlakken ε snijden elkaar uitsluitend in deze tien punten. Uit de volgende tabel blijkt n.l. dat door elk der tien punten zes vlakken ε gaan.

P_1	1,	2,	6,	7,	14,	15.
P_2	1,	3,	7,	10,	11,	13.
P_3	1,	4,	6,	8,	9,	13.
P_4	2,	3,	7,	8,	9,	12.
P_5	2,	4,	6,	10,	11,	12.
P_6	3,	4,	12,	13,	14,	15.
P_7	1,	5,	9,	11,	12,	14.
P_8	2,	5,	8,	10,	13,	14.
P_9	3,	5,	6,	8,	11,	15.
P_{10}	4,	5,	7,	9,	10,	15.

Verder wordt door de volgende tabel bewezen, dat elk der vijftien vlakken ε vier punten P bevat.

ε_1	1,	2,	3,	7.	ε_9	3,	4,	7,	10.
ε_2	1,	4,	5,	8.	ε_{10}	2,	5,	8,	10.
ε_3	2,	4,	6,	9.	ε_{11}	2,	5,	7,	9.
ε_4	3,	5,	6,	10.	ε_{12}	4,	5,	6,	7.
ε_5	7,	8,	9,	10.	ε_{13}	2,	3,	6,	8.
ε_6	1,	3,	5,	9.	ε_{14}	1,	6,	7,	8.
ε_7	1,	2,	4,	10.	ε_{15}	1,	6,	9,	10.
ε_8	3,	4,	8,	9.					

Uit deze laatste tabel volgt gemakkelijk dat elk der vlakken ε door zes andere vlakken volgens een rechte, en door de acht overblijvende slechts in een punt gesneden wordt.

Voorts kan uit de laatste tabel nog de volgende eigenschap worden afgeleid. Het snijpunt der vlakken 1 en 2 is P_1, dat van 1 en 3 is P_2, dat van 2 en 3 is P_4, en het vlak ε_7, dat de punten P_1, P_2, P_4 bevat, snijdt ε_4 in het punt P_{10}, dat tevens in ε_5 ligt. Evenzoo snijdt het vlak ε_6, dat de snijpunten van ε_1, ε_2, ε_4 bevat, ε_3 in het punt P_9, dat tevens in ε_5 ligt, en hetzelfde geldt voor de snijpunten van ε_1, ε_3, ε_4 en het vlak ε_2, en van ε_2, ε_3, ε_4 en het vlak ε_1. Hieruit volgt dat de vijf vlakken ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 in zekeren zin bij elkaar behooren, en wel zoodanig dat elk dezer vlakken op de aangeduide wijze uit de vier andere kan worden afgeleid; er zijn zes zulke vijftallen, en ieder vlak ε komt in twee daarvan voor.

OPMERKING. Men vindt de hier bewezen eigenschappen, zonder bewijs, in een verhandeling van SEGRE „Sulla varietà cubica con dieci punti doppi", ATTI DI TORINO, 1886—87, p. 791—801.

Vraagstuk CXXII.

L^1 6 b. De osculatiecirkels van een kegelsnede te construeeren, die haar in een gegeven punt snijden, in het bijzonder als de kegelsnede een parabool is. (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. Z. P. BOUMAN, Dr. H. BREMEKAMP, E. J. M. VAN DE LAARSCHOT, Dr. H. DE VRIES *en* J. WOLFF.

Oplossing *van* Dr. Z. P. BOUMAN.

1. Men vindt een oplossing van dit vraagstuk in SALMON-FIEDLER, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 1887, deel I, bl. 401; zij steunt op de bekende eigenschap, dat twee rechten, die elk twee der snijpunten van een kegelsnede met een cirkel bevatten, antiparallel zijn ten opzichte van de assen der kegelsnede.

De constructie welke hieruit voortvloeit, kan op de volgende wijze worden afgeleid.

2. Wordt de kegelsnede C^2 in P gesneden door een cirkel, die haar in Q osculeert, dan snijden de cirkels door P en Q op C^2 een involutie in, waarvan de pool oneindig ver ligt, omdat een dier cirkels in de rechte PQ en de rechte in het oneindige ontaardt. De verbindingslijn der beide bewegelijke

snijpunten loopt dus evenwijdig met de raaklijn in Q aan C^2.

Is R het vierde gemeenschappelijke punt van de kegelsnede en den cirkel door Q, die haar in P aanraakt, dan zal de koorde PR dus evenwijdig zijn aan de raaklijn aan C^2 in Q.

De cirkels die C^2 in P raken, bepalen een involutie, waarvoor de pool weer oneindig ver ligt. De bewegelijke snijpunten bepalen dus koorden, die evenwijdig zijn met de rechte, welke C^2 in het spiegelbeeld P′ van P t. o. v. de hoofdas aanraakt.

Wij moeten derhalve in C^2 een koorde QR trekken, die evenwijdig loopt met de raaklijn in P′, terwijl de raaklijn in Q evenwijdig is met de koorde PR.

3. Wij beschouwen nu een ellips als de projectie van een cirkel, en wijzen de punten op dien cirkel door dezelfde kleine letters aan als de overeenkomstige punten der ellips. In den cirkel moet dan een koorde qr getrokken worden evenwijdig aan de raaklijn in het spiegelbeeld p' van p t. o. v. de hoofdas der ellips, zoodanig dat pr evenwijdig is aan de raaklijn in q. Snijdt de cirkel de hoofdas in a, en stellen wij $\text{bg}\, ap = \delta$, dan is $\text{bg}\, aq = -\frac{1}{3}\delta$.

Immers, men heeft $\text{bg}\, pq = \text{bg}\, qr = 2\, \text{bg}\, qp'$, of $\text{bg}\, pa + \text{bg}\, aq = 2\,(\text{bg}\, ap' - \text{bg}\, aq)$, dus $3\, \text{bg}\, aq = \text{bg}\, ap$.

Daar de parameter van P door $\delta + 2n\pi$ wordt voorgesteld, vindt men voor $\text{bg}\, aq$ de drie waarden $-\frac{1}{3}\delta$, $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\delta$, $\frac{4}{3}\pi - \frac{1}{3}\delta$.

Het vraagstuk is dus teruggebracht tot de trisectie van een hoek.

4. Uit het voorgaande volgt de constructie voor de parabool. Zij P′ het spiegelbeeld van P t. o. v. de as der parabool, p' de projectie van P′ op de topraaklijn t, A de top. Wij nemen nu op t het punt q aan, waarvoor $Aq = \frac{1}{3}\, Ap'$ is. De middellijn door q snijdt de parabool in het gevraagde punt Q.

De juistheid dezer constructie kan trouwens op de volgende wijze worden aangetoond. Zijn p en r de projecties van P en R op t, dan heeft men $pq = qr$, omdat PR evenwijdig is met de raaklijn in Q, zoodat de middellijn door Q de koorde PR in twee gelijke deelen moet verdeelen. Daar evenzoo $qp' = p'r$ is, heeft men $pq = 2qp'$ of $pA + Aq = 2\,(Ap' - Aq)$, dus $Aq = \frac{1}{3}\, Ap'$.

Opmerking. Daar het zwaartepunt der snijpunten van cirkel en parabool op de as der parabool ligt, is de afstand van Q tot de as gelijk aan het derde deel van den afstand van P. Hieruit volgt terstond de genoemde constructie. (Red.)

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

1. Wij maken gebruik van de bekende eigenschap dat de verbindingslijn RS van het raakpunt R en het snijpunt S van een osculatiecirkel van een kegelsnede met de raaklijn in R hoeken insluit waarvan de bissectricen evenwijdig zijn aan de assen der kegelsnede.

Het punt S is gegeven, R moet bepaald worden. Wij trekken door S een willekeurigen straal a en een straal b evenwijdig aan de raaklijn in het tweede snijpunt S_1 van a met de kegelsnede. Aan iederen straal a is dan één straal b toegevoegd; omgekeerd echter zijn aan één straal b twee stralen a toegevoegd, omdat de kegelsnede twee raaklijnen evenwijdig met b heeft; de stralen a en b zijn dus aan elkaar toegevoegd in een (1, 2) verwantschap, waarvan de lijnen door S evenwijdig aan de asymptoten en de raaklijn in S de dubbelstralen zijn.

Wij brengen door S een willekeurige hulpkegelsnede, bij voorkeur een cirkel, en snijden de stralen a en b met dezen cirkel in A, B; de verbindingslijnen AB omhullen dan eene kromme van de derde klasse, die den cirkel aanraakt in de drie coïncidenties van de (1, 2) verwantschap, waarin de punten van den cirkel gerangschikt zijn, dus in de snijpunten van den cirkel met de drie dubbelstralen van het stralenstelsel om het punt S.

Wij trekken verder door S de rechten p en q evenwijdig aan de assen der kegelsnede en bepalen hun snijpunten P en Q met den cirkel. Alle stralenparen door S, waarvoor p en q de bissectricen zijn, vormen een symmetrische straleninvolutie met p en q als dubbelstralen; de stralenparen, die tegelijkertijd tot deze involutie en tot het (1, 2) stralenstelsel behooren zullen blijkbaar tot de gezochte osculatiecirkels voeren. Nu is de pool der involutie met betrekking tot den hulpcirkel het punt P_∞ in een richting loodrecht op PQ; uit dit punt kunnen aan de kromme van de derde klasse drie raaklijnen getrokken worden, en elk dezer raaklijnen snijdt den cirkel in een puntenpaar A, B, levert dus een stralenpaar a, b. Het tweede snijpunt der kegelsnede met den straal a van dit paar is één der gezochte punten R, en de raaklijn in dit punt loopt evenwijdig aan b, wat tevens het middel aangeeft om te onderzoeken welke van de twee stralen de straal a, en welke b is. Het aantal oplossingen bedraagt drie.

2. Is de kegelsnede een parabool, dan vereenvoudigt zich de constructie. Dan is een straal b slechts met een raaklijn evenwijdig; in plaats van een stralenstelsel (1,2) krijgt men dus twee projectieve stralenbundels met den gemeenschappelijken top S. De verbindingslijnen AB zullen nu een kegelsnede omhullen, en aan deze kan men uit P_∞ twee raaklijnen trekken, zoodat de beide projectieve stralenbundels twee stralenparen bezitten, waarvan de bissectricen samenvallen met p en q. Maar slechts één van deze stralenparen voert tot een osculatiecirkel. Immers de dubbelstralen der beide projectieve stralenbundels zijn in dit geval blijkbaar de middellijn p door S en de raaklijn in S; de dubbelstraal p stelt dus een gemeenschappelijk paar der beide stralenstelsels voor en vervalt als zoodanig. Inderdaad moet de hulpkegelsnede den cirkel in P aanraken; één der beide raaklijnen uit P_∞ is dus $P_\infty P$.

Vraagstuk CXXIII.

M¹ 5 h. Op elke rechte door het punt O construeert men de punten Q_1 en Q_2 zoo, dat ze drievoudige elementen zijn van een kubische involutie, waarvan de snijpunten der rechte met een gegeven kubische kromme een groep vormen. Bepaal de meetkundige plaats der punten Q. (DR. J. DE VRIES).

Oplossing *van* DR. J. DE VRIES.

De punten Q_1 en Q_2 zijn blijkbaar de dubbelpunten der cyclische projectiviteit, welke door de snijpunten met de gegeven kubische kromme C^3 bepaald wordt.

De raaklijnen uit O aan de poolkegelsnede ω^2 van O naar C^3 bepalen op ω^2 twee punten Q_1; het bijbehoorende punt Q_2 ligt dan in O. Immers de poolkegelsnede bevat op elke rechte door O de dubbelpunten der kubische involutie, welke bepaald is door het drietal snijpunten met C^3 en het drievoudige element O.

Hieruit volgt dat de meetkundige plaats der punten Q_1, Q_2 tweemaal door O gaat, dus een biquadratische kromme C^4 met dubbelpunt O is.

In het raakpunt R van een door O getrokken raaklijn van C^3 vallen Q_1 en Q_2 samen; de krommen C^3 en C^4 raken elkaar dus in zes punten.

Vraagstuk CXXIV.

M¹ 1 i. Gegeven zijn een kromme van den n^{den} graad, C^n, en een punt O. Een rechte door O snijdt C^n in de punten A_k ($k = 1$ tot n). Men construeert het punt $B_{kl,m}$ dat door A_m harmonisch wordt gescheiden van de punten A_k en A_l. Bepaal de meetkundige plaats der punten B. (Dr. J. DE VRIES.)

Oplossing *van* DR. J. DE VRIES.

Op elke rechte door O liggen blijkbaar $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ punten B. Om te weten te komen, hoe vaak een dier punten, bij wenteling der transversaal om O, met O zal samenvallen, beschouwen wij de meetkundige plaats der punten, welke door de puntenparen A_k, A_l van O harmonisch worden gescheiden. Zij is, zooals men terstond inziet, een kromme van den graad $\frac{1}{2}n(n-1)$, welke C^n snijdt in de raakpunten der $n(n-1)$ uit O getrokken raaklijnen. Is A_3 een der overige snijpunten, dan valt het punt $B_{12,3}$ samen met O. Derhalve gaat de kromme (B) $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ maal door O, is dus een kromme van den graad $n(n-1)(n-2)$.

Wanneer A_2 met A_1 in A_{12} samenvalt, dan zijn zijn in A_{12} alle punten $B_{12,k}$, $B_{1k,2}$ en $B_{2k,1}$ vereenigd. Uit de beschouwing van twee standen der transversaal ter weerszijden van deze raaklijn blijkt terstond, dat de kromme (B) in A_{12} een veelvoudig punt bezit, waarvan $(n-2)$ takken de transversaal in A_{12} aanraken, terwijl er nog $(n-2)$ takken zijn, die C^n daar snijden. De krommen C^n en (B) hebben dus in A_{12} $3(n-2)$ punten gemeen. Van de $n^2(n-1)(n-2)$ snijpunten dezer krommen worden er dus $3n(n-1)(n-2)$ opgeslorpt door de raakpunten der uit O naar C^n getrokken raaklijnen. De overige $n(n-1)(n-2)(n-3)$ snijpunten zijn in viertallen harmonische punten gerangschikt. Bijgevolg is de omhullende der rechten, welke op C^n harmonische viertallen insnijden, een kromme van de klasse $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$. Voor $n = 4$ vindt men een bekende eigenschap der biquadratische kromme.

Vraagstuk CXXV.

M¹ 1 i. Men beschouwt het stelsel der poolkegelsneden van een kromme van den n^{den} graad met betrekking tot alle punten van

haar vlak. Bepaal de meetkundige plaatsen der middelpunten der tot dit stelsel behoorende gelijkzijdige hyperbolen en lijnenparen.

(Dr. P. ZEEMAN GZ.)

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Zij $F(x, y, z) = 0$ de vergelijking der gegeven kromme van den n^{en} graad. Hierin zijn, ten einde de vergelijking homogeen te maken, de rechthoekige coördinaten x en y van een punt in 't vlak door $x : z$ en $y : z$ vervangen.

De vergelijking der poolkegelsnede van een punt (x, y, z) ten opzichte van de kromme is dan

$$X^2F_{11} + Y^2F_{22} + Z^2F_{33} + 2YZF_{23} + 2ZXF_{31} + 2XYF_{12} = 0$$

waarin $$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ enz.}$$

Het middelpunt dezer kegelsnede wordt bepaald door de de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} XF_{11} + YF_{12} + ZF_{13} = 0 \\ XF_{12} + YF_{22} + ZF_{23} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

terwijl de vergelijking

$$F_{11} + F_{22} = 0$$

uitdrukt, dat de poolkegelsnede, behoorende bij het punt (x, y, z) eene gelijkzijdige hyperbool is. Eliminatie van x, y en z uit deze drie vergelijkingen, die in deze coördinaten homogeen en van den graad $(n - 2)$ zijn, levert de vergelijking der meetkundige plaats van de middelpunten der gelijkzijdige hyperbolen, voorkomende in het stelsel der poolkegelsneden. Die meetkundige plaats zal van den graad $3(n - 2)^2$ in X, Y en Z, dus eene kromme van dien graad zijn.

Wat de tweede meetkundige plaats betreft, zij wordt verkregen door eliminatie van x, y en z uit de beide vergelijkingen (1) en de vergelijking

$$XF_{13} + YF_{23} + ZF_{33} = 0.$$

Zij is niets anders dan de STEINER'sche kromme, die bij de gegeven kromme van den n^{en} graad behoort; de graad dier kromme is $3(n - 2)^2$.

Vraagstuk CXXVI.

M² 1 h. Men beschouwt de quadratische pooloppervlakken van alle punten der ruimte naar een oppervlak van den n^{den} graad. Bepaal de meetkundige plaatsen der middelpunten der tot dit stelsel behoorende gelijkzijdige hyperboloïden en ontaarde figuren.

(Dr. P. ZEEMAN GZ.)

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Zij $F(x, y, z, t) = 0$ de vergelijking van het gegeven oppervlak van den n^{en} graad. Hierin zijn, ten einde de vergelijking homogeen te maken, de rechthoekige coördinaten x, y en z van een punt der ruimte door

$$x : t \quad , \quad y : t \quad , \quad z : t$$

vervangen.

De vergelijking van het quadratische pooloppervlak van een punt (x, y, z, t) ten opzichte van het gegeven oppervlak is dan

$$X^2F_{11} + Y^2F_{22} + Z^2F_{33} + T^2F_{44} + 2YZF_{23} + 2ZXF_{31} + 2XYF_{12} + \\ + 2XTF_{14} + 2YTF_{24} + 2ZTF_{34} = 0.$$

Het middelpunt van dit oppervlak wordt bepaald door de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} XF_{11} + YF_{12} + ZF_{13} + TF_{14} = 0, \\ XF_{12} + YF_{22} + ZF_{23} + TF_{24} = 0, \\ XF_{13} + YF_{23} + ZF_{33} + TF_{34} = 0, \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

terwijl de vergelijking

$$F_{11} + F_{22} + F_{33} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

uitdrukt dat het quadratische pooloppervlak, behoorende bij het punt x, y, z, t, eene gelijkzijdige hyperboloïde is.

Elimineert men uit de vergelijkingen (1) en (2) de coordinaten x, y, z en t, dan verkrijgt men de vergelijking der meetkundige plaats van de middelpunten der gelijkzijdige hyperboloïden, die in het stelsel der quadratische pooloppervlakken voorkomen. Die vergelijking zal zijn van den graad $3(n-2)^3$ in X, Y, Z en T; de gezochte meetkundige plaats is dus een oppervlak van dien graad.

De vergelijking der tweede meetkundige plaats wordt verkregen door eliminatie van x, y, z en t uit de drie vergelijkingen (1) en

$$XF_{14} + YF_{24} + ZF_{34} + TF_{44} = 0.$$

Zij is niets anders dan het STEINER'sche oppervlak, dat bij het gegeven oppervlak van den n^{den} graad behoort.

Vraagstuk CXXVII.

O 8 a. Een vlakke figuur beweegt zich zoo in haar vlak dat een van haar punten M een gegeven kromme van den graad n en de klasse m doorloopt, terwijl een rechte der figuur, die door M gaat, om een vast punt draait. Bepaal den graad der beide poolkrommen. (DR. P. ZEEMAN GZ.)

Opgelost *door* DR. F. SCHUH *en* DR. P. ZEEMAN GZ.

Oplossing *van* DR. F. SCHUH.

We onderstellen in al het volgende, dat het vaste punt P, waarom de door M gaande rechte r draait, in het eindige, buiten de kromme C_n van den graad n en de klasse m, en niet op een harer isotrope raaklijnen of asymptoten ligt.

Poolkromme op het vaste vlak.

De snelheid van het punt der figuur, dat zich oogenblikkelijk in P bevindt, valt langs MP, de snelheid van het punt M langs de raaklijn in M aan de kromme C_n. Het tijdelijke rotatiecentrum R wordt dus gevonden als het snijpunt der loodlijnen in P en M op PM en de kromme C_n opgericht. Om den graad der poolkromme op het vaste vlak (de meetkundige plaats van R) te bepalen, hebben we na te gaan in hoeveel punten die poolkromme door een willekeurige door P gaande rechte l gesneden wordt. Deze snijpunten worden gevonden door in P op l een loodlijn op te richten, die C_n in n punten snijdt; de normalen van C_n in die punten M snijden l in n punten R der poolkromme. Deze wordt dus door een door P gaande rechte in n beweeglijke punten gesneden.

Bovendien is echter P zelf een punt der poolkromme en wel een N-voudig punt, waarin N de klasse der ontwondene van C_n voorstelt; d. i. het aantal bewegelijke voetpunten van nor-

malen [1]) uit een punt op C_n neer te laten. Immers om de veelvoudigheid van P als punt der poolkromme te bepalen, hebben we slechts na te gaan door hoeveel standen van M het punt P als punt der poolkromme wordt opgeleverd. Daartoe is noodig dat MP de normaal in M op C_n is. Het aantal normalen uit P naar C_n bedraagt N, welke normalen blijkens de gemaakte onderstelling geen van alle isotroop zijn [2]). Men kan aantoonen, dat het samenvallen dier N normalen geen verandering brengt in de veelvoudigheid van P als punt der poolkromme, wat trouwens te verwachten was uit de omstandigheid dat een verplaatsing van P, mits P niet op C_n zelf of op een harer isotrope raaklijnen of asymptoten komt te liggen, geen aanleiding geeft tot ontaarding van de poolkromme [3]). Het voorgaande gaat door welke singulariteiten en welke bijzondere ligging C_n moge vertoonen ten opzichte van de lijn in het oneindige of de bestaanbare cirkelpunten.

We vinden dus:

Ligt P *in het eindige buiten* C_n *en de isotrope raaklijnen of asymptoten van* C_n, *dan is de poolkromme op het vaste vlak van den graad* $(N+n)$ *met een* N*-voudig punt in* P, *als* N *de klasse der ontwondene van* C_n *voorstelt.*

De klasse der ontwondene is voor het geval, dat C_n niet door de cirkelpunten gaat en niet aan de lijn in het oneindige raakt, gelijk aan $n+m$, ook als C_n hoogere singulariteiten vertoont. Heeft C_n een bijzondere ligging ten opzichte van de lijn en de cirkelpunten in het oneindige, dan wordt de klasse der ontwondene uit de onderzoekingen van HALPHEN [4]) afgeleid. Vallen ε van de snijpunten van C_n met de lijn in

---

[1]) Van een normaal noemen we het voetpunt beweeglijk als dit zich verplaatst bij verplaatsing van het punt, waaruit de normalen worden neergelaten.

[2]) Ligt P op een isotrope raaklijn, waarvan het raakpunt M is, dan valt zoowel de normaal in P op PM als de normaal in M op de kromme langs PM, zoodat het dan niet zeker is, dat P de limietstand van het snijpunt dier normalen is. Ingewikkelder worden de toestanden als P op een isotrope asymptoot ligt.

[3]) Nadert daarentegen P tot een isotrope raaklijn van C_n, dan scheidt die raaklijn zich van de poolkromme af; is het een isotrope buigraaklijn dan scheidt zij zich dubbel van de poolkromme af, enz.

[4]) G. H. HALPHEN, *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes* (Mémoires prés. à l'Acad. des Sciences, (2) t. 26 (1879) no. 2, Article VI, p. 57—84).

het oneindige in de cirkelpunten, dan absorbeeren deze samen ε der $(n+m)$ voetpunten van normalen uit een willekeurig punt naar C_n, m. a. w. de cirkelpunten verminderen de klasse der ontwondene met ε. Dit gaat door welke singulariteiten C_n in de cirkelpunten bezit. Zij vervolgens S een in het oneindige maar buiten de cirkelpunten gelegen p-voudig punt van C_n, zoodat C_n door een rechte door S, die geen raaklijn is, in p punten S gesneden wordt, en snijdt de lijn in het oneindige de kromme C_n in q punten S, dan vermindert het punt S de klasse der ontwondene met $(q-p)$. In het geheel wordt dus de klasse der ontwondene door het buiten de cirkelpunten raken van C_n aan de lijn in het oneindige met $\sigma = \Sigma(q-p)$ verminderd, waarin Σ een sommeering voorstelt over alle buiten de cirkelpunten gelegen punten in het oneindige van C^n. Men vindt dus voor de klasse der ontwondene

$$N = n + m - \varepsilon - \sigma \text{ [1]}.$$

Het resultaat is dus:

In de gemaakte onderstelling vindt men voor den graad der poolkromme op het vaste vlak

$$n_1 = 2n + m - \varepsilon - \sigma.$$

Poolkromme op het bewegelijke vlak.

De poolkromme op het bewegelijke vlak wordt gevonden door den driehoek PMR telkens over te brengen naar een bepaalden stand van het bewegelijke vlak, dien we den beginstand noemen. Zij M_0 de beginstand van M en r_0 de beginstand van de rechte r der figuur, die door het vaste punt P blijft gaan. De driehoek PMR wordt in zijn vlak telkens zoo verplaatst, dat M in een vast punt M_0 en P ergens in P′ op een vaste door M_0 gaande rechte r_0 komt te liggen. Hieruit ziet men dat eenzelfde driehoek PMR op twee wijzen kan worden overgebracht, daar we MP uitgaande van M_0 op twee wijzen langs r_0 kunnen uitzetten. Ieder punt R levert dus in de poolkromme op het bewegelijke vlak twee

[1]) Gewoonlijk wordt aan ε en σ de beteekenis toegekend, dat de kromme ε maal door de cirkelpunten gaat en σ maal aan de lijn in het oneindige raakt, waarbij dan echter stilzwijgend ondersteld wordt dat de kromme in de cirkelpunten niet aan de lijn in het oneindige raakt en in de raakpunten met de lijn in het oneindige geen singulariteiten vertoont.

punten R′, wier verbindingslijn door M_0 middendoor gedeeld wordt. Hieruit volgt:

Het punt M_0 *is een middelpunt van de poolkromme op het beweeglijke vlak* [1]).

Om den graad dier poolkromme te bepalen zoeken we het aantal van haar snijpunten met de rechte r_0. Het punt R′ komt op r_0 te liggen als $P'R' = PR = 0$, dus PM normaal der gegeven kromme is. Het aantal dier normalen is $N = n + m - \varepsilon - \sigma$, die bij de gemaakte onderstelling omtrent de ligging van P geen van alle isotroop zijn. Ieder dier normalen geeft tot twee, symmetrisch ten opzichte van M, op r_0 gelegen punten R′ aanleiding; de raaklijn der poolkromme in die punten staat loodrecht op r_0. Hieruit volgt dat r_0 de poolkromme op het bewegelijke vlak in 2N buiten M_0 gelegen punten snijdt. Het onderling samenvallen der N normalen heeft op het aantal dier punten geen invloed [2]).

Bovendien is M_0 een punt der poolkromme. Zal R′ in M_0 vallen, dan moet ook het voetpunt P′ der loodlijn uit R′ op r_0 in M_0 vallen, dus $P'M_0 = PM = 0$ zijn. Uit dit laatste volgt dat M daartoe een der $2n - \varepsilon$ buiten de cirkelpunten gelegen snijpunten van C_n met de beide door P gaande isotrope rechten zijn moet; want als we M in een der cirkelpunten zelf kiezen, wordt de limietwaarde van PM oneindig groot, blijkens de onderstelling dat geen der isotrope asymptoten door P gaat. Telkens als we M in een der $2n - \varepsilon$ bovengenoemde punten kiezen valt R in M, dus R′ in M_0, zoodat M_0 een $(2n - \varepsilon)$-voudig punt der poolkromme wordt. De raaklijnen in M_0 aan de poolkromme zijn alle isotroop. Immers zulk een raaklijn ontstaat door de niet isotrope limietrichting van MR naar den beginstand van het bewegelijke vlak over te brengen. Daardoor

---

[1]) Die poolkromme bestaat uit twee symmetrisch ten opzichte van M_0 gelegen deelen, behoorend bij de twee bewegingen die bij bepaalde keus van C_n, M, P en r nog mogelijk zijn, n.l. de beweging waarbij de eene of de andere halfstraal, waarin r door M verdeeld wordt, door P gaat. Beide deelen der poolkromme behooren in het algemeen tot dezelfde algebraïsche kromme. In bijzondere gevallen kunnen ze echter verschillende krommen vormen In dat geval zullen we evenwel onder de poolkromme op het bewegelijke vlak het geheel dier beide krommen verstaan.

[2]) Wel ondergaat dit aantal een vermindering als een of meer der N normalen isotroop zijn. Dan valt R in M, dus R′ in M_0, zoodat men dan geen buiten M_0 gelegen snijpunt der poolkromme met r_0 vindt.

gaat de isotrope lijn PM in een niet-isotrope over, zoodat de oorspronkelijk niet-isotrope lijn MR een isotrope richting verkrijgt, die toegevoegd is aan de oorspronkelijke isotrope richting van PM. We vinden dus:

De poolkromme op het bewegelijke vlak heeft in M_0 *een* $(2n-\varepsilon)$-*voudig punt met isotrope raaklijnen.*

En verder:

In de gemaakte onderstelling vindt men voor den graad der poolkromme op het bewegelijke vlak

$$n_2 = 2N + 2n - \varepsilon = 4n + 2m - 3\varepsilon - 2\sigma.$$

Vraagstuk CXXVIII.

K 13 c. In de zijvlakken van viervlak $A_1A_2A_3A_4$ zijn vier punten B_k zoo aangenomen dat de rechten A_kB_k hyperboloïdisch liggen. Men construeert in elk zijvlak het punt C_k dat met B_k isogonaal verwant is met betrekking tot de zijden van dien driehoek. Te bewijzen, dat de vier rechten A_kC_k eveneens hyperboloïdische ligging hebben. (Dr. P. ZEEMAN Gz).

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, H. B. BONE Jr., Dr. Z. P. BOUMAN, Dr. F. SCHUH, Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. Z. P. BOUMAN.

Wij brengen een vlak α_1 aan dat van de in A_1 samenkomende ribben gelijke stukken $A_1A'_2$, $A_1A'_3$, $A_1A'_4$ afsnijdt. Daar A_1B_2 en A_1C_2 isogonaal verwant zijn ten opzichte van den hoek $A_3A_1A_4$, zullen hun snijpunten B'_2 en C'_2 met α_1 symmetrisch liggen ten opzichte van het midden der zijde $A'_3A'_4$.

Wegens de hyperboloïdische ligging der rechten A_kB_k gaan de vlakken $A_1A_2B_2$, $A_1A_3B_3$, $A_1A_4B_4$ door een rechte; derhalve snijden hun doorgangen met α_1, dus de rechten $A'_2B'_2$, $A'_3B'_3$, $A'_4B'_4$, elkaar in één punt. Maar deze rechten zijn achtereenvolgens isotoom verwant met de rechten $A'_2C'_2$, $A'_3C'_3$, $A'_4C'_4$; bijgevolg gaan ook deze rechten door één punt.

Hieruit volgt evenwel, dat de vlakken $A_1A_2C_2$, $A_1A_3C_3$ en $A_1A_4C_4$ elkaar volgens een rechte snijden. Derhalve hebben de

vier rechten A_kC_k zoodanige ligging, dat men door elk der punten A_k een rechte kan trekken, die hen snijdt. De rechten A_kC_k liggen dus hyperboloïdisch.

Vraagstuk CXXIX.

K 2 d. In het vlak van driehoek ABC liggen de punten P, P_1, P_2. Door P_1 en P_2 trekt men rechten evenwijdig aan AP, BP, CP, welke CA, AB, BC in A_1, B_1, C_1 en AB, BC, CA in A_2, B_2, C_2 snijden.

Als P_1 en P_2 vaste punten, A_1, B_1, C_1 en A_2, B_2, C_2 collineaire drietallen zijn, vraagt men te bepalen:

a. de meetkundige plaats van P;

b. de omhullenden der rechten $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$;

c. de meetkundige plaats van het snijpunt S dezer rechten.

(T. J. ALLERSMA.)

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

1. Wij beschouwen (fig. 10) ABC als assendriehoek van een barycentrisch coördinatenstelsel.

Stellen wij de coördinaten van P_1, P_2, P door (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), en (x_0, y_0, z_0) voor, dan is de vergelijking van AP

$$z_0y - y_0z = 0,$$

die van een lijn, welke evenwijdig aan AP is en door P_1 gaat,

$$(y_0z_1 - z_0y_1)x + (z_0x_1 + z_0z_1 + y_0z_1)y - (y_0x_1 + y_0y_1 + z_0y_1)z = 0.$$

Hieruit vinden wij voor A_1

$$y = 0\ ,\ (y_0z_1 - z_0y_1)x = (y_0x_1 + y_0y_1 + z_0y_1)z.$$

Evenzoo voor B_1 en C_1

$$z = 0\ ,\ (z_0x_1 - x_0z_1)y = (z_0y_1 + z_0z_1 + x_0z_1)x,$$
$$x = 0\ ,\ (x_0y_1 - y_0x_1)z = (x_0z_1 + x_0x_1 + y_0x_1)y.$$

a. Liggen nu A_1, B_1, C_1 op eene rechte lijn l_1,

$$\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1),$$

zoo heeft men

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1(y_0x_1 + y_0y_1 + z_0y_1) + \gamma_1(y_0z_1 - z_0y_1) = 0 \\ \beta_1(z_0y_1 + z_0z_1 + x_0z_1) + \alpha_1(z_0x_1 - x_0z_1) = 0 \\ \gamma_1(x_0z_1 + x_0x_1 + y_0x_1) + \beta_1(x_0y_1 - y_0x_1) = 0 \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ 2).$$

Vervangen wij x_0, y_0, z_0 door x, y, z, zoo volgt hieruit door eliminatie van α_1, β_1, γ_1

$$(x_1 + y_1 + z_1)(x + y + z)(x_1y_1yz + y_1z_1zx + z_1x_1xy) = 0;$$

derhalve heeft de meetkundige plaats (P) van P tot vergelijking

$$x_1y_1yz + y_1z_1zx + z_1x_1xy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3),$$

zij is dus eene kegelsnede, beschreven om ABC.

Liggen A_2, B_2, C_2 op eene rechte lijn l_2,

$$\alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4),$$

zoo vinden wij op dezelfde wijze voor de vergelijking der meetkundige plaats van P

$$z_2x_2yz + x_2y_2zx + y_2z_2xy = 0.$$

Opdat nu, bij verplaatsing van P, A_1, B_1, C_1 en A_2, B_2, C_2 steeds 2 collineaire drietallen blijven, zullen deze beide meetkundige plaatsen moeten samenvallen. Derhalve is te voldoen aan

$$\frac{x_1y_1}{z_2x_2} = \frac{y_1z_1}{x_2y_2} = \frac{z_1x_1}{y_2z_2}, \text{ dus aan } \frac{x_1}{z_2} = \frac{y_1}{x_2} = \frac{z_1}{y_2}.$$

Dus is

$$x_2 = y_1 \;,\; y_2 = z_1 \;,\; z_2 = x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5),$$

waardoor de onderlinge ligging van P_1 en P_2 wordt bepaald.

b Door eliminatie van x_0, y_0, z_0 vinden wij uit 2) de vergelijking

$$(x_1 + y_1 + z_1)(\alpha_1x_1 + \beta_1y_1 + \gamma_1z_1)(\gamma_1\alpha_1x_1 + \alpha_1\beta_1y_1 + \beta_1\gamma_1z) = 0.$$

Nu is $x_1+y_1+z_1 = 1$, terwijl $\alpha_1x_1+\beta_1y_1+\gamma_1z_1 = 0$ uitdrukt, dat de lijn l_1 door P_1 gaat, wat in 't algemeen niet het geval is; derhalve is

$$\gamma_1\alpha_1x_1 + \alpha_1\beta_1y_1 + \beta_1\gamma_1z_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6).$$

Natuurlijk vindt men ook

$$\gamma_2\alpha_2x_1 + \alpha_2\beta_2y_1 + \beta_2\gamma_2z_1 = 0.$$

Hierdoor wordt de onderlinge ligging van l_1, l_2, P_1, P_2 nader bepaald.

Ten einde de omhullende van l_1 te verkrijgen, nemen wij de

afgeleide van (1), beschouwen daarbij α_1 als constant en γ_1 als afhankelijk van β_1 volgens (6); wij vinden dan

$$yd\beta_1 + zd\gamma_1 = 0 \text{ en } (\alpha_1 y_1 + \gamma_1 z_1)\, d\beta_1 + (\alpha_1 x_1 + \beta_1 z_1)\, d\gamma_1 = 0,$$

bijgevolg

$$\alpha_1 (x_1 y - y_1 z) + \beta_1 z_1 y - \gamma_1 z_1 z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7).$$

Elimineeren wij nu α_1, β_1, γ_1 tusschen (1), (6), (7) zoo vinden wij voor de omhullende (H) van l_1

$$z_1^2 x^2 + x_1^2 y^2 + y_1^2 z^2 - 2x_1 y_1 yz - 2y_1 z_1 zx - 2z_1 x_1 xy = 0 \quad . \; . \; 8).$$

Op dezelfde wijze wordt voor de omhullende van l_2 gevonden

$$y_2^2 x^2 + z_2^2 y^2 + x_2^2 z^2 - 2z_2 x_2 yz - 2x_2 y_2 zx - 2y_2 z_2 xy = 0,$$

welke vergelijking wegens 5) geheel met de vorige overeen komt; m. a. w. l_1 en l_2 hebben dezelfde omhullende (H). Deze omhullende is eene kegelsnede, die de zijden van ABC aanraakt.

c. Uit 2) en 6) volgt

$$(\beta_1 - \alpha_1)\, \alpha_1 x_1 y_0 = (\gamma_1 - \alpha_1)\, \beta_1 y_1 z_0$$

Evenzoo is ook

$$(\gamma_2 - \alpha_2)\, \alpha_2 x_2 z_0 = (\beta_2 - \alpha_2)\, \gamma_2 z_2 y_0,$$

terwijl volgens 5)

$$y_1 z_2 = z_2 x_1.$$

Door deze vergelijkingen met elkander te vermenigvuldigen vinden wij

$$\alpha_1 \beta_1 \beta_2 (\gamma_2 - \alpha_2) + \beta_1 \gamma_1 \gamma_2 (\alpha_2 - \beta_2) + \gamma_1 \alpha_1 \alpha_2 (\beta_2 - \gamma_2) = 0 \; . \; . \; 9).$$

Het snijpunt S van l_1 en l_2 wordt bepaald door de vergelijkingen

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \quad , \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0.$$

Nu volgt uit

$$\gamma_1 \alpha_1 x_1 + \alpha_1 \beta_1 y_1 + \beta_1 \gamma_1 z_1 = 0 \text{ en } \gamma_2 \alpha_2 x_1 + \alpha_2 \beta_2 y_1 + \beta_2 \gamma_2 z_1 = 0 \; . \; . \; 6),$$

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 2z_1 yz : (-\mathrm{C} + \mathrm{H})\, z : (-\mathrm{B} - \mathrm{H})\, y,$$

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = 2z_1 yz : (-\mathrm{C} - \mathrm{H})\, z : (-\mathrm{B} + \mathrm{H})\, y,$$

waar

$$\mathrm{A} = -z_1 x + x_1 y + y_1 z \;,\; \mathrm{B} = z_1 x - x_1 y + y_1 z \;,\; \mathrm{C} = z_1 x + x_1 y - y_1 z,$$

$$\mathrm{H}^2 = z_1^2 x^2 + x_1^2 y^2 + y_1^2 z^2 - 2x_1 y_1 yz - 2y_1 z_1 zx - 2z_1 x_1 xy \; . \; . \; 10).$$

Substitueeren wij nu deze waarden van $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ en $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$ in 9) en nemen wij in aanmerking dat volgens bovenstaande vergelijkingen

$$H^2 - C^2 = -4z_1x_1xy \ , \ (H+B)(H+C) = 2z_1x(H-A) \ , \ B+C=2z_1x,$$

zoo vinden wij na herleiding

$$(\delta+\gamma)x + (\delta+\alpha)y + (\delta+\beta)z = (x_1+y_1+z_1)H \ldots 11),$$

en vervolgens voor de meetkundige plaats van S

$$\delta(\gamma x^2+\alpha y^2+\beta z^2) + (\delta^2+\alpha\beta)yz + (\delta^2+\beta\gamma)zx + (\delta^2+\gamma\alpha)xy = 0, \ldots 12),$$

waar

$$\alpha = y_1z_1 - x_1^2, \beta = z_1x_1 - y_1^2, \gamma = x_1y_1 - z_1^2, \delta = y_1z_1 + z_1x_1 + x_1y_1 \ldots 13).$$

De meetkundige plaats (S) van het snijpunt S der lijnen l_1 en l_2 is alzoo weder eene kegelsnede.

2. Laten (fig. 11) D, E, F de raaklijnen van H zijn, D_1, E_1, F_1, en D_2, E_2, F_2 de snijpunten van A_1P_1, B_1P_1, C_1P_1 en A_2P_2, B_2P_2, C_2P_2 met de zijden van $\triangle$ ABC.

Zij A'B C' de driehoek, gevormd door raaklijnen aan P in A, B, C; Q het snijpunt van AD, BE, CF.

Uit de vergelijking (8) van (H) volgt, dat het raakpunt D bepaald wordt door

$$x = 0, \ \frac{y}{y_1} = \frac{z}{x_1},$$

derhalve zijn AD, BE en CF bepaald door

$$\frac{y}{y_1} = \frac{z}{x_1} \ , \ \frac{z}{z_1} = \frac{x}{y_1} \ , \ \frac{x}{x_1} = \frac{y}{z_1};$$

deze lijnen gaan dus door het punt Q aangewezen door

$$x : y : z = x_1y_1 : y_1z_1 : z_1x_1.$$

Verder vinden wij voor AP_1 en voor de lijn door D evenwijdig aan CA de vergelijkingen

$$y_1x - x_1y = 0 \text{ en } y_1x - x_1y + y_1z = 0.$$

Deze lijnen snijden dus de zijde AB in één punt F_1, m. a. w. DF_1 // CA. Op dezelfde wijze blijkt

$$DF_1 \parallel CA, \; ED_1 \parallel AB, \; FE_1 \parallel BC,$$

$$DE_2 \parallel AB, \; EF_2 \parallel BC, \; FD_2 \parallel CA.$$

Is derhalve één van de 3 punten P_1, P_2, Q gegeven, zoo vindt men onmiddellijk en op zeer eenvoudige wijze de beide andere benevens de punten D, E, F, D_1, E_1, F_1, D_2, E_2, F_2.

Uit de vergelijking 3) van (P) vinden wij voor die van de raaklijn B'C' in A

$$\frac{y}{y_1} = -\frac{z}{x_1};$$

derhalve vormen AB, AC, AD, B'C' een harmonischen stralenbundel, zooals ook gemakkelijk uit de figuur is af te leiden. Hieruit volgt deze eenvoudige constructie voor die raaklijn: verleng DF_1 met een stuk $F_1d = DF_1$ zoo is d een punt van B'C'. Evenzoo construeert men C'A' en A'B'.

Verder blijkt nog uit de vergelijkingen

$$\frac{z}{z_1} = -\frac{x}{y_1}, \quad \frac{x}{x_1} = -\frac{y}{z_1} \text{ en } \frac{y}{y_1} = \frac{z}{x_1},$$

dat deze 3 lijnen door één punt gaan, m. a. w. de hoekpunten A', B', C' liggen op AQ, BQ, CQ.

3. *Constructie van* (P), (H), (S). Een willekeurig punt van (P) verkrijgt men als volgt (fig. 10). Trek door C' een willekeurige lijn, die BC en AC snijdt in ξ en η, trek Aξ en Bη, dan is hun snijpunt P een punt der kegelsnede (P).

Tot (P) behooren o.a. de volgende punten: A, B, C, P'_a, P^2_a, P'_b, P^2_b, P'_c, P^2_c (fig. 12) zijnde P'_a het snijpunt van AP_1 met een lijn uit C $\parallel BP_1$, P^2_a het snijpunt van AP_2 met een lijn door B $\parallel CP_2$, enz.

Na een willekeurig punt P van de kegelsnede (P) te hebben bepaald, trekt men door P_1 en P_2 lijnen evenwijdig aan AP, BP, CP die de zijden CA, AB, BC en AB, BC, CA snijden in de collineaire punten A_1, B_1, C_1 en A_2, B_2, C_2; de lijnen l_1 ($A_1B_1C_1$) en l_2 ($A_2B_2C_2$) zijn 2 raaklijnen van (H), hun snijpunt S is een punt van (S).

Op een meer rechtstreeksche wijze verkrijgt men raaklijnen en punten van (H) als volgt (fig. 10).

Neem op een der zijden van DEF, bv. op FD een willekeurig punt p, trek door p de lijnen Ap en Cp, die BC en AB snijden

in K en L, dan is KL weder een raaklijn aan (H); verbinden wij het snijpunt q (DL, FK) met B, zoo is het snijpunt H van Bq en KL het raakpunt.

Tot de raaklijnen aan (H) en de punten van (S) behooren o. a. de volgende:

$S'_a\beta_1$, $S'_b\gamma_1$, $S'_c\alpha_1$, $S^2_a\gamma_2$, $S^2_b\alpha_2$, $S^2_c\beta_2$ en S'_a, S'_b, S'_c, S^2_a, S^2_b, S^2_c;

hierin zijn (fig. 12)

S'_a en α_1 de snijpunten van AB en BC met een lijn uit P_2 // AP_1,

S^2_a en α_2 de snijpunten van CA en BC met een lijn uit P_1 // AP_2,

enz.

Een en ander is gemakkelijk te bewijzen.

4. *Onderlinge ligging van* P en S. Het snijpunt S (x, y, z) van l_1 en l_2 wordt volgens 1) en 4) bepaald door de evenredigheid

$$x : y : z = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) : (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) : (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \quad . \; . \; 14).$$

Dewijl volgens 3)

$$x_1y_1y_0z_0 + y_1z_1z_0x_0 + z_1x_1x_0y_0 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 15),$$

zoo vinden wij uit 2)

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \frac{z_1}{y_0(z_0x_1 - x_0z_1)} : \frac{x_1}{z_0(x_0y_1 - y_0x_1)} : \frac{y_1}{x_0(y_0z_1 - z_0y_1)}.$$

Evenzoo is ook

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \frac{y_2}{z_0(y_0x_2 - x_0y_2)} : \frac{z_2}{x_0(z_0y_2 - y_0z_2)} : \frac{x_2}{y_0(x_0z_2 - z_0x_2)},$$

of wegens 5)

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \frac{z_1}{z_0(y_0y_1 - x_0z_1)} : \frac{x_1}{x_0(z_0z_1 - y_0x_1)} : \frac{y_1}{y_0(x_0x_1 - z_0y_1)}.$$

Stellen wij nu

$$\alpha_1 = k_1 \frac{z_1}{y_0(z_0x_1 - x_0z_1)}, \; \beta_1 = k_1 \frac{x_1}{z_0(x_0y_1 - y_0x_1)}, \; \gamma_1 = k_1 \frac{y_1}{x_0(y_0z_1 - z_0y_1)};$$

$$\alpha_2 = k_2 \frac{z_1}{z_0(y_0y_1 - x_0z_1)}, \; \beta_2 = k_2 \frac{x_1}{x_0(z_0z_1 - y_0x_1)}, \; \gamma_2 = k_2 \frac{y_1}{y_0(x_0x_1 - z_0y_1)};$$

$$K = k_1 k_2 \times \frac{x_1 y_1 z_1}{x_0 y_0 z_0} \times$$

$$\times \frac{-y_0^2 z_0^2 x_1 y_1 - z_0^3 x_0^2 y_1 z_1 - x_0^2 y_0^2 z_1 x_1 + x_0 y_0 z_0 (x_0 z_1^2 + y_0 x_1^2 + z_0 y_1^2)}{(y_0 z_1 - z_0 y_1)(z_0 x_1 - x_0 z_1)(x_0 y_1 - y_0 x_1)(x_0 x_1 - z_0 y_1)(y_0 y_1 - x_0 z_1)(z_0 z_1 - y_0 x_1)},$$

zoo vinden wij

$$\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 = K \frac{(z_0 x_1 - x_0 z_1)(y_0 y_1 - x_0 z_1)}{x_0 z_1},$$

of lettende op 15)

$$\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 = K \{x_0 z_1 - (y_0 + z_0)(x_1 + y_1)\},$$
$$\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1 = K \{y_0 x_1 - (z_0 + x_0)(y_1 + z_1)\},$$
$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = K \{z_0 y_1 - (x_0 + y_0)(z_1 + x_1)\}.$$

Deze waarden in 14) substitueerende, vinden wij

$$x : y : z = \{x_0 z_1 - (y_0 + z_0)(x_1 + y_1)\} : \{y_0 x_1 - (z_0 + x_0)(y_1 + z_1)\} :$$
$$: \{z_0 y_1 - (x_0 + y_0)(z_1 + x_1)\},$$

zoodat wij de coördinaten van S aldus kunnen voorstellen:

$$x = \lambda \{x_0 z_1 - (y_0 + z_0)(x_1 + y_1)\}, \quad y = \lambda \{y_0 x_1 - (z_0 + x_0)(y_1 + z_1)\},$$
$$z = \lambda \{z_0 y_1 - (x_0 + y_0)(z_1 + x_1)\}.$$

Door optelling volgt hieruit

$$x + y + z = -\lambda (x_0 + y_0 + z_0)(x_1 + y_1 + z_1) \text{ d.i. } \lambda = -1,$$

alzoo $\quad x = -x_0 z_1 + (y_0 + z_0)(x_1 + y_1) = 1 - x_0 - z_1,$

of $\quad x + x_0 = 1 - z_1 = x_1 + y_1 = x_1 + x_2.$

Bijgevolg is

$$\tfrac{1}{2}(x + x_0) = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \tfrac{1}{2}(y + y_0) = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad \tfrac{1}{2}(z + z_0) = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2),$$

d. w. z.: het midden M van $P_1 P_2$ is tevens het midden van PS (fig. 12).

Hieruit volgt: *Indien men de kegelsnede* (P) *een gestrekten hoek om* M *draait, zoo valt zij samen met de kegelsnede* (S).

5. De poollijn van een punt (x_0, y_0, z_0) ten opzichte van de kegelsnede K, voorgesteld door

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0 \ldots 16),$$

is $(Ax_0 + Fy_0 + Ez_0)x + (Fx_0 + By_0 + Dz_0)y + (Ex_0 + Dy_0 + Cz_0)z = 0$. 17)

Lettende op 5) en 13) zoo vinden wij voor de vergelijking van P_1P_2

$$\gamma x + \alpha y + \beta z = 0.$$

Ligt nu (x_0, y_0, z_0) op de lijn P_1P_2 en op oneindigen afstand van $\triangle$ ABC zoo is

$$\gamma x_0 + \alpha y_0 + \beta z_0 = 0 \quad , \quad x_0 + y_0 + z_0 = 0,$$

dus $$x_0 : y_0 : z_0 = (\alpha - \beta) : (\beta - \gamma) : (\gamma - \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; 18).$$

De poollijn wordt nu de toegevoegde middellijn van P_1P_2 (d. w. z. de middellijn, die alle koorden van K, welke // P_1P_2, middendoor deelt) en voor hare vergelijking vinden wij uit 17) en 18)

$$\{A(\alpha-\beta)+F(\beta-\gamma)+E(\gamma-\alpha)\}x+\{F(\alpha-\beta)+B(\beta-\gamma)+D(\gamma-\alpha)\}y+$$
$$+\{E(\alpha-\beta)+D(\beta-\gamma)+C(\gamma-\alpha)\}z=0.$$

Dit toepassende op de kegelsneden (P), (H), (S) zoo vinden wij, in aanmerking nemende dat

$$(\alpha - \beta) : (\beta - \gamma) : (\gamma - \alpha) = (z_1 - y_1) : (y_1 - z_1) : (z_1 - x_1),$$
$$(\delta - \gamma) : (\delta - \alpha) : (\delta - \beta) = \quad z_1 \quad : \quad x_1 \quad : \quad y_1 \quad ,$$

voor de toegevoegde middellijn van P_1P_2 in *elk dezer* 3 kegelsneden

$$(x_1 - y_1) z_1^2 x + (y_1 - z_1) x_1^2 y + (z_1 - x_1) y_1^2 z = 0.$$

Deze gemeenschappelijke middellijn m van (P), (H), (S) gaat door Q en door de middelpunten van (P), (H), (S); zij deelt alle koorden, in deze 3 kegelsneden evenwijdig aan P_1P_2 getrokken, middendoor (fig. 12).

6. Het middelpunt van K (zie 5) wordt bepaald door

$$Ax + Fy + Ez = Fx + By + Dz = Ex + Dy + Cz.$$

Hieruit vinden wij voor 't middelpunt van (H)

$$z_1 (z_1 x - x_1 y - y_1 z) = x_1 (-z_1 x + x_1 y - y_1 z) = y_1 (-z_1 x - x_1 y + y_1 z),$$

dus

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + y_1) = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \; y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \; z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Het middelpunt van (H) is alzoo het midden M van P_1P_2. Verder vinden wij voor het middelpunt van (P)

$$x : y : z = x_1y_1(y_1z_1 + z_1x_1 - x_1y_1) : y_1z_1(z_1x_1 + x_1y_1 - y_1z_1) : \\ : z_1x_1(x_1y_1 + y_1z_1 - z_1x_1),$$

welk punt naar behooren op m ligt.

Om m te construeeren, behoeft men slechts een lijn te trekken door Q en M.

Verder bepaalt men het middelpunt van (P) door constructie als volgt.

Trek door A′, B′, C′ en de middens der zijden van ABC lijnen, zoo snijden deze elkaar in 't middelpunt van (P).

Dewijl (P) met (S) samenvalt, indien men deze een gestrekten hoek om M draait, zoo liggen de middelpunten van (P) en (S) op m aan weerszijden op gelijke afstanden van M.

Daar men nu de middelpunten van (P), (H), (S) kent, kan men uit ieder punt en iedere raaklijn van een dezer kegelsneden terstond een ander punt en eene andere raaklijn afleiden.

Eindelijk zij hier nog opgemerkt:

dat (P) en (S) ellipsen, parabolen, hyperbolen zijn naarmate Q binnen, op, buiten de ellips ligt, die de zijden van ABC in de middens der zijden aanraakt,

dat (H) een ellips, parabool, hyperbool is naarmate Q binnen, op, buiten de ellips van STEINER van ABC ligt,

dat de snijpunten van $S'_aS^2_c$ en CA, $S'_bS^2_a$ en AB, $S'_cS^2_b$ en BC op P_1P_2 liggen.

Vraagstuk CXXX.

K 2 d. De loodlijnen uit het hoogtepunt van driehoek ABC op de rechten AP, BP, CP snijden de zijden AB, BC, CA in de collineaire punten A′, B′, C′ of de zijden CA, AB, BC in de collineaire punten A″, B″, C″. Bewijs dat P op de ellips van STEINER ligt, en dat de rechten A′B′C′ en A″B″C″ een ellips omhullen, die de zijden van ABC in de voetpunten der hoogtelijnen aanraakt. (Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* Dr. H. VAN AUBEL.

Oplossing *van* Dr. H. VAN AUBEL.

1. Zijn α', β', γ' de barycentrische (areale) coördinaten van P, en vervangt men kortheidshalve $b^2 + c^2 - a^2$, $c^2 + a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$ achtereenvolgens door a'^2, b'^2, c'^2, dan zijn de

coördinaten van het hoogtepunt $b'^2c'^2$, $c'^2a'^2$, $a'^2b'^2$, en wordt de loodlijn uit dat punt op AP aangewezen door de vergelijking

$$[(2c^2c'^2 + a'^2b'^2)\beta' + (2b^2b'^2 + c'^2a'^2)\gamma']\,a'^2\alpha' -$$
$$- (2c^2c'^2 + a'^2b'^2)\,b'^2\beta'\beta - (2b^2b'^2 + c'^2a'^2)\,c'^2\gamma'\gamma = 0,$$

of daar men heeft

$$2b^2b'^2 + c'^2a'^2 = 2c^2c'^2 + a'^2b'^2 = 16\,\mathrm{I}^2,$$

door

$$a'^2(\beta' + \gamma')\,\alpha - b'^2\beta'\beta - c'^2\gamma'\gamma = 0.$$

De coördinaten van A′ zijn derhalve

$$b'^2\beta',\ a'^2(\beta' + \gamma'),\ 0.$$

Evenzoo vindt men voor B′ en C′ de coördinaten

$$\begin{array}{ccc} 0 & , \ c'^2\gamma' & , \ b'^2(\gamma' + \alpha'); \\ c'^2(\alpha' + \beta') & , \ 0 & , \ a'^2\alpha'. \end{array}$$

Opdat A′, B′, C′ in een rechte liggen, moet voldaan zijn aan

$$\begin{vmatrix} b'^2\beta' & a'^2(\beta' + \gamma') & 0 \\ 0 & c'^2\gamma' & b'^2(\gamma' + \alpha') \\ c'^2(\alpha' + \beta') & 0 & a'^2\alpha' \end{vmatrix} = 0.$$

Na deeling door $a'^2b'^2c'^2(\alpha' + \beta' + \gamma')$ vindt men hieruit

$$\beta'\gamma' + \gamma'\alpha' + \alpha'\beta' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

P moet dus op de ellips van STEINER liggen.

2. De rechte A′B′ heeft tot vergelijking

$$a'^2(\beta' + \gamma')(\gamma' + \alpha')\,\alpha - b'^2(\gamma' + \alpha')\,\beta'\beta + c'^2\beta'\gamma'\gamma = 0,$$

die, als men rekening houdt met 1), overgaat in

$$a'^2(\beta' + \gamma')\gamma'\alpha - b'^2\beta'\gamma'\beta + c'^2(\beta' + \gamma')\beta'\gamma = 0,$$

of ook

$$c'^2\gamma\beta'^2 + (a'^2\alpha - b'^2\beta + c'^2\gamma)\beta'\gamma' + a'^2\alpha\gamma'^2 = 0.$$

Dus wordt de omhullende van A′B′ aangewezen door

$$(a'^2\alpha - b'^2\beta + c'^2\gamma)^2 = 4c'^2a'^2\gamma\alpha,$$

of

$$a'^4\alpha + b'^4\beta^2 + c'^4\gamma^2 - 2b'^2c'^2\beta\gamma - 2c'^2a'^2\gamma\alpha - 2a'^2b'^2\alpha\beta = 0.$$

Zij is blijkbaar een kegelsnede, welke de zijden van ABC in de voetpunten der hoogtelijnen aanraakt.

Op soortgelijke wijs vindt men dat A″, B″, C″ op een rechte liggen welke dezelfde kegelsnede aanraakt.

Vraagstuk CXXXI.

K 1 c. ABC en $A_1B_1C_1$ zijn twee willekeurige, in hetzelfde vlak gelegen, driehoeken. Door A, B, C trekt men rechten evenwijdig aan CC_1, AA_1, BB_1; zij snijden BB_1, CC_1, AA_1 in A′, B′, C′. Te bewijzen, dat de driehoeken ABC en A′B′C′ even groot zijn.

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, J. A. BARRAU, J. VAN DE GRIEND JR., G. HULSTEEDE, J. A. KERKHOVEN, A. W. KLOOS, Dr. F. SCHUH *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* J. VAN DE GRIEND JR.

Daar de punten A_1, B_1, C_1 slechts dienen tot bepaling van de richtingen der paren evenwijdige lijnen, heeft men eigenlijk de volgende eigenschappen te bewijzen: „Als de paren overstaande zijden van een zeshoek AA′BB′CC′ evenwijdig loopen, dan hebben de driehoeken ABC en A′B′C′ gelijken inhoud".

Verplaatst men (fig. 13) de zijden AA′ en B′C evenwijdig aan zichzelf totdat de punten A en A′ in het punt (AA′) en de punten B′ en C in het punt (B′C) zijn samengevallen, dan is de zeshoek overgegaan in een parallelogram, en de driehoeken ABC en A′B′C′ hebben blijkbaar gelijken inhoud. Laat men nu, uitgaande van dit parallelogram, de zijde B′C weer ontstaan, dan blijven gedurende de beweging de driehoeken ABC en A′B′C′ even groot. De te bewijzen eigenschap geldt dus reeds voor het geval dat een der zijden in een driehoek is overgegaan.

Laat men vervolgens de zijde AA′ weer ontstaan, waarbij A en A′ zich langs vaste rechten verplaatsen, dan zijn gedurende de beweging de inhouden van ABC en A′B′C′ geheele lineaire functies van den afstand van A tot eenig vast punt der rechte AC′. Deze functies hebben dezelfde waarde als A′ met A vereenigd is, en wanneer A in C′ komt: in beide gevallen geldt immers de voor den vijfhoek bewezen eigenschap. Dus hebben ze voor alle standen van AA′ dezelfde waarden, waarmee de stelling bewezen is.

Oplossing *van* J. A. KERKHOVEN.

Zij A″ (fig. 14) het snijpunt der diagonalen van het trapezium AA′B′C, B″ het snijpunt der diagonalen van BB′C′A, C″ het snijpunt der diagonalen van CC′A′B. Nu heeft men

$$ABB'' = B'C'B'', \; BCC'' = C'A'C'', \; CAA'' = A'B'A''.$$

Telt men deze vergelijkingen bij elkaar op en vermeerdert beide leden met den inhoud van driehoek A″B″C″, dan vindt men ABC = A′B′C′.

Dit bewijs gaat steeds door mits men rekening houdt met de teekens der inhouden.

Vraagstuk CXXXII.

K 1 c. De zijden van driehoek ABC worden door een rechte in A_1, B_1, C_1 gesneden. Door een willekeurig punt P trekt men de rechten PA′, PB′, PC′, die achtereenvolgens gelijk en evenwijdig zijn aan AA_1, BB_1, CC_1. Bewijs, dat driehoek A′B′C′ het dubbel is van ABC. (Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, J. A. BARRAU, J. VAN DE GRIEND JR., J. A. KERKHOVEN, A. W. KLOOS, Dr. F. SCHUH *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

Beschouwen we den inhoud van een driehoek als positief als de omloopszin in de volgorde der letters met dien van driehoek ABC overeenstemt, dan is

$$A'B'C' = PB'C' + PC'A' + PA'B' \quad . \; . \; . \; . \quad 1).$$

Verstaat men verder onder den inhoud van vierhoek BCB_1C_1 de uitdrukking

$$OBC + OCB_1 + OB_1C_1 + OC_1B,$$

waar O een willekeurig punt is, dan kan gemakkelijk aangetoond worden, dat men heeft

$$PB'C' = BCB_1C_1.$$

Daartoe is slechts noodig door de hoekpunten van den vierhoek rechten te trekken evenwijdig aan de diagonalen, en het daardoor gevormde parallelogram te beschouwen.

Nu kan 1) vervangen worden door

$$A'B'C' = BCB_1C_1 + CAC_1A_1 + ABA_1B_1,$$

of door

$$A'B'C' = (OBC + OCB_1 + OB_1C_1 + OC_1B) +$$
$$+ (OCA + OAC_1 + OC_1A_1 + OA_1C) + (OAB + OBA_1 + OA_1B_1 + OB_1A).$$

Maar men heeft

$$OAC_1 + OC_1B = OAB, \quad OBA_1 + OA_1C = OBC, \quad OCB_1 + OB_1A = OCA,$$

terwijl

$$OA_1B_1 + OB_1C_1 + OC_1A_1 = 0$$

is, omdat de punten A_1, B_1, C_1 in een rechte liggen.

Bijgevolg is

$$A'B'C' = 2OAB + 2OBC + 2OCA = 2ABC.$$

Oplossing *van* J. VAN DE GRIEND JR.

Wij bewijzen de volgende *uitbreiding* der gegeven stelling: Als men op de zijden BC, CA en AB van een driehoek, of op hun verlengden, drie punten A_1, B_1 en C_1 kiest, en uit een willekeurig punt P de rechten PA', PB', PC' achtereenvolgens gelijk en evenwijdig aan AA_1, BB_1, CC_1 trekt, is

$$A'B'C' = 2ABC + A_1B_1C_1.$$

Wij nemen eerst aan, dat de punten B_1 en C_1 liggen in C en A en dat het punt A_1 de rechte BC doorloopt; A' doorloopt dan een met BC evenwijdige rechte a'. Men ziet gemakkelijk in, dat de oppervlakte van A'B'C' dan een geheele lineaire functie is van den afstand van A' tot eenig vast punt K' der rechte a'; terwijl $2ABC + A_1B_1C_1$ een geheele lineaire functie is van den afstand van A_1 tot het overeenkomstige vaste punt K_1 van BC dat bepaald is door de voorwaarde $A_1K_1 = A'K'$. Uit de figuur ziet men, dat de beide lineaire functiën voor twee standen van A_1 dezelfde waarde hebben, n.l. als A_1 in B ligt (gemeenschappelijke waarde 3ABC) en als A_1 in C ligt (gemeenschappelijke waarde 2ABC). Bijgevolg hebben ze voor alle standen van A_1 in BC of het verlengde daarvan dezelfde waarde.

Wij nemen vervolgens aan, dat A_1 een willekeurig vast punt van BC is, dat B_1 in C ligt en C_1 de rechte AB door-

loopt, dus C′ een rechte $c' \parallel AB$. Uit het eerst bewezene volgt dan de gelijkheid der beide functiën voor de ligging van C_1 in A en B; bijgevolg geldt ze voor iedere ligging in AB.

Eindelijk verplaatsen wij, terwijl A_1 en C_1 willekeurige vaste punten van BC en AB blijven, B_1 langs AC. De gelijkheid der beide functiën voor iedere ligging van B_1 op AC volgt dan weer uit de gelijkheid voor de ligging in A en in C, en deze uit het in de tweede plaats bewezene.

Vraagstuk CXXXIII.

A 3 b. Men vraagt de oplossing van het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n &= s_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 &= s_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots\ldots + x_n^n &= s_n. \end{aligned}$$

(J. A. BARRAU).

Opgelost *door* C. VAN ALLER, J. A. BARRAU, Dr. H. BREMEKAMP, G. HULSTEEDE *en* Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF.

Oplossing.

Stelt men dat de onbekenden de wortels zijn van de vergelijking

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0 \quad \ldots\ldots \; 1),$$

dan is (zie b.v. Lobatto—Rahusen, 6e druk, bl. 475)

$$\left.\begin{aligned} s_1 + p_1 &= 0, \\ s_2 + s_1 p_1 + 2p_2 &= 0, \\ s_3 + s_2 p_1 + s_1 p_2 + 3p_3 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n + s_{n-1} p_1 + s_{n-2} p_2 + \ldots + s_1 p_{n-1} + n p_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \; 2).$$

Door eliminatie van $p_1, p_2 \ldots p_n$ uit 1) en 2) vindt men, dat de gevraagde onbekenden de wortels zijn van de vergelijking

$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & . & . & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & . & . & s_1 & n \\ x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & . & . & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Voor den coefficiënt p_k vindt men uit 2)

$$1 \,.\, 2 \ldots k \,.\, p_k = (-1)^k \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & . & . & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & . & . & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & . & . & s_2 & s_1 \end{vmatrix} .$$

Hoewel de ontwikkeling van den laatsten determinant kan geschieden door hem te beschouwen als te zijn gerand door de eerste kolom en de laatste rij, zoo vindt men eenvoudiger nog uit 1) achtereenvolgens

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = -s_1,\ 1 \,.\, 2p_2 = s_1^2 - s_2,\ 1 \,.\, 2 \,.\, 3p_3 = -s_1^3 + 3s_1 s_2 - 2s_3, \\ 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4p_4 = s_1^4 - 6s_1^2 s_2 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2 - 6s_4, \text{ enz.} \end{array}\right\} \quad . \, . \, 3).$$

Opmerking van C. van Aller. In „*Panton* and *Burnside*, Theory of Equations" vindt men de betrekking

$$1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots p_n y^n = e^{-s_1 y - \frac{1}{2} s_2 y^2 - \frac{1}{3} s_3 y^3 - \cdots}.$$

Door het 2e lid in een reeks te ontwikkelen volgens de opklimmende machten van y en daarna de coëfficienten van y^k in beide leden aan elkaar gelijk te stellen, vindt men insgelijks hoe p_k afhangt van $s_1, s_2 \ldots s_k$. Echter is ook hierdoor niet aangewezen, volgens welke wet de coëfficienten der termen worden gevormd.

Vraagstuk CXXXIV.

K 8 b. Zijn A, B, C, D de middens der zijden van een vierhoek, die in een cirkel met middelpunt M is beschreven, dan is

$$\overline{AB}\,(\overline{MA} \,.\, \overline{MB} + \overline{MC} \,.\, \overline{MD}) = \overline{AD}\,(\overline{MA} \,.\, \overline{MD} + \overline{MB} \,.\, \overline{MC}).$$

(J. A. Barrau.)

Opgelost *door* T. J. Allersma, J. A. Barrau, Dr. H. Bremekamp, J. van de Griend Jr., G. Hulsteede, E. D. J. de Jongh Jr., Mej. Dr. E. van de Kamer, Mevr. A. G. Kerkhoven—Wijthoff, J. A. Kerkhoven, A. W. Kloos, T. van Lohuizen, Dr. J. G. Rutgers, Dr. F. Schuh *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* Dr. H. BREMEKAMP *en* Dr. C. STOLP.

Is R de straal van den gegeven cirkel, dan is $\frac{1}{2}$R de straal van de cirkels, die om de driehoeken AMB, BMC, CMD en DMA kunnen beschreven worden. Voor de driehoeken AMB en CMD heeft men nu

$$\overline{AB} \,.\, \overline{AM} \,.\, \overline{BM} = 2R \times \text{inh. AMB},$$

$$\overline{CD} \,.\, \overline{CM} \,.\, \overline{DM} = 2R \times \text{inh. CMD}.$$

Daar ABCD een parallelogram is, volgt hieruit door optelling

$$\overline{AB}\,(\overline{AM} \,.\, \overline{BM} + \overline{CM} \,.\, \overline{DM}) = R \times \text{inh. ABCD}.$$

Evenzoo is

$$\overline{AD}\,(\overline{AM} \,.\, \overline{DM} + \overline{BM} \,.\, \overline{CM}) = R \times \text{inh. ABCD}.$$

Uit de laatste twee vergelijkingen volgt het gestelde.

Oplossing *van* G. HULSTEEDE *en* E. D. J. DE JONGH Jr.

De zijden van den koordenvierhoek noemen we $2a$, $2b$, $2c$, $2d$, de afstanden van hun middens tot M achtereenvolgens α, β, γ, δ. De vier koordenvierhoeken, waarin de oorspronkelijke vierhoek door de rechten MA, MB, MC, MD verdeeld wordt, leveren de volgende vergelijkingen, waarin R den straal van den gegeven cirkel, e en f de zijden AB en AD voorstellen.

$$a\beta + b\alpha = Re, \quad 1) \qquad b\gamma + c\beta = Rf, \quad 2)$$

$$c\delta + d\gamma = Re, \quad 3) \qquad d\alpha + a\delta = Rf. \quad 4)$$

Uit 1) en 3) vindt men, door vermenigvuldiging met $\gamma\delta$ en $\alpha\beta$, gevolgd door optelling

$$a\beta\gamma\delta + b\gamma\delta\alpha + c\delta\alpha\beta + d\alpha\beta\gamma = Re\,(\alpha\beta + \gamma\delta).$$

Op overeenkomstige wijze uit 2) en 4)

$$a\beta\gamma\delta + b\gamma\delta\alpha + c\delta\alpha\beta + d\alpha\beta\gamma = Rf\,(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

Derhalve is

$$e\,(\alpha\beta + \gamma\delta) = f\,(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

De raaklijnen in de hoekpunten van den koordenvierhoek

vormen een vierhoek A'B'C'D', waarvan de hoekpunten de inversies zijn van A, B, C, D ten opzichte van den cirkel.

Dus heeft men $\overline{A'B'} : \overline{AB} = R^2 : \overline{MA} \,.\, \overline{MB}$ enz.

Substitutie in de vergelijking $\overline{A'B'} + \overline{C'D'} = \overline{A'D'} + \overline{B'C'}$ levert na herleiding het gestelde.

Vraagstuk CXXXV.

K 9 d. Is een zeshoek beschreven in een cirkel met middelpunt M, dan gaan de drie cirkels, welke M met de middens van overstaande zijden verbinden, door één punt. (J. A. BARRAU).

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, Dr. H. BREMEKAMP, J. VAN DE GRIEND Jr., G. HULSTEEDE, E. D. J. DE JONGH Jr., Mej. Dr. E. VAN DE KAMER, J. A. KERKHOVEN, A. W. KLOOS, T. VAN LOHUIZEN, Dr. C. STOLP *en* Dr. W. A. VERSLUYS.

Oplossing *van* Mej. Dr. E. VAN DE KAMER.

Wij noemen de middens der zijden achtereenvolgens A, B, C, D, E, F. Het middelpunt M_1 van cirkel AMD wordt bepaald door de rechten welke AM en DM loodrecht midden door deelen. De middelpunten M_1, M_2, M_3 der bedoelde drie cirkels zijn dus de snijpunten der overstaande zijden van een zeshoek, die met den gegeven zeshoek gelijkvormig gelegen is, dus een omgeschreven cirkel bezit. Volgens de stelling van PASCAL liggen nu M_1, M_2, M_3 op een rechte *m*. De cirkels AMD, BME, CMF hebben dus nog het spiegelbeeld van M' van M ten opzichte van *m* gemeen.

OPMERKING. De stelling kan door inversie afgeleid worden uit de stelling van BRIANCHON. (J. A. B.)

Vraagstuk CXXXVI.

K 18 g. M is het middelpunt van den om het viervlak ABCD beschreven bol. Elke drie hoekpunten worden met M door een bol verbonden. Bewijs, dat de middelpunten en raakpunten der bollen, welke deze vier bollen aanraken, achtereenvolgens collineair zijn met M en de middelpunten en raakpunten der in- en aangeschreven bollen van viervlak ABCD. (J. A. BARRAU.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU *en* J. VAN DE GRIEND Jr.

Oplossing.

Ten opzichte van den om ABCD beschreven bol (M) is de bol MABC de inversie van het vlak ABC. Derhalve is de bol (N), die de vier bollen MABC, MABD, MACD, MBCD uitwendig aanraakt, de inversie van den in viervlak ABCD beschreven bol (I). Daar de raakpunten der bollen (N) en (I) met den bol MABC overeenkomstige punten zijn, liggen ze in een rechte met M; hetzelfde geldt omtrent de middelpunten N en I. Soortgelijke overwegingen gelden voor de overige zeven bollen, die het viertal bollen aanraken, daar zij de inversies zijn van de overige zeven bollen welke de zijvlakken van ABCD aanraken.

Vraagstuk CXXXVII.

K 18 g. Trekt men door een gelijkvormigheidspunt van twee bollen drie rechten, welke deze bollen achtereenvolgens in

$$a_1,\ a_2,\ A_1,\ A_2;\ b_1,\ b_2,\ B_1,\ B_2;\ c_1,\ c_2,\ C_1,\ C_2$$

snijden, dan kunnen deze 12 punten nog op 4 wijzen in twee zestallen verdeeld worden, zoodat door elk zestal een bol gaat. Bewijs, dat de middelpunten van die 8 bollen de hoekpunten zijn van een parallelopipedum, waarvan het middelpunt den afstand van de middelpunten der gegeven bollen middendoor deelt.

(J. A. BARRAU.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. H. BREMEKAMP, J. VAN DE GRIEND Jr., Mej. Dr. E. VAN DE KAMER, A. W. KLOOS *en* DR. F. SCHUH.

Oplossing *van* DR. F. SCHUH.

De acht snijpunten der bollen (M) en (m) met twee der rechten a en b kunnen op twee wijzen in viertallen gerangschikt worden, zoodat door elk viertal een cirkel gaat. Men vindt b.v. de cirkels

$$a_1A_2b_1B_2,\ a_2A_1b_2B_1 \text{ en } a_1A_2b_2B_1,\ a_2A_1b_1B_2,$$

waarvan we de middelpunten m_1, m_2, m_3, m_4 zullen noemen, terwijl de middelpunten der cirkels $(a_1a_2b_1b_2)$ en $(A_1A_2B_1B_2)$ door m_c en M_c zullen aangewezen worden.

Nu staat $m_c m_1$ loodrecht op $a_1 b_1$, $M_c m_2$ loodrecht op $A_1 B_1$; dus zijn $m_c m_1$ en $M_c m_2$ evenwijdig. Evenzoo is $m_c m_2$ evenwijdig met $M_c m_1$. Derhalve is $m_c m_1 M_c m_2$ een parallelogram. Ook $m_c m_3 M_c m_4$ is een parallelogram. Dus is $m_1 m_3 m_2 m_4$ een parallelogram, waarvan het middelpunt in het midden van $M_c m_c$ ligt.

Daar ook a_1, A_2, c_1, C_2 op een cirkel liggen, gaat er een bol door de zes punten a_1, A_2, b_1, B_2, c_1, C_2. Een tweede bol bevat de punten a_1, A_2, b_1, B_2, c_2, C_1. Door cirkel (m_1) gaan dus twee bollen (M_1), (M_5), en $M_1 M_5$ is loodrecht op het vlak (ab).

Op deze wijze vindt men de volgende acht bollen

$M_1\,(a_1 A_2 b_1 B_2 c_1 C_2)$ en $M_5\,(a_1 A_2 b_1 B_2 c_2 C_1)$ door cirkel (m_1),

$M_2\,(a_2 A_1 b_2 B_1 c_1 C_2)$ en $M_6\,(a_2 A_1 b_2 B_1 c_2 C_1)$ door cirkel (m_2),

$M_3\,(a_1 A_2 b_2 B_1 c_1 C_2)$ en $M_7\,(a_1 A_2 b_2 B_1 c_2 C_1)$ door cirkel (m_3),

$M_4\,(a_2 A_1 b_1 B_2 c_1 C_2)$ en $M_8\,(a_2 A_1 b_1 B_2 c_2 C_1)$ door cirkel (m_4).

Blijkbaar zijn nu $M_1 M_5$, $M_2 M_6$, $M_3 M_7$, $M_4 M_8$ allen loodrecht op vlak (ab), dus onderling evenwijdig.

Evenzoo vindt men dat vier rechten $M_k M_l$ loodrecht zijn op vlak (bc) en vier loodrecht op (ca). Dus zijn de acht punten M_k de hoekpunten van een parallelopipedum, waarmee de vlakken (ab), (bc), (ca) rechte doorsneden bepalen. Het middelpunt van dit parallelopipedum is het snijpunt der loodlijnen in de middelpunten der rechte doorsneden op hun vlakken, dus het midden van de verbindingslijn der middelpunten M en m der gegeven bollen.

Vraagstuk CXXXVIII.

N⁴ 1 b. Door de snijpunten van twee cirkels legt men kegelsneden, welke die cirkels aanraken. Bepaal de meetkundige plaats van de polen der machtlijn dezer cirkels ten opzichte van de bedoelde kegelsneden. (J. A. BARRAU.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU *en* Dr. F. SCHUH.

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

Volgens een bekende stelling bestaat de meetkundige plaats der middelpunten P der cirkels π, die twee gegeven cirkels

μ en ν (met middelpunten M en N) aanraken, uit twee kegelsneden α en β, welke door de in het eindige gelegen snijpunten A en B van μ, ν gaan, en M, N tot brandpunten hebben.

Zijn C, D de cyclische punten, dan worden α, β dus aangeraakt door de isotrope rechten MC, MD, NC, ND, die tevens μ en ν in C en D aanraken. Daar verder elk punt P de pool is van de in het oneindige gelegen rechte CD ten opzichte van een cirkel π, zal de stelling door een projectieve vervorming, welke C, D in twee eindige punten C′, D′ omzet, overgaan in de volgende eigenschap:

I. Hebben twee kegelsneden μ', ν' de punten A′, B′, C′, D′ gemeen, dan bestaat de meetkundige plaats der polen van C′D′ ten opzichte van de kegelsneden π', die door C′, D′ gaan en μ', ν' aanraken, uit twee kegelsneden α', β' door A′, B′, die de raaklijnen in C′, D′ aan μ', ν' tot raaklijnen hebben.

Worden nu A′ en B′ in de cyclische punten gelegd, dan gaan de kegelsneden μ', ν', α', β' over in cirkels, en men vindt de volgende stelling:

II. De meetkundige plaats van de polen der machtlijn van twee cirkels μ, ν ten opzichte van de kegelsneden die μ en ν raken en door hun niet-cyclische snijpunten C, D gaan, bestaat uit twee cirkels welke de raaklijnen in C, D aan μ, ν tot raaklijnen hebben.

OPMERKING. Neemt men in stelling I voor de rechte C′D′ achtereenvolgens de zes zijden van den vierhoek A′B′C′D′, dan ontstaat een configuratie van 12 kegelsneden, 8 rechten (de raaklijnen aan μ', ν' in hun snijpunten) en 4 punten (A′, B′, C′, D′). Elke kegelsnede gaat door twee der punten en raakt aan zes kegelsneden; elk punt ligt op twee rechten en op zes kegelsneden.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

We kunnen ons beperken tot het geval, dat de beide aanrakingen buiten de snijpunten P_1 en P_2 der cirkels worden uitgevoerd, daar anders de pool der machtlijn op de raaklijn aan een der cirkels in een der snijpunten gelegen is. Deze vier raaklijnen kunnen dus ook wel beschouwd worden als tot de gevraagde meetkundige plaats te behooren.

Nemen we de centraal der cirkels als X-as en hun machtlijn als Y-as aan, dan worden hun vergelijkingen

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2bx + c = 0.$$

Zijn r_1 en r_2 de stralen der cirkels, dan is:

$$r_1^2 = a^2 - c \ , \ r_2^2 = b^2 - c \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 1).$$

De algemeene vergelijking der kegelsnede, die door de snijpunten ($x = 0$, $y^2 + c = 0$) der cirkels gaat, luidt

$$px^2 + 2qxy + y^2 + 2sx + c = 0.$$

De pool der Y-as ten opzichte van deze kegelsnede heeft tot coördinaten:

$$\xi = -\frac{c}{s} \ , \ \eta = \frac{qc}{s} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 2).$$

Om de meetkundige plaats van het punt (ξ, η) te vinden, hebben we slechts na te gaan, welke betrekking tusschen q en s moet bestaan wil de kegelsnede de beide cirkels buiten P_1 en P_2 aanraken. De buiten P_1 en P_2 gelegen snijpunten van de kegelsnede met den cirkel $x^2 + y^2 - 2ax + c = 0$ liggen op de rechte

$$(p - 1)x + 2qy + 2(s + a) = 0.$$

Beide snijpunten vallen samen als deze rechte den cirkel aanraakt; hiervoor is de voorwaarde

$$c(p - 1)^2 + 4a(s + a)(p - 1) + 4(s + a)^2 + 4q^2(c - a^2) = 0 \ . \ . \ 3).$$

Evenzoo vindt men voor de voorwaarde, dat de kegelsnede den anderen cirkel aanraakt

$$c(p - 1)^2 + 4b(s + b)(p - 1) + 4(s + b)^2 + 4q^2(c - b^2) = 0 \ . \ . \ 4).$$

Uit de voorwaarden 2), 3) en 4) moeten nu p, q en s geëlimineerd worden.

Door aftrekking vindt men uit 3) en 4)

$$(p - 1)(a + b + s) + (2s + a + b) - (a + b)q^2 = 0 \ . \ . \ . \ 5).$$

Na eliminatie van $(p - 1)$ uit 3) en 5) vindt men, als nog q en s door $-\eta : \xi$ en $-c : \xi$ worden vervangen,

$$(a+b)^2(\xi^2+\eta^2)^2-4(ab+c)(\xi^2+\eta^2)\{(a+b)\xi-c\}+4c\{(a+b)\xi-c\}^2=0,$$

of

$$\frac{(a+b)^2(\xi^2+\eta^2)}{(a+b)\xi-c}=2ab+2c\pm2\sqrt{(a^2-c)(b^2-c)}=2ab+2c\pm2r_1r_2\,.\quad 6).$$

De meetkundige plaats bestaat dus uit twee cirkels, die elk hun middelpunt op de X-as hebben.

Schrijft men hun vergelijking in den vorm

$$(\xi-Q)^2+\eta^2=R^2,$$

dan is

$$Q=\frac{ab+c\pm r_1r_2}{a+b},$$

$$R^2=\frac{(ab+c\pm r_1r_2)(ab-c\pm r_1r_2)}{(a+b)^2}.$$

Uit de vergelijkingen 1) vindt men

$$ab+c\pm r_1r_2=\tfrac{1}{2}\{(a+b)^2-(r_1\mp r_2)^2\}=\frac{(r_1\mp r_2)^2}{2(a-b)^2}\{(r_1\pm r_2)^2-(a-b)^2\},$$

$$ab-c\pm r_1r_2=\tfrac{1}{2}\{(r_1\pm r_2)^2-(a-b)^2\}.$$

Hieruit volgt

$$R=\tfrac{1}{2}\left|r_1\pm r_2-\frac{l^2}{r_1\pm r_2}\right|,$$

waar $l=a-b$ den afstand van de middelpunten M_1, M_2 der gegeven cirkels voorstelt.

Nu is verder

$$a-Q=\frac{a^2-c\mp r_1r_2}{a+b}=\frac{r_1(r_1\mp r_2)}{a+b},$$

$$b-Q=\frac{b^2-c\mp r_1r_2}{a+b}=\mp\frac{r_2(r_1\mp r_2)}{a+b},$$

dus

$$\frac{a-Q}{b-Q}=\mp\frac{r_1}{r_2}.$$

Hieruit ziet men, dat de middelpunten N_1 en N_2 der cirkels, die de meetkundige plaats vormen, door de deellijnen van den hoek $M_1P_1M_2$ en zijn nevenhoek op de centraal worden ingesneden.

Voor de stralen R_1 en R_2 der cirkels (N_1) en (N_2) kan men, als de snijpunten P_1 en P_2 der gegeven cirkels bestaanbaar zijn, een eenvoudige constructie vinden door die stralen met de deellijnen der hoeken P_1 te vergelijken. Zijn t_1 en t_2 de lengten dier deellijnen, dan is

$$t_1^2 = r_1 r_2 - \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} l^2,$$

$$t_2^2 = - r_1 r_2 + \frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2)^2} l^2.$$

men heeft dus

$$R_1 = \tfrac{1}{2}\left(r_1 + r_2 - \frac{l^2}{r_1 + r_2}\right) = \frac{r_1 + r_2}{2 r_1 r_2} t_1^2,$$

$$R_2 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{l^2}{r_1 - r_2} - (r_1 - r_2)\right\} = \frac{r_1 - r_2}{2 r_1 r_2} t_2^2,$$

waarin $r_1 \geqq r_2$ ondersteld is.

Zijn nu D_1 en D_2 de voetpunten der loodlijnen uit M_2 op de deellijnen P_1N_1 en P_2N_2 neergelaten, dan vindt men gemakkelijk

$$P_1D_1 = \frac{r_1 + r_2}{2 r_1} t_1 \text{ en } P_1D_2 = \frac{r_1 - r_2}{2 r_1} t_2.$$

Dus heeft men

$$R_1 = \frac{t_1 \cdot \overline{P_1D_1}}{r_2}, \quad R_2 = \frac{t_2 \cdot \overline{P_1D_2}}{r_2}.$$

Past men op P_1M_2 stukken M_2E_1 en M_2E_2 af gelijk aan P_1D_1 en P_1D_2, trekt door E_1 een rechte evenwijdig aan M_1M_2, die P_1N_1 in F_1 snijdt, en door E_2 een rechte evenwijdig aan M_1M_2, die P_1N_2 in F_2 snijdt, dan wordt

$$N_1F_1 = R_1, \quad N_2F_2 = R_2.$$

De meetkundige plaats bestaat dan uit de cirkels met N_1 en N_2 als middelpunt, die door F_1 en F_2 worden gelegd.

Is in het bijzonder $a = b$ dus $r_1 = r_2 = r$, dan ontaardt de cirkel (N_2) in de dubbeltellende lijn in het oneindige, terwijl de cirkel (N_1) zijn middelpunt in het snijpunt van centraal en machtlijn heeft en een straal $\left| r - \frac{l^2}{4r} \right|$, d. i. (als P_1 bestaanbaar is) de projectie der deellijn op een der opstaande zijden.

Dat nu de lijn in het oneindige tot de meetkundige plaats behoort, was te voorzien, daar een van de beide kegelsneden door P_1 en P_2, die den eenen gegeven cirkel in een gegeven punt, den anderen cirkel in een niet-gegeven punt aanraken, haar middelpunt in den oorsprong heeft en dus een oneindig ver gelegen pool der machtlijn oplevert.

Vraagstuk CXXXIX.

K 6 b. Als α, β, γ, δ de afstanden van een punt tot de hoekpunten van een viervlak voorstellen, welke oppervlakken hebben dan tot vergelijking

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + e = 0.$$

(J. A. BARRAU.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. H. BREMEKAMP, J. VAN DE GRIEND Jr., G. HULSTEEDE, E. D. J. DE JONGH Jr., A. W. KLOOS, Dr. F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* J. VAN DE GRIEND JR.

Dit vraagstuk — een bekend probleem van de leer van het zwaartepunt in de Mechanica (zie bijv. POINSOT, Eléments de Statique 12e Ed. p. 169) — kan op de volgende wijze meetkundig behandeld worden.

Is P een punt der meetkundige plaats, ABCD het viervlak, E een willekeurig punt op AB, F een willekeurig punt op EC, Z een willekeurig punt van FD, dan is, volgens de stelling van STEWART, in $\triangle$ APB

$$\overline{AE}\,.\,\beta^2 + \overline{EB}\,.\,\alpha^2 = \overline{AB}\,.\,\overline{PE}^2 + \overline{AE}\,.\,\overline{EB}\,.\,\overline{AB},$$

of, als $BE : EA = p : q$ is,

$$q\beta^2 + p\alpha^2 = (p+q)\,\overline{PE}^2 + (p+q)\,\overline{AE}\,.\,\overline{EB} \quad \ldots \; 1).$$

In $\triangle$ EPC is, als men r zoo bepaalt, dat $EF : FC = r : (p+q)$,

$$(p+q)\,\overline{PE}^2 + r\gamma^2 = (p+q+r)\,\overline{PF}^2 + (p+q+r)\,\overline{EF}\,.\,\overline{FC}$$

of, door substitutie van de waarde van $\overline{PE}^2$ volgens 1):

$$\left.\begin{aligned} &p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2 = \\ &= (p+q+r)\,\overline{PF}^2 + (p+q+r)\,\overline{EF}\,.\,\overline{FC} + (p+q)\,\overline{AE}\,.\,\overline{EB} \end{aligned}\right\} 2).$$

Eindelijk is in $\triangle$ DPF, als s zoo bepaald wordt, dat $FZ : ZD = s : (p + q + r)$, en men de waarde van $\overline{PF}^2$ uit 2) substitueert

$$\left.\begin{array}{c} p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2 + s\delta^2 = (p+q+r+s)\overline{PZ}^2 + \\ + (p+q+r+s)\overline{DZ}\,.\,\overline{ZF} + (p+q+r)\overline{EF}\,.\,\overline{FC} + (p+q)\overline{AE}\,.\,\overline{EB} \end{array}\right\} 3).$$

Neemt men $p : q : r : s = a : b : c : d$, dan worden E, F en Z vaste punten, en wel, blijkens de constructie, Z het zwaartepunt van massa's in A, B, C en D, die zich verhouden als $a : b : c : d$. Noemt men de afstanden van Z tot A, B, C, D α_0, β_0, γ_0, δ_0, en stelt de vergelijking 3) op voor het geval P in Z ligt:

$$\left.\begin{array}{c} p\alpha_0^2 + q\beta_0^2 + r\gamma_0^2 + s\delta_0^2 = \\ = (p+q+r+s)\overline{DZ}\,.\,\overline{ZF} + (p+q+r)\overline{EF}\,.\,\overline{FC} + (p+q)\overline{AE}\,.\,\overline{EB} \end{array}\right\} 3a)$$

dan vindt men door aftrekking van 3) en 3a) en vervanging van p, q, r en s door a, b, c, d,

$$\left.\begin{array}{c} a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = \\ = (a+b+c+d)\,\overline{PZ}^2 + (a\alpha_0^2 + b\beta_0^2 + c\gamma_0^2 + d\delta_0^2) \end{array}\right\} 4).$$

Volgens de voorwaarde van het vraagstuk is

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = -e;$$

daardoor wordt 4):

$$(a+b+c+d)\,\overline{PZ}^2 = -e - (a\alpha_0^2 + b\beta_0^2 + c\gamma_0^2 + d\delta_0^2).$$

Hierin is het tweede lid constant; de meetkundige plaats van P is dus een bol met het genoemde zwaartepunt Z tot middelpunt en $\sqrt{\dfrac{-e-(a\alpha_0^2 + b\beta_0^2 + c\gamma_0^2 + d\delta_0^2)}{a+b+c+d}}$ tot straal. Als $e > -(a\alpha_0^2 + b\beta_0^2 + c\gamma_0^2 + d\delta_0^2)$, worden de bollen imaginair; voor $e = -(a\alpha_0^2 + b\beta_0^2 + c\gamma_0^2 + d\delta_0^2)$ valt de bol samen met zijn middelpunt Z; voor $a + b + c + d = 0$ gaat hij over in een plat vlak.

Opmerking van J. A. Barrau. Is $e = 0$, dan snijdt de bol den om ABCD beschreven bol loodrecht. Immers de bol M, bepaald door $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = 0$, gaat door de doorsnede der bollen $a\alpha^2 + b\beta^2 = 0$, $c\gamma^2 + d\delta^2 = 0$, welke

achtereenvolgens de segmenten AB en CD harmonisch verdeelen, dus den bol ABCD loodrecht snijden. Dus behoort M tot een bundel, waarvan twee exemplaren den bol ABCD loodrecht snijden; bijgevolg is M ook orthogonaal op den bol ABCD.

Vraagstuk CXL.

H 9 d. Men vraagt de integraal van

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

(Dr. Z. P. BOUMAN.)

Opgelost *door* Dr. Z. P. BOUMAN, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF, W. MANTEL *en* Dr. J. G. RUTGERS.

Oplossing *van* Dr. J. G. RUTGERS.

De gegeven differentiaalvergelijking kan als volgt geschreven worden

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Door integratie naar y vindt men hieruit

$$2\sqrt{\frac{\partial z}{\partial x}} = z + X_1 \text{ of } \frac{\partial z}{\partial x} = \tfrac{1}{4}(z + X_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Daar X_1 eene willekeurige functie van x voorstelt, is het mogelijk eene particuliere integraal z_1 van deze vergelijking van RICATTI te vinden door te stellen $X_1 = X_2 z_1$.

Vergelijking 1) gaat daardoor over in

$$\frac{dz_1}{dx} = \tfrac{1}{4} z_1^2 (X_2 + 1)^2, \text{ of in } \frac{dz_1}{z_1^2} = \tfrac{1}{4}(X_2 + 1)^2 dx,$$

welke na integratie geeft

$$z_1 = -\frac{4}{\int (X_2 + 1)^2 dx}, \text{ zoodat } X_1 = -\frac{4X_2}{\int (X_2 + 1)^2 dx} \text{ is.}$$

Stelt men nu in 1) $z = z_1 + \frac{1}{v}$, dan krijgt men, na eenige herleiding $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}(z_1 + X_1) v + \frac{1}{4} = 0.$

Hieruit vindt men gemakkelijk

$$v = e^{-\frac{1}{2}\int(z_1 + X_1)\,dx}\left(Y_1 - \tfrac{1}{4}\int e^{\frac{1}{2}\int(z_1 + X_1)\,dx}dx\right).$$

Dus is

$$z = -\frac{4}{\int(X_2 + 1)^2 dx} + \frac{e^{\frac{1}{2}\int(z_1 + X_1)\,dx}}{Y_1 - \frac{1}{4}\int e^{\frac{1}{2}\int(z_1 + X_1)\,dx}dx},$$

waarin

$$z_1 + X_1 = -\frac{4(X_2 + 1)}{\int(X_2 + 1)^2\,dx}.$$

Een meer eenvoudigen vorm verkrijgt de uitkomst door invoering van eene andere willekeurige functie van x in de plaats van X_2.

Men stelle daartoe allereerst

$$\int(X_2 + 1)^2\,dx = X_3, \text{ waaruit volgt } X_2 + 1 = \sqrt{\frac{dX_3}{dx}}.$$

Dan wordt

$$z_1 = -\frac{4}{X_3} \text{ en } z_1 + X_1 = -\frac{4\sqrt{\frac{dX_3}{dx}}}{X_3}.$$

Neemt men nu

$$e^{\frac{1}{2}\int(z_1 + X_1)\,dx} = e^{-2\int\frac{\sqrt{\frac{dX_3}{dx}}}{X_3}} = X,$$

dan volgt

$$\frac{\frac{dX_3}{dx}}{X_3^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dx}\lg X\right)^2,$$

of na integratie

$$-\frac{1}{X_3} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{d}{dx}\lg X\right)^2 dx.$$

Zoo ook nog $Y_1 = \frac{1}{4}\,Y$ gesteld wordt, vindt men ten slotte

$$z = \int\left(\frac{d}{dx}\lg X\right)^2 dx + \frac{4X}{Y - \int X dx}.$$

Hierin zijn X en Y willekeurige functies van x en van y.

Oplossing *van* W. MANTEL.

De vergelijking kan vervangen worden door het stelsel

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 = pq^2 \ , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Differentiëert men de eerste naar x, dan vindt men

$$2\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = q^2\frac{\partial p}{\partial x} + 2pq\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Eliminatie van q en $\frac{\partial q}{\partial x}$ levert

$$p^{-1/2}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \tfrac{1}{2}p^{-3/2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Door integratie naar y vindt men hieruit

$$p^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial p}{\partial x} - p = f(x).$$

Neemt men voor $f(x)$ zoodanigen vorm, dat $p = \phi(x)$ voldoet, dan wordt

$$p^{-1/2}\frac{\partial p}{\partial x} - p = \phi^{-\frac{1}{2}}\phi' - \phi.$$

Stelt men nu

$$p^{1/2} = \varphi^{1/2} - u^{-1},$$

dan is u te bepalen uit de vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\phi^{1/2} - 1/2 = 0.$$

Deze is lineair en levert

$$u = \tfrac{1}{2}e^{-\int \phi^{1/2}dx}\left\{\int e^{\int \phi^{\frac{1}{2}}dx}dx + \mathrm{F}(y)\right\}.$$

Ter vereenvoudiging stelle men

$$\int e^{\int \phi^{\frac{1}{2}}dx}dx = \psi(x),$$

dan wordt

$$p = \left(\frac{\psi''}{\psi'} - \frac{2\psi'}{\psi + \mathrm{F}}\right)^2.$$

Uit $q = p^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial p}{\partial y}$ volgt dan

$$q = \frac{4\psi' F'}{(\psi + F)^2}.$$

Nu is

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

dus

$$z = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} - \frac{2\psi'(x)}{\psi(x) + F(y_0)}\right)^2 dx + \int_{y_0}^{y} \frac{4\psi'(x)\,F'(y)\,dy}{(\psi(x) + F(y))^2}.$$

Men neme y_0 gelijk aan een wortel van de vergelijking $F(y) = 0$. Dan wordt

$$z = \frac{4\psi'}{\psi} - \frac{4\psi'}{\psi + F} + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\psi''}{\psi'} - \frac{2\psi''}{\psi}\right)^2 dx,$$

wat gemakkelijk herleid wordt tot

$$z = -\frac{4\psi'}{\psi + F} + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2 dx.$$

Oplossing *van* Dr. Z. P. Bouman.

Schrijft men de gegeven vergelijking in den vorm

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lg \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

dan blijkt de doelmatigheid der substitutie

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2.$$

Immers dan volgt uit $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lg \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ door integratie $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\psi}$.

Dan is

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = e^{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

Dus kan ψ gevonden worden door integratie van een vergelijking van LIOUVILLE:

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = e^{\psi}, \text{ enz.}$$

Vraagstuk CXLI.

O 2 f. De omhullende te bepalen van het stelsel der kettinglijnen

$$x = m \operatorname{ch} \frac{z}{m},$$

waar m een veranderlijke parameter is. (Dr. Z. P. BOUMAN.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. Z. P. BOUMAN, Dr. H. BREMEKAMP, G. HULSTEEDE, Dr. F. SCHUH *en* Dr. A. VAN THIJN.

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

De krommen voorgesteld door

$$\frac{x}{m} = \operatorname{ch} \frac{z}{m}$$

liggen gelijkvormig ten opzichte van O als centrum; hun omhullende bestaat dus uit de raaklijnen door O aan de kromme $x = \operatorname{ch} z$.

De raakpunten worden bepaald door $\frac{x}{z} = \frac{dx}{dz} = \operatorname{sh} z$.

Daar men heeft $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, liggen ze op de kromme van den vierden graad voorgesteld door $x^2z^2 = x^2 + z^2$, welke in de vier quadranten buiten de rechten $x^2 = 1$ en $z^2 = 1$ ligt, en deze tot asymptoten heeft; O is een geisoleerd punt.

De poolvergelijking dezer kromme is $\rho \sin 2\theta = 2$; zij is dus de inversie, voor centrum O, van de „rosace à quatre branches" voorgesteld door $\rho = \frac{1}{2} \sin 2\theta$.

Oplossing *van* G. HULSTEEDE.

Door differentiatie naar m vindt men uit $\frac{x}{m} = \operatorname{ch} \frac{z}{m}$ de vergelijking $\frac{x}{z} = \operatorname{sh} \frac{z}{m}$. Door eliminatie van $\frac{z}{m}$ wordt hieruit

verkregen $\frac{x^2}{m^2} - \frac{x^2}{z^2} = 1$, dus $m = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + z^2}}$. Nu vindt men, door eliminatie van m, voor de omhullende

$$\text{th}\sqrt{1 + \frac{z^2}{x^2}} = \pm \left(1 + \frac{z^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ze is dus een stelsel rechten door O. Om de bestaanbare te vinden, stellen wij $z = x \operatorname{tg} \phi$ en $\sec \phi = \psi$, dan wordt $\text{th}\, \psi = \pm \psi^{-1}$. Daar ψ en $\text{th}\, \psi$ hetzelfde teeken hebben, vervalt het onderste teeken. Wij vervangen de vergelijking door $2\psi = \lg \frac{\psi + 1}{\psi - 1}$. Daar de logarithmus reëel moet wezen, is $\psi > 1$. Door beproeven vindt men $\psi = 1.0185 \ldots$, dus $\phi = \pm 79^\circ 3' \ldots$

Opmerking van Dr. Bouman. Door de kettinglijn te beschouwen als meridiaankromme van een rotatieminimaaloppervlak begrensd door twee evenwijdige gelijke cirkels, kan de richtingscoëfficient der raaklijn proefondervindelijk bepaald worden (verg. C. R. XCII).

Vraagstuk CXLII.

O 5 l. Op een willekeurig oppervlak beschouwt men een stelsel geodetische lijnen. Door elk punt van het oppervlak trekt men, in het osculatievlak der geodetische lijn, een rechte, die een constanten hoek maakt met de normaal van het oppervlak. Men vraagt aan te toonen, dat deze rechten een normalencongruentie vormen.

(Dr. Z. P. Bouman.)

Oplossing *van* Dr. Z. P. Bouman.

Nemen wij als parameterlijnen u en v het stelsel geodetische lijnen (v constant) en hunne loodrechte trajectoriën (u constant), dan wordt het vierkant van het lijnelement van het oppervlak op bekende wijze voorgesteld door

$$ds^2 = du^2 + G dv^2.$$

Noemen we de richtingscosinussen van de lijn, die van het punt (u, v) uitgaat, X, Y, Z, en maakt de rechte een hoek α

met de normaal aan het oppervlak, dus een hoek $(90° - \alpha)$ met de lijn (v) in dat punt, terwijl ze natuurlijk een hoek van 90° met de lijn (u) maakt, dan is

$$\sin \alpha = X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I)},$$

en

$$\frac{X}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{Y}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{Z}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Voor de laatste vergelijking kan geschreven worden

$$X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II)}.$$

Differentieeren we I) naar v en II) naar u, dan vinden we

$$\frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = - X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - Y \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - Z \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = - X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - Y \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - Z \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Hieruit volgt, dat de beide eerste leden gelijk zijn, zoodat de voorwaarde voor een normalen-congruentie vervuld is. Want uit de gevonden gelijkheid volgt, dat de brandpunten der congruentie met de grenspunten samenvallen. (Verg. b.v. Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raumes II, 1880, pag. 229). Maar als grenspunten en brandpunten samenvallen, staan de brandvlakken loodrecht op elkaar, en, zooals bekend is, vormen de brandoppervlakken de beide mantels van het centra-oppervlak van één oppervlak, waarvan de stralen der beschouwde congruentie de normalen zijn.

Vraagstuk CXLIII.

0 5 m. Op een oppervlak met constante gemiddelde kromming H voert men isometrische coördinaten langs de kromtelijnen in. Bewijs, dat de coëfficienten e en g der afbeelding op den eenheidsbol het constante verschil $\pm$ H hebben. (Dr. Z. P. Bouman.)

Oplossing *van* Dr. Z. P. Bouman.

Het vierkant van het lijnelement ten opzichte van de kromtelijnen als u- en v-lijnen wordt voorgesteld door

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Door toepassing der grondvergelijkingen van Codazzi vindt men

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right) = 0.$$

Bij de oppervlakken met constante gemiddelde kromming kan, zooals bij alle oppervlakken van Weingarten, één der hoofdkromtestralen beschouwd worden als functie van den anderen. Schrijven we de eerste der bovenstaande vergelijkingen aldus

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right),$$

en beschouwen we $\frac{1}{r_1}$ als functie van $\frac{1}{r_2}$, dus $\frac{1}{r_1} = H - \frac{1}{r_2}$, dan is

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{H - \frac{2}{r_2}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(-\tfrac{1}{2} \log\left(H - \frac{2}{r_2}\right)\right)$$

of

$$f_1(u) \sqrt{E} = \frac{1}{\sqrt{H - \frac{2}{r_2}}}.$$

Evenzoo vindt men

$$f_2(v) \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{H - \frac{2}{r_2}}}.$$

Door substitutie verkrijgt men

$$ds^2 = \frac{1}{H - \frac{2}{r_2}} \left(\frac{du^2}{f_1^2(u)} + \frac{dv^2}{f_2^2(v)}\right).$$

Voeren we langs de kromtelijnen de nieuwe parameters u_1 en v_1 in die bepaald zijn door

$$du_1 = \frac{1}{f_1(u)}\,du \quad \text{en} \quad dv_1 = \frac{1}{f_2(v)}\,dv,$$

dan wordt

$$ds^2 = \frac{1}{H - \dfrac{2}{r_2}}\,(du_1^2 + dv_1^2).$$

De coëfficienten van het vierkant van het lijnelement op den eenheidsbol worden gevonden door $\dfrac{1}{H - \dfrac{2}{r_2}}$ te deelen door r_2^2 en r_1^2. We vinden dus voor het verschil

$$\pm\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) : \left(H - \frac{2}{r_2}\right) = \pm\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) : \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \pm H.$$

Vraagstuk CXLIV.

O 2 f. Een veranderlijke logarithmische spiraal, waarvan de pool een cirkel doorloopt, heeft in elk van haar standen een vierpuntige aanraking met haar omhullende. Men vraagt die omhullende te bepalen. (J. VAN DE GRIEND JR.)

Oplossing *van* J. VAN DE GRIEND JR.

Zij PQ (fig. 15) de ordinaat van de gerectifieerde der gevraagde omhullende (f), VP haar raaklijn, zoodat V de pool is der vierpuntige logarithmische spiraal (5) *). De kromtestraal der poolbaan dezer spiraal valt dan langs VN, als N het midden is van PQ (7a).

Volgens de gegevens van het vraagstuk is hij constant en wel gelijk aan VM; het krommingsmiddelpunt valt dus in M.

*) De aangehaalde nummers hebben betrekking op mijn artikel „Rectifieerende krommen", verschenen in de Verslagen der K. A. v. W. XII, 414, 8 October 1903.

Bij omkeering der constructie van (7*b*) vindt men uit dit bekende krommingsmiddelpunt het raakpunt R der rechte QV door het snijpunt te bepalen van MP met QV.

Trekt men PP′ evenwijdig aan de X-as, dan is PP′ de ordinaat van de rectifieerende der evolute van (*f*), en P′A ⊥ PR de raaklijn dezer rectifieerende, alzoo V′ de pool van haar vierpuntige logarithmische spiraal. Nu liggen de punten P′, V′, P, V op een cirkel, waarvan VM een raaklijn is; dus is $\overline{MP} . \overline{MV'} = \overline{MV}^2$. Maar M is een standvastig punt en MV een standvastige lengte; alzoo beweegt zich de vierpuntige logarithmische spiraal der evolute zoodanig, dat haar poolbaan de inversie is van de door de spiraal beschreven omhullende ten opzichte van het vaste punt M. Volgens de theorie der rectifieerenden is deze omhullende, dus de evolute der gezochte kromme (*f*), een der krommen, waarvan de rectifieerenden van den tweeden graad zijn; deze zijn epi- of hypocycloïden, of spiralen (*a*), of cirkelevolventen met M als middelpunt. De kromme (*f*) zelf is dus een evolvente van een dezer krommen.

Als de kromtestraal PQ nul wordt, valt PP′ langs de X-as, V en P vallen samen in Q. Daar steeds $\overline{MP} . \overline{MV'} = \overline{MV}^2$ moet blijven, moeten dan ook P en V′ samenvallen, dus Q moet een der toppen der kegelsnede zijn. Is (*f*) evolvente eener cycloïde, dan gaat zij dus uit van het keerpunt dezer cycloïde. Om de mogelijke gevallen te onderscheiden en den invariant der beweging te vinden, bepalen we de constante grootte van de halve groote as *a* der kegelsnede, die de rectifieerende is van de evolute (*f*′). Noemen we den voerstraal VQ der spiraal ρ, zijn hoek met de raaklijn α, dan is van deze kegelsnede $x' = \rho : \sin\alpha$ de abscis (als de oorsprong in een der toppen Q ligt) en $y' = PP' = \rho \cos\alpha : \sin^2\alpha$ de ordinaat.

Substitueeren wij deze waarden in de topvergelijking

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{2x'}{a} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$$

der kegelsnede, en gebruiken daarbij de betrekking $b^2 = Ra^2 : (a + R)$, die uit $R = ab^2 : c^2$ (11) volgt, dan vindt men

$$a = \frac{R\rho}{2R \sin^3\alpha - \rho \cos^2\alpha}$$

Derhalve is de gezochte invariant

$$\frac{2R}{\rho} \sin^3 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

Om de gevallen te onderscheiden, laten wij, bij constante ρ en α, R verschillende waarden doorloopen. Daarbij verplaatsen zich M en V′ op den, om P draaienden, straal MV′.

a) Is $R = \infty$ (dus de gegeven poolbaan een rechte lijn) dan valt M in het oneindige; de gerectifieerde van den tweeden graad wordt cycloïde; de hier beschouwde omhullende dus evolvente der cycloïde, uitgaande van het keerpunt; de bovengenoemde invariant is ∞. Invariant der beweging wordt $\rho : \sin^3 \alpha = 2a = 8r$ (r straal van den rollenden cirkel).

De beschrijvende logarithmische spiraal verandert periodisch van een punt ($\alpha = 0$) tot een cirkel ($\alpha = 90°$) en weer terug tot een punt ($\alpha = 180°$). De punten waarin de spiraal ontaardt, liggen op gelijke afstanden op een rechte (basis der cycloïde).

b) Ligt het punt M in M_1 buiten M_2 (snijpunt van $P'M_2 \perp$ X-as met MV) en is $R > \frac{1}{2} \rho \cos^2 \alpha : \sin^3 \alpha$, dan wordt de gerectifieerde van den tweeden graad epicycloïde, de omhullende dus evolvente der epicycloïde, uitgaande van het keerpunt. De invariant is positief. De spiraal wordt ook periodisch punt en cirkel; de punten liggen op den basiscirkel der epicycloïde.

c) Ligt M in M_2 ($R = VM_2 = \frac{1}{2} \rho \cos^2 \alpha : \sin^3 \alpha$) dan is de gerectifieerde van den tweeden graad cirkelevolvente; de omhullende dus evolvente dezer cirkelevolvente, uitgaande van het keerpunt. De invariant wordt nul ($a = \infty$). De hoek α groeit steeds aan, maar bereikt nooit 90°: de spiraal wordt nooit cirkel. Gaat de beweging naar de andere zijde voort, dan neemt de spiraal af tot een punt en daarna keert de vorige reeks spiralen in omgekeerde volgorde terug.

d) Ligt M tusschen M_2 en V ($R < \frac{1}{2} \rho \cos^2 \alpha : \sin^3 \alpha$) dan is de gerectifieerde van den tweeden graad spiraal (a) met keerpunt, de omhullende dus de evolvente dezer spiraal, uitgaande van het keerpunt. De invariant wordt negatief.

e) Ligt M in V ($R = 0$), dan is de gerectifieerde van den tweeden graad logarithmische spiraal, rectifieerende QP′; de omhullende de evolvente dezer spiraal, uitgaande van de pool. De invariant wordt $-\cos^2 \alpha$, zoodat α onveranderlijk is; de

pool der bewegende spiraal is onbewegelijk en ligt in V; de spiraal zelf valt samen met haar omhullende.

f) Tusschen V′ en P kan M door den aard van ontstaan niet komen; evolvente eener spiraal (*b*) (zonder keerpunt) kan de omhullende dus niet worden. Gaat M door V′ verder, tusschen V en N, en is R negatief maar $> -\frac{1}{2}\rho : \sin\alpha$, dan komt N ten opzichte van V′ en P weer op dezelfde wijze te liggen als in *d*), dus buiten V′P aan de zijde van V′. De omhullende is weer een evolvente van een tak eener spiraal (*a*). Maar P′ is een punt der hyperbool op den tak, waarop de top Q niet ligt; dus gaat de evolvente niet uit van het keerpunt, maar heeft daar een kromtestraal gelijk aan de reëele as $2a$ der hyperbool.

g) Valt M in N ($R = -\frac{1}{2}\rho : \sin\alpha$) dan valt ook V′ in P, de raaklijn P′V′ van de rectifieerende der evolute dus in P′P; de gerectifieerde (spiraal (*a*)) gaat over in een rechte lijn (gedeelte buiten het begrensde stuk PQ, P en Q keerpunten). De evolvente (uitgaande van Q) is dus het punt Q. De invariant is -1. Bij de beweging van de pool V der spiraal langs cirkel (N) blijft de spiraal steeds door dat punt gaan en houdt er denzelfden kromtestraal PQ; deze beweging komt dus overeen met de ligging van het beschrijvende punt der evolute in P. Komt de pool in Q, dan wordt de logarithmische spiraal een punt Q, met onbepaalden kromtestraal; deze ligging van de pool V in Q komt overeen met het doorloopen van het beschrijvende punt P van de rechte buiten PQ van P naar het oneindige en overspringend buiten Q, dan naar Q en daar terugkeerend denzelfden weg terug tot in P (want in elk der gedeelten van de rechte buiten PQ zijn twee takken der spiraal (*a*) samengevallen). Gaat V verder langs den cirkel tot P, dan blijft het beschrijvende punt der spiraal in P en de kromtestraal der spiraal is gelijk aan PQ. Als grensgeval van *h*) heeft de spiraal dezelfde beweging, alleen wordt de rechte PQ langs N doorloopen.

h) Ligt M buiten N ($R < -\frac{1}{2}\rho : \sin\alpha$, invariant < -1) dan valt V′ tusschen P en R (in de figuur in teekening gebracht); de gerectifieerde van den tweeeen graad wordt hypocycloïde; de omhullende dus evolvente der hypocycloïde, uitgaande van een keerpunt. De logarithmische spiraal wordt weer periodisch punt en cirkel.

Vraagstuk CXLV.

02f. Een veranderlijke cirkel verplaatst zich zoo, dat hij in in elken stand een driepuntige aanraking heeft met zijn omhullende terwijl zijn middelpunt M een gegeven kromme (M) doorloopt. Men bepale het krommingsmiddelpunt van de omhullende der machtlijn van den veranderlijken en een vasten cirkel.

(J. VAN DE GRIEND JR.)

Opgelost *door* J. VAN DE GRIEND JR. *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Het middelpunt O van den vasten cirkel nemen wij tot oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel.

Zij P het punt, waar de bewegelijke cirkel zijn omhullende aanraakt; M is dan het krommingsmiddelpunt van (P). Zij N het krommingsmiddelpunt van (M), R en S de projecties van O op PM en MN; Q het raakpunt der bedoelde machtlijn met hare omhullende; a de straal van den vasten cirkel.

Wij geven de kromme lijn (P) als omhullende der rechte lijn

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = f(\alpha).$$

Door zulk eene vergelijking naar α te differentieeren gaat men altijd tot de omhullende over. Daardoor overtuigt men zich licht, dat men heeft

$$RP = f(\alpha);\ OR = f'(\alpha);\ MR = OS = f''(\alpha);\ SN = f'''(\alpha)$$

Door x en y op te lossen uit

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = f(\alpha)$$

en

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = f'(\alpha),$$

vindt men voor de coördinaten van P

$$x = f(\alpha) \cos \alpha - f'(\alpha) \sin \alpha;\ y = f(\alpha) \sin \alpha + f'(\alpha) \cos \alpha.$$

De coördinaten van M vindt men uit

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = f'(\alpha),$$

$$-x \cos \alpha - y \sin \alpha = f''(\alpha);$$

$$x = -f'(\alpha) \sin \alpha - f''(\alpha) \cos \alpha;\ y = f'(\alpha) \cos \alpha - f''(\alpha) \sin \alpha.$$

De afstand van M tot P wordt naar behooren gelijk aan $f(\alpha)+f''(\alpha)$. Uit de vergelijkingen der cirkels vindt men voor de machtlijn

$$2(x\sin\alpha - y\cos\alpha + f')f' + 2(x\cos\alpha + y\sin\alpha - f)f'' = f^2 + f'^2 - a^2.$$

Om hare omhullende te vinden, differentieere men naar α; men vindt

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = f(\alpha),$$

zoodat het raakpunt Q op de raaklijn in P ligt. Men losse nu de coördinaten van Q op, dan komt er

$$x = f\cos\alpha - f'\sin\alpha + F\sin\alpha,$$

$$y = f\sin\alpha + f'\cos\alpha - F\cos\alpha,$$

waar ter bekorting is gesteld

$$F = \frac{f^2 + f'^2 - a^2}{2f'}.$$

De kromtestraal kan nu volgens de formule

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$$

worden berekend, wat vrij langdradig is. De uitkomst luidt

$$\rho = \frac{(f^2 + f'^2 - a^2)(f'^2 + f''^2)^{3/2}}{2f'^3(f' + f'')},$$

Dit komt neer op

$$\rho = \frac{OP^2 - a^2}{2MN}\cdot\left(\frac{OM}{OR}\right)^3,$$

welke vorm gemakkelijk te construeeren is.

Oplossing *van* J. van de Griend Jr.

Het raakpunt P van den cirkel ligt op de raaklijn aan (M); het raakpunt Q van de machtlijn op de raaklijn aan cirkel (M) in P; Q is het machtpunt van den vasten cirkel O en de twee standen van cirkel (M). Neemt men de wentelingssnelheid der raaklijn aan (M) als eenheidssnelheid aan, dan ligt het snelheidscentrum van M in het krommingsmiddelpunt m van (M), dat van P in M. Het snelheidscentrum van Q als punt van PQ valt dus ergens op MP; dus het snelheidscentrum van het

snijpunt Q van PQ en de machtlijn in het snijpunt q van MP met de loodlijn Qq op de machtlijn *).

De rechte Qq beweegt zich evenwijdig met OM; de snelheidsas van OM is Om', als m' de projectie van m op OM is; alzoo kan de beweging van Qq voorgesteld worden door een snelheidsas met dezelfde cursaalverhouding, die insgelijks met Qq zelf samenvalt. Het raakpunt X van Qq (krommingsmiddelpunt der gezochte omhullende) overeenkomende met het punt O der rechte OM, wordt dus op Oq gevonden met behulp van de evenredigheid $Qq : qX = Mm' : m'O$.

Een tweede oplossing vindt men door de raaklijn aan (M) naar den anderen kant te trekken.

a) Het punt q valt in P. Dus de omhullende der machtlijn van den osculatiecirkel van een cirkelevolvente en een willekeurigen cirkel, concentrisch met den basiscirkel, is een evolvente dezer cirkelevolvente. Wordt cirkel (O) de basiscirkel zelf, dan gaat deze evolvente uit van het keerpunt der cirkelevolvente.

b) Daar m' valt in M, valt X in q. En daar hoek QqM constant is, wordt (M) een scheeve evolute van (q); (q) is dus een spiraal (*a*) of (*b*) en (Q) een evolvente dezer spiraal. Dus de omhullende der machtlijn van den osculatiecirkel van een evolvente (P) eener logarithmische spiraal en een cirkel, die de pool dezer spiraal tot middelpunt heeft, is een evolvente van een spiraal (*a*) of (*b*).

Is de spiraalevolvente (P) zelf logarithmische spiraal, dan wordt de omhullende (Q) een spiraal (*a*); cirkel (O) is haar basiscirkel (bevat het keerpunt). Wordt bovendien cirkel (O) het punt O, dan valt q midden tusschen M en P; (q) wordt een logarithmische spiraal, (Q) insgelijks. Is de spiraalevolvente (P) een met p verlengde of verkorte, dan zal (q) een logarithmische spiraal, dus (Q) de evolvente dezer spiraal worden als, in volstrekte waarde, $p = r_0$ (straal van cirkel O) want dan deelt qs (kromtestraal van (q)) OM rechthoekig middendoor; $r_0 < p$ (dus ook als O een punt wordt) geeft voor (Q) de evolvente eener spiraal (*a*), $r_0 > p$ die eener spiraal (*b*). Voor $r_0 < p$ heeft het keerpunt van (q) (spiraal (*a*)) een afstand

*) Zie „Snelheidsassen" 7, N. A. v. Wisk. VI, 273.

$(p^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}} \cot \alpha$ van O (α hoek tusschen spiraal en voerstraal); het beschrijvende punt Q een afstand $\frac{\sqrt{p^2 - r_0^2}}{\sin \alpha \cos \alpha} \pm \frac{p}{\cos \alpha}$ (al naarmate de spiraalevolvente (P) verlengd of verkort is) van dit keerpunt. Is de spiraalevolvente (P) verlengd, dan kan (Q) geen keerpunt hebben, omdat Q niet met q kan samenvallen (M mag O niet voorbijgaan). Is het een verkorte met $r_0 < p \cos \alpha$, dan snijdt cirkel (M) cirkel (O) in 2 bereikbare punten en (Q) heeft 2 keerpunten op cirkel (O). Voor $r_0 = p \cos \alpha$ vallen deze samen, (Q) is de evolvente uitgaande van het keerpunt van (q). Voor $r_0 < p$ heeft het punt van grootste kromming van (q) een afstand $\sqrt{r_0^2 - p^2}$ van O; het beschrijvende punt Q heeft een afstand $p \sec \alpha$ van dit punt. De kromme (Q) heeft altijd een keerpunt, gelegen op cirkel (O).

Op de rectifieerende hyperbool vindt men in alle gevallen het punt van uitgang der beschouwde evolvente als het punt der X-as dat een afstand p van de asymptoten heeft.

Vraagstuk CXLVI.

O 2 b. Een kromme is bepaald door een vergelijking $s = f(\theta)$ tusschen den boog en den hoek, welken de voerstraal met de poolas maakt. Is ψ de hoek tusschen voerstraal en raaklijn, dan heeft men

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 1 - \frac{f''(\theta)}{f'(\theta)} \operatorname{tg} \psi.$$

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* J. A. Barrau, Dr. H. Bremekamp, J. van de Griend Jr., G. Hulsteede, Mej. Dr. E. van de Kamer, Dr. W. Kapteyn, Mevr. A. G. Kerkhoven—Wijthoff, Dr. J. G. Rutgers, Dr. F. Schuh, Dr. C. Stolp *en* Dr. A. van Thijn.

Oplossing.

Stelt r den voerstraal voor, dan heeft men

$$\sin \psi = \frac{r d\theta}{ds} = \frac{r}{f'(\theta)}.$$

Hieruit vindt men

$$\cos \psi \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{d\theta}}{f'(\theta)} - \frac{r f''(\theta)}{f'^2(\theta)} = \frac{dr}{ds} - \frac{f''(\theta)}{f'(\theta)} \sin \psi.$$

Dus is

$$\cos\psi \frac{d\psi}{d\theta} = \cos\psi - \frac{f''(\theta)}{f'(\theta)} \sin\psi,$$

en hieruit volgt terstond

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 1 - \frac{f''(\theta)}{f'(\theta)} \operatorname{tg}\psi.$$

Vraagstuk CXLVII.

H 2 c. Men vraagt de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)(1 + X_1 y)$$

te herleiden tot de gedaante

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 + s^2 = X_2.$$

X_1 en X_2 zijn functies van x. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. H. BREMEKAMP, G. HULSTEEDE, Dr. W. KAPTEYN, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF *en* Dr. J. G. RUTGERS.

Oplossing *van* Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF.

Door de substitutie $y = \operatorname{tg}\psi$ gaat de vergelijking over in

$$\frac{d\psi}{dx} = 1 + X_1 \operatorname{tg}\psi.$$

Vergelijken wij dit met de uitkomst van het vorige vraagstuk, dan blijkt, dat, als wij ons een kromme denken, waarvoor x gelijk is aan den hoek tusschen voerstraal en poolas en s gelijk aan $\int e^{-\int X_1 dx} dx$ is, ψ dan den hoek tusschen voerstraal en raaklijn voorstelt.

Stellen wij den voerstraal dier kromme door z voor, dan is

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z^2 = e^{-2\int X_1 dx}.$$

De substitutie, die wij moeten uitvoeren, is derhalve

$$y = z : \frac{dz}{dx} \text{ en } X_2 \text{ blijkt te zijn } e^{-2\int X_1 dx}.$$

Vraagstuk CXLVIII.

H 5 g. Zij $x + \frac{1}{x} = z$ en $x^n + \frac{1}{x^n} = y$. Men vraagt een lineaire, homogeene differentiaalvergelijking der tweede orde, waaruit de betrekking tusschen y en z kan afgeleid worden.

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN *en* Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF.

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Stelt men $x = e^{iu}$, dan wordt

$$z = 2 \cos u \text{ en } y = 2 \cos nu.$$

Nu is

$$\frac{d^2y}{du^2} = -2n^2 \cos nu = -n^2 y,$$

en

$$\frac{d^2y}{du^2} = \left(\frac{dz}{du}\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{d^2z}{du^2}\frac{dy}{dz}.$$

Derhalve is

$$4 \sin^2 u \frac{d^2y}{dz^2} - 2 \cos u \frac{dy}{dz} + n^2 y = 0,$$

of

$$(4 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} + n^2 y = 0.$$

Neemt men voor $z = 2$ de waarden $y = 2$ en $\frac{dy}{dz} = n^2$, zoo vindt men de betrekking die verlangd wordt.

Vraagstuk CXLIX.

D 6 e. Te bewijzen, dat

$$\frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \ldots.$$

de asymptotische ontwikkeling is van de functie

$$I = e^{-x} \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt,$$

waar x positief is. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF, Dr. W. KAPTEYN *en* Dr. J. G. RUTGERS.

Oplossing *van* Dr. J. G. RUTGERS.

Zij $S_n = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \ldots + \frac{(n-1)!}{x^n}$,

dan valt slechts aan te toonen, dat men heeft

$$\lim_{x=\infty} (I - S_n) x^n = 0,$$

want bij genoegzaam groote waarde van x is dan

$$(I - S_n) x^n < \varepsilon.$$

Men vindt nu bij substitutie

$$\lim_{x=\infty} (I - S_n) x^n = \left| \frac{\int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt - e^x \sum_{m=1}^{n} \frac{(m-1)!}{x^m}}{\frac{e^x}{x^n}} \right|_{x=\infty} =$$

$$= \left| \frac{\frac{d}{dx} \left\{ \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt - e^x \sum_{m=1}^{n} \frac{(m-1)!}{x^m} \right\}}{\frac{d}{dx} \frac{e^x}{x^n}} \right|_{x=\infty} =$$

$$= \left| \frac{\frac{e^x - 1}{x} - e^x \sum_{m=1}^{n} \frac{(m-1)!}{x^m} + e^x \sum_{m=1}^{n} \frac{m!}{x^{m+1}}}{\frac{e^x}{x^n} - \frac{ne^x}{x^{n+1}}} \right|_{x=\infty} =$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{x} - e^x \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m!}{x^{m+1}} + e^x \sum_{m=1}^{n} \frac{m!}{x^{m+1}}}{\frac{e^x}{x^n} - \frac{ne^x}{x^{n+1}}} \right|_{x=\infty} = \left| \frac{\frac{n!}{x} - \frac{x^{n-1}}{e^x}}{1 - \frac{n}{x}} \right|_{x=\infty} = 0,$$

hetgeen te bewijzen was.

Vraagstuk CL.

H 2 e. Uit elke vergelijking

$$ay^2 + 2by + c = 0,$$

waar a, b, c functies van x zijn, kan een lineaire differentiaalvergelijking der eerste orde worden afgeleid. Welke betrekking moet tusschen a, b, c bestaan, opdat deze vergelijking homogeen zij?

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF, Dr. F. SCHUH *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

Uit

$$(ay + b)^2 = b^2 - ac = \Delta$$

volgt door logarithmische differentiatie

$$\frac{2(ay + b)'}{ay + b} = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Deze vergelijking is herleidbaar tot

$$2a\Delta y' + (2a'\Delta - a\Delta')y + (2b'\Delta - b\Delta') = 0.$$

Zal deze lineaire differentiaalvergelijking homogeen wezen, dan is te voldoen aan

$$2b'\Delta - b\Delta' = 0.$$

De gevraagde voorwaarde is derhalve

$$b^2 = k\Delta,$$

of

$$\frac{ac}{b^2} = \text{const.}$$

Vraagstuk CLI.

H 2 e. In de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a + by + cy^2}{\lambda + y}$$

zijn a, b, c, λ functies van x. Aan te toonen, dat deze vergelijking geintegreerd kan worden, als voldaan is aan

$$b - 2c\lambda + \frac{d\lambda}{dx} = 0.$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. H. BREMEKAMP, G. HULSTEEDE, Mej. Dr. E. VAN DE KAMER, Dr. W. KAPTEYN, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF, Dr. J. G. RUTGERS *en* Dr. F. SCHUH.

Oplossing *van* Mej. Dr. E. VAN DE KAMER.

De differentiaalvergelijking $Mdx + Ndy = 0$ bezit een integreerenden factor $\mu = f(x)$, als

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N$$

een functie van x is.

De gegeven vergelijking zou dus moeten voldoen aan de voorwaarde

$$b + 2cy + \frac{d\lambda}{dx} = (\lambda + y)\,\phi(x).$$

Hiertoe is noodig, dat men heeft $\phi(x) = 2c$, en, dien ten gevolge,

$$b - 2c\lambda + \frac{d\lambda}{dx} = 0.$$

Oplossing *van* Dr. J. G. RUTGERS.

Door de substitutie

$$y = z^2 - \lambda$$

gaat de gegeven vergelijking, na eenige herleiding, over in

$$\frac{dz}{dx} = 2cz + 2(a - b\lambda + c\lambda^2) + 2\left(b - 2c\lambda + \frac{d\lambda}{dx}\right)z^2.$$

Zij is dus lineair, en daardoor integrabel, wanneer men heeft

$$b - 2c\lambda + \frac{d\lambda}{dx} = 0.$$

Vraagstuk CLII.

C 1 c. Zij $\theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\theta_2 = \frac{\partial\theta}{\partial y}$, $\theta_{11} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, $\theta_{12} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}$, $\theta_{22} = \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$ en $D^2 = \theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22}$.

Welken vorm verkrijgt de differentiaalvergelijking

$$2D\left(\theta_{22}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} - 2\theta_{12}\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y} + \theta_{11}\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right) =$$

$$= 3\left[\theta_{22}\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right) - 2\theta_{12}\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial D}{\partial y} + \theta_{11}\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2\right]$$

wanneer men θ_1 en y als onafhankelijk veranderlijken neemt?

(Dr. W. Kapteyn.)

Oplossing *van* Dr. W. Kapteyn.

Stel $\theta_1 = \xi$, dan is

$$\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right) = \frac{\partial D}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right) = \frac{\partial D}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial D}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\right) = \frac{\partial^2 D}{\partial \xi\partial y}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 D}{\partial \xi\partial y}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}.$$

Stel nu

$$\frac{\partial D}{\partial \xi} = D_1, \quad \frac{\partial D}{\partial y} = D_2,$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} = D_{11}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial \xi\partial y} = D_{12}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} = D_{22}.$$

dan is

$$\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right) = \theta_{11}D_1, \quad \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right) = \theta_{12}D_1 + D_2,$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right) = \theta_{11}^2 D_{11} + \theta_{111}D_1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\right) = \theta_{11} D_{12} + \theta_{11}\theta_{12} D_{11} + \theta_{112} D_1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right) = \theta_{12}^2 D_{11} + 2\theta_{12} D_{12} + D_{22} + \theta_{122} D_1.$$

Nu vindt men

$$-2\theta_{11} D^2 D_{11} + 2\theta_{11} D D_{22} + 3\theta_{11} D^2 D_1^2 - 3\theta_{11} D_2^2 + \\ + 2DD_1 [\theta_{22}\theta_{111} - 2\theta_{12}\theta_{112} + \theta_{11}\theta_{122}] = 0.$$

Nu volgt echter uit

$$D^2 = \theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22},$$

zoo men naar x differentieert,

$$2DD_1\theta_{11} = 2\theta_{12}\theta_{112} - \theta_{111}\theta_{22} - \theta_{11}\theta_{122}.$$

Voert men dit in, dan komt ten slotte

$$2D^2 D_{11} - 2DD_{22} + D^2 D_1^2 + 3D_2^2 = 0.$$

Vraagstuk CLIII.

H 8 f. X_1 en X_2 zijn functies van x, Y_1 en Y_2 functies van y. Zij $\Delta = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$. Men vraagt de algemeene integraal van

$$Y_2 \frac{\partial v}{\partial x} - X_2 \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial Y_2}{\partial y} - Y_2 \frac{\partial}{\partial y} \lg \Delta\right) v^2 + \\ + \left(Y_2 \frac{\partial}{\partial x} \lg \Delta + X_2 \frac{\partial}{\partial y} \lg \Delta\right) v + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} - X_2 \frac{\partial}{\partial x} \lg \Delta\right).$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Een particuliere integraal is $v_1 = \frac{X_2}{Y_2}$; stelt men nu

$$v = v_1 + w,$$

dan komt men tot

$$Y_2 \frac{\partial w}{\partial x} - X_2 \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial Y_2}{\partial y} - Y_2 \frac{\partial}{\partial y} \lg \Delta\right) w^2 + \\ + \left(\frac{2X_2}{Y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial y} + Y_2 \frac{\partial}{\partial x} \lg \Delta - X_2 \frac{\partial}{\partial y} \lg \Delta\right) w.$$

Stelt men hierin $w = \Delta : z$, dan gaat de voorgaande vergelijking over in

$$X_2 \frac{\partial z}{\partial y} - Y_2 \frac{\partial z}{\partial x} = 2 \frac{X_2}{Y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial y} z + \left(\frac{\partial Y_2}{\partial y} - Y_2 \frac{\partial}{\partial y} \lg \Delta\right) \Delta.$$

Deze vergelijking bezit de particuliere integraal $z_1 = Y_1 Y_2$; men stelle daarom

$$z = z_1 + u,$$

dan komt

$$X_2 \frac{\partial u}{\partial y} - Y_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{X_2}{Y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial y} u.$$

Wanneer men nu nog

$$u = Y_2^2 t$$

stelt, zoo verkrijgt men

$$X_2 \frac{\partial t}{\partial y} - Y_2 \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

waaruit volgt

$$t = f(\int X_2 dx + \int Y_2 dy) = f,$$

zijnde f eene willekeurige functie van het argument $\int X_2 dx + \int Y_2 dy$. Derhalve is de algemeene integraal der gegeven differentiaalvergelijking

$$v = \frac{X_2}{Y_2} + \frac{\Delta}{Y_2 (Y_1 + Y_2 f)},$$

of

$$v = \frac{X_1 + X_2 f}{Y_1 + Y_2 f}.$$

Vraagstuk CLIV.

C 1 c. Als gegeven is

$$x = \varphi(u, v) \text{ en } y = \psi(u, v),$$

vraagt men, welken vorm de vergelijking

$$H \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2K \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + L \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + M = 0$$

aanneemt, wanneer u en v als onafhankelijk veranderlijken worden ingevoerd. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* G. HULSTEEDE *en* Dr. W. KAPTEYN.

Oplossing *van* G. HULSTEEDE.

Wanneer we het differentieeren naar u, v, x, y, met constant houden van v, u, y, x, door toevoeging van de indices 1, 2, 3, 4 aanduiden, krijgen we door $z = f(x, y)$ partieel naar u en v te differentieeren,

$$z_1 = z_3 x_1 + z_4 y_1,$$

$$z_2 = z_3 x_2 + z_4 y_2,$$

$$z_{11} = z_3 x_{11} + z_4 y_{11} + z_{33} x_1^2 + 2 z_{34} x_1 y_1 + z_{44} y_1^2,$$

$$z_{12} = z_3 x_{12} + z_4 y_{12} + z_{33} x_1 x_2 + z_{34} (x_1 y_2 + x_2 y_1) + z_{44} y_1 y_2,$$

$$z_{22} = z_3 x_{22} + z_4 y_{22} + z_{33} x_2^2 + 2 z_{34} x_2 y_2 + z_{44} y_2^2.$$

Uit deze vergelijkingen zouden we z_{33}, z_{34}, z_{44} moeten oplossen en substitueeren in de gegeven vergelijking, als het in dit bijzonder geval niet voor de hand lag z_3, z_4, z_{33}, z_{34}, z_{44} te elimineeren met behulp van de vergelijking

$$-\mathrm{M} = z_{33}\mathrm{H} + 2 z_{34}\mathrm{K} + z_{44}\mathrm{L}.$$

Men verkrijgt dan de vergelijking

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ z_2 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ z_{11} & x_{11} & y_{11} & x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 \\ z_{12} & x_{12} & y_{12} & x_1x_2 & x_1y_2 + x_2y_1 & y_1y_2 \\ z_{22} & x_{22} & y_{22} & x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 \\ -\mathrm{M} & 0 & 0 & \mathrm{H} & 2\mathrm{K} & \mathrm{L} \end{vmatrix} = 0.$$

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Uit

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}$$

volgt

$$p = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} : \mathrm{D} \quad , \quad q = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} : \mathrm{D},$$

waarin

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Uit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = r\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2s\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial u} + t\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + p\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = r\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + s\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial u}\right) +$$

$$+ t\,\frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} + p\,\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = r\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2s\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial v} + t\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + p\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

volgt, zoo men stelt

$$\mathrm{A} = -\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + p\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} : \mathrm{D},$$

$$\mathrm{B} = -\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + p\,\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} : \mathrm{D},$$

$$C = -\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} : D,$$

$$r\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2s\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + t\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + A = 0,$$

$$r\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + s\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) + t\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + B = 0,$$

$$r\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2s\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + t\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + C = 0.$$

Voegt men hierbij

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

dan komt men door eliminatie van r, s en t tot de vergelijking

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 & A \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} & B \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 & C \\ H & 2K & L & M \end{vmatrix} = 0.$$

Vraagstuk CLV.

H 9 a. Bepaal de beide intermediaire integralen van

$$Hr + 2Ks + Lt = 0,$$

waar

$$H = pq(b + cq)^2 - (1 + q^2)(a + cp)(b + cq),$$
$$2K = (1 + q^2)(a + cp)^2 - (1 + p^2)(b + cq)^2,$$
$$L = (1 + p^2)(a + cp)(b + cq) - pq(a + cp)^2.$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Mej. Dr. E. VAN DE KAMER, Dr. W. KAPTEYN *en* Dr. F. SCHUH.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

De intermediaire integralen worden gevonden uit de vergelijkingen

$$Hdy^2 - 2Kdxdy + Ldx^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1),$$

$$Hdpdy + Ldqdx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$

$$dz = pdx + qdy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Let men op de waarden van H, K en L zoo kan de vergelijking 1) als volgt geschreven worden

$$[(b + cq)\,dy + (a + cp)\,dx]\,[\{bpq - a(1 + q^2) - cp\}\,dy -$$
$$- \{apq - b(1 + p^2) - cq\}\,dx] = 0.$$

Aan deze vergelijking kan op twee wijzen voldaan worden, òf door

$$\{bpq - a(1+q^2) - cp\}\,dy - \{apq - b(1+p^2) - cq\}\,dx = 0 \,..\, 1a),$$

òf door

$$(b + cq)\,dy + (a + cp)\,dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1b).$$

Is aan 1*a*) voldaan, dan levert vergelijking 2)

$$(b + cq)\,dp - (a + cp)\,dq = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2a);$$

is daarentegen aan 1*b*) voldaan, dan vindt men uit vergelijking 2)

$$\{bpq - a(1+q^2) - cp\}\,dp + \{apq - b(1+p^2) - cq\}\,dq = 0 \,..\, 2b).$$

Uit vergelijking 2*a*) vindt men door integratie

$$\frac{a + cp}{b + cq} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2a)'$$

Voor vergelijking 1*a*) kan, wegens 3), geschreven worden

$$\{bp - aq)\,dz - (a + cp)\,dy + (b + cq)\,dx = 0,$$

of

$$\{b(a + cp) - a(b + cq)\}\,dz - c(a + cp)\,dy + c(b + cq)\,dx,$$

of met het oog op 2*a*)′

$$(bC - a)\,dz - cCdy + cdx = 0.$$

Door integratie verkrijgt men hieruit

$$(bC - a)z - cCy + cx = D,$$

of, als men voor C de waarde uit $2a)'$ substitueert,

$$(bz - cy) \cdot \frac{a + cp}{b + cq} - az + cx = \mathrm{D}.$$

Men krijgt een intermediaire integraal als men D door een willekeurige functie van C vervangt. Zoo vindt men

$$\frac{x(b + cq) - y(a + cp) + z(bp - aq)}{b + cq} = f\left(\frac{a + cp}{b + cq}\right) \quad \ldots \quad \mathrm{I}).$$

De tweede intermediaire integraal moet uit de vergelijkingen $1b)$ en $2b)$ worden afgeleid. Worden in $2b)$ als nieuwe veranderlijken ingevoerd

$$a + cp = p' \quad \text{en} \quad b + cq = q',$$

dan gaat deze vergelijking over in

$$\{bp'q' - aq'^2 - (b^2 + c^2)p' + abq'\}\, dp' + \\ + \{ap'q' - bp'^2 - (a^2 + c^2)q' + abp'\}\, dq' = 0.$$

Door de substitutie $q' = vp'$ gaat deze over in

$$\{2abv - b^2 - c^2 - (a^2 + c^2)v^2\}\, dp' + \\ + \{ab - (a^2 + c^2)v\}\, p'dv + (av - b)\, p'^2 dv = 0.$$

Na deeling door p'^2 vindt men hieruit

$$\{(a^2 + c^2)v^2 - 2abv + b^2 + c^2\}\, d\left(\frac{1}{p'}\right) - \{(a^2 + c^2)v - ab\}\left(\frac{1}{p'}\right) dv = (b - av)dv,$$

of

$$\frac{d\left(\frac{1}{p'}\right)}{dv} - \frac{(a^2 + c^2)v - ab}{(a^2 + c^2)v^2 - 2abv + b^2 + c^2}\left(\frac{1}{p'}\right) = \frac{b - av}{(a^2 + c^2)v^2 - 2abv + b^2 + c^2}.$$

Van deze lineaire differentiaalvergelijking is de oplossing

$$\frac{1}{p'} = \{(a^2 + c^2)v^2 - 2abv + b^2 + c^2\}^{1/2}\left[\mathrm{E} - \int \frac{av - b}{\{(a^2 + c^2)v^2 - 2abv + b^2 + c^2\}^{3/2}}\, dv\right].$$

De hierin voorkomende integraal, die we door I voorstellen, herleiden we door de substitutie

$$v = z + \frac{ab}{a^2 + c^2}.$$

Men vindt dan

$$I = \int \frac{\{a(a^2+c^2)z - bc^2\}(a^2+c^2)^{1/2}}{\{(a^2+c^2)^2 z^2 + c^2(a+b^2+c^2)\}^{3/2}} dz.$$

Door de substitutie

$$z = \frac{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a^2+c^2} \operatorname{tg} \phi$$

vindt men verder

$$I = \frac{1}{c(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)^{1/2}} \int [a\sqrt{a^2+b^2+c^2} \sin \phi - bc \cos \phi] d\phi =$$

$$= \frac{-1}{c(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)^{1/2}} [a\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cos \phi + bc \sin \phi],$$

of daar

$$\cos \phi = \frac{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)^2 z^2 + c^2(a^2+b^2+c^2)}}, \sin \phi = \frac{(a^2+c^2)z}{\sqrt{(a^2+c^2)^2 z^2 + c^2(a^2+b^2+c^2)}}$$

is,

$$I = -\frac{a(a^2+b^2+c^2) + b(a^2+c^2)z}{(a^2+b^2+c^2)\sqrt{\{(a^2+c^2)[(a^2+c^2)^2 z^2 + c^2(a^2+b^2+c^2)]\}}} =$$

$$= -\frac{bv + a}{(a^2+b^2+c^2)\sqrt{(a^2+c^2)v^2 - 2abv + b^2 + c^2}}.$$

De oplossing der differentiaalvergelijking is dus

$$\frac{1}{p'} = E\sqrt{(a^2+c^2)v^2 - 2abv + b^2 + c^2} + \frac{bv + a}{a^2+b^2+c^2},$$

of wegens $v = q' : p'$,

$$1 = E\sqrt{(a^2+c^2)q'^2 - 2abq'p' + (b^2+c^2)p'^2} + \frac{bq' + ap'}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\frac{c - bq - ap}{a^2+b^2+c^2} = E\sqrt{(cq+b)^2 + (cp+a)^2 + (aq-bp)^2},$$

$$\frac{(cq+b)^2 + (cp+a)^2 + (aq-bp)^2}{(c-bq-ap)^2} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^2 E^2} = F,$$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(1+p^2+q^2)}{(c-bq-ap)^2} = F + 1,$$

$$\frac{1 + p^2 + q^2}{(c - bq - ap)^2} = G.$$

Dit is de integraal der vergelijking (2*b*).

Voor de vergelijking 1*b*) kan men met het oog op 3) schrijven

$$adx + bdy + cdz = 0.$$

Door integratie vindt men hieruit

$$ax + by + cz = H.$$

De tweede intermediaire integraal is dus

$$\frac{1 + p^2 + q^2}{(c - bq - ap)^2} = \phi\,(ax + by + cz) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II)}$$

waarin ϕ weer een geheel willekeurige functie voorstelt.

Vraagstuk CLVI.

I 4 a. Te bewijzen, dat $5n$ geen quadraatrest is van het ondeelbare getal $8n - 5$. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* Dr. H. BREMEKAMP, G. HULSTEEDE *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* G. HULSTEEDE.

Maakt men gebruik van het symbool van Legendre $\left(\frac{m}{p}\right)$ dat gelijk is aan $+1$ of aan -1, naar gelang m al of niet quadraatrest is van het ondeelbare getal p, dan vindt men volgens bekende regels

$$\left(\frac{5n}{8n-5}\right) = \left(\frac{5n+n(8n-5)}{8n-5}\right) = \left(\frac{8n^2}{8n-5}\right) = \left(\frac{2n}{8n-5}\right)^2 \left(\frac{2}{8n-5}\right) =$$

$$= (\pm 1)^2 (-1)^{\frac{1}{4}(8n-5-1)} = (-1)^{4n-3} = -1.$$

Vraagstuk CLVII.

J 1 a. Op hoeveel wijzen kan een product van n getallen worden berekend, wanneer de factoren op verschillende wijze gerangschikt en samengevoegd worden? (W. MANTEL.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, G. HULSTEEDE *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. Mantel.

Zij P_n het aantal manieren, dat men vindt zonder verwisseling; het geheele aantal is dan $P_n \times n!$ Eene betrekking voor P_n vinden wij door op te merken, dat de laatste vermenigvuldiging het product geeft van het product der eerste a factoren met het product der $(n - a)$ volgende; hierbij kan a alle waarden van 1 tot $(n - 1)$ hebben. De gedeeltelijke producten kunnen hier op P_a en P_{n-a} manieren worden voorgesteld. Dus geldt de formule

$$P_n = P_1P_{n-1} + P_2P_{n-2} + P_3P_{n-3} + \ldots + P_{n-1}P_1.$$

Uitgaande van $P_1 = 1$ kan men door deze formule de waarden van P_n achtereenvolgens voor $n = 2, 3 \ldots$ berekenen.

Eene onafhankelijke formule kan men hieruit afleiden door de reeks

$$f(x) = P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + \ldots$$

te hulp te nemen. Verheft men beide leden tot de tweede macht, dan vindt men

$$\{f(x)\}^2 = P_1^2x^2 + (P_1P_2 + P_2P_1)\,x^3 + (P_1P_3 + P_2P_2 + P_3P_1)\,x^4 + \ldots$$

Wegens de herleidingsformule is dus

$$\{f(x)\}^2 = f(x) - P_1x = f(x) - x.$$

Dus heeft men

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\{1 - (1 - 4x)^{\frac{1}{2}}\} = \frac{4x}{2^2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{4^2x^2}{2^3} + \frac{1.3}{1.2.3}\cdot\frac{4^3x^3}{2^4} + \ldots.$$

zoodat

$$P_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots\ n}\cdot\frac{4^n}{2^{n+1}} = \frac{2.6.10\ldots(4n-6)}{n\,!}.$$

Het gevraagde getal is dus $2.6.10\ldots(4n - 6)$.

Oplossing *van* G. Hulsteede.

Onder het product $[\{(ac)e\}(db)][\ldots]$ worde verstaan, dat a vermenigvuldigd wordt met c; dat product met e; dit nieuwe met het product van d met b; het komende met weer een ander product. Aan bovenstaand product kan men onderscheiden de permutatie $acedb\ldots$ en het schema $[\{(\times\times)\times\}(\times\times)][\times\times\times..]$.

Daar men in elk schema van n plaatsen de $n!$ permutaties der n letters kan plaatsen, zonder dat men ooit tweemaal hetzelfde product krijgt, is $x_n = n!\,y_n$, als men onder x_n het gevraagde aantal producten en onder y_n het aantal schema's van n plaatsen verstaat. Elk schema van n plaatsen is het „product" van een van p met een van $n-p$ plaatsen terwijl $p = 1, 2, 3 \ldots n-1$ kan zijn. Om alle schema's van n plaatsen te krijgen, neme men dus alle paren schema's, die samen n plaatsen tellen. Men vindt zoo, door alle mogelijkheden te combineeren,

$$y_n = y_1 y_{n-1} + y_2 y_{n-2} + y_3 y_{n-3} + \ldots + y_{n-2} y_2 + y_{n-1} y_1.$$

Daar $y_1 = 1$ is, heeft men alzoo

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \\ y_3 &= y_1 y_2 + y_2 \\ y_4 &= y_1 y_3 + y_2 y_2 + y_3 \\ y_5 &= y_1 y_4 + y_2 y_3 + y_3 y_2 + y_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Vat men de links geplaatste factoren van elk product als „onbekenden" op, dan kan men deze op de gewone manier „oplossen". Men vindt

$$y_1 = |\,y_2\,| \quad ; \quad y_2 = \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} ;$$

$$y_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y_2 \\ y_2 & 1 & y_3 \\ y_3 & y_2 & y_4 \end{vmatrix} ; \quad y_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & y_2 \\ y_2 & 1 & 0 & y_3 \\ y_3 & y_2 & 1 & y_4 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_5 \end{vmatrix} ; \text{ enz.}$$

Wanneer men nu in den determinant van y_n de rechterkolom naar den linkerkant verplaatst, wat met $(n-1)$ teekenwisselingen gepaard gaat, krijgt men de „determinanten van gebroken functies." Deze hebben (zie Pascal „Die Determinanten" § 41) de eigenschap, dat uit

$$\phi(z) = 1 + y_2 z + y_3 z^2 + y_4 z^3 + \ldots,$$

volgt

$$\frac{1}{\phi(z)} = 1 - |\,y_2\,|\,z + \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix} z^2 - \begin{vmatrix} y_2 & 1 & 0 \\ y_3 & y_2 & 1 \\ y_4 & y_3 & y_2 \end{vmatrix} z^3 + \ldots.$$

In ons geval is dus

$$\frac{1}{\phi(z)} = 1 - y_1 z + (-1)^1 y_2 z^2 - (-1)^2 y_3 z^3 + \ldots.$$

Hieruit volgt

$$z\phi(z) + \frac{1}{\phi(z)} = z + 1 - y_1 z = 1.$$

Dus

$$\phi^2(z) - \frac{1}{z}\phi(z) + \frac{1}{z} = 0,$$

$$\phi(z) = \frac{1}{2z} \pm \sqrt{\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{z}} = \frac{1}{2z}(1 \pm \sqrt{1 - 4z}).$$

Het bovenste teeken vervalt, daar $\phi(z)$ geen term $\frac{1}{z}$ mag hebben.

$$\phi(z) = \frac{1}{2z}\{1 - (1 - C'_{\frac{1}{2}}(4z) + C^2_{\frac{1}{2}}(4z)^2 - C^3_{\frac{1}{2}}(4z)^3 + \ldots)\}$$

$$= C'_{\frac{1}{2}} 2 - C^2_{\frac{1}{2}} 2^3 z + C^3_{\frac{1}{2}} 2^5 z^2 - C^4_{\frac{1}{2}} 2^7 z^3 + \ldots.$$

Door vergelijking der twee reeksen voor $\phi(z)$ vindt men

$$y_n = (-1)^{n+1} 2^{2n-1} C^n_{\frac{1}{2}},$$

of

$$y_n = (-1)^{n+1} 2^{2n-1} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots\left(-\frac{2n-5}{2}\right)\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{1.2.3 \ldots (n-1) \quad n}.$$

Dus ook

$$y_{n-1} = (-1)^n 2^{2n-3} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots\left(-\frac{2n-5}{2}\right)}{1.2.3 \ldots (n-1)}.$$

Daaruit volgt

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{4n-6}{n}.$$

Dus is

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n!\, y_n}{(n-1)!\, y_{n-1}} = 4n - 6.$$

Daar $x_1 = 1$ en $x_2 = 2$ is, heeft men

$$x_n = 1 \times 2 \times 6 \times 10 \times 14 \times \ldots (4n-6).$$

Vraagstuk CLVIII.

N° 1 d. Bepaal de meetkundige plaats der middelpunten van de quadratische oppervlakken, welke vier gegeven vlakken aanraken en drie toegevoegde middellijnen van gegeven richting bezitten.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. H. BREMEKAMP, E. D. J. DE JONGH JR. *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

Neemt men de assen van een coördinatenstelsel evenwijdig aan de gegeven richtingen en heeft het middelpunt de coördinaten ξ, η, ζ, dan is de vergelijking van het quadratisch oppervlak van de gedaante

$$a(x-\xi)^2 + b(y-\eta)^2 + c(z-\zeta)^2 - 1 = 0.$$

Het raakvlak in het punt (X, Y, Z) wordt aangewezen door

$$a(X-\xi)(x-\xi) + b(Y-\eta)(y-\eta) + c(Z-\zeta)(z-\zeta) - 1 = 0.$$

Zal dit samenvallen met een gegeven vlak

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z - 1 = 0$$

of

$$A_1(x-\xi) + B_1(y-\eta) + C_1(z-\zeta) + A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta - 1 = 0,$$

dan moet voldaan zijn aan

$$\frac{a(X-\xi)}{A_1} = \frac{b(Y-\eta)}{B_1} = \frac{c(Z-\zeta)}{C_1} = \frac{1}{1 - A_1\xi - B_1\eta - C_1\zeta}.$$

Lossen we hieruit $(X-\xi)$, $(Y-\eta)$ en $(Z-\zeta)$ op en substitueeren de verkregen waarden in

$$a(X-\xi)^2 + b(Y-\eta)^2 + c(Z-\zeta)^2 - 1 = 0,$$

dan komt men tot

$$\frac{A_1^2}{a} + \frac{B_1^2}{b} + \frac{C_1^2}{c} - \{1 - A_1\xi - B_1\eta - C_1\zeta\}^2 = 0,$$

zijnde de voorwaarde welke vervuld moet zijn opdat het quadratisch oppervlak aan het eerste der platte vlakken raakt.

Denken we voor de andere drie platte vlakken de overeen-

komstige voorwaarden opgeschreven, dan geeft eliminatie van a, b en c de vergelijking der gezochte meetkundige plaats. Na vervanging van (ξ, η, ζ) door loopende coördinaten vindt men

$$\begin{vmatrix} (A_1x + B_1y + C_1z - 1)^2 & A_1^2 & B_1^2 & C_1^2 \\ (A_2x + B_2y + C_2z - 1)^2 & A_2^2 & B_2^2 & C_2^2 \\ (A_3x + B_3y + C_3z - 1)^2 & A_3^2 & B_3^2 & C_3^2 \\ (A_4x + B_4y + C_4z - 1)^2 & A_4^2 & B_4^2 & C_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

dus weder een quadratisch oppervlak.

Oplossing *van* W. Mantel.

Zij ABCD het gegeven viervlak. Neem een punt O in de ruimte willekeurig aan, en bepaal het oppervlak van den tweeden graad met O tot middelpunt, met drie toegevoegde middellijnen in de gegeven richtingen, en rakende aan de vlakken ABC, ACD, ADB.

Dit oppervlak zal nu wel niet aan het vlak BCD raken. Vergroot of verklein het dan ten opzichte van A als gelijkvormigheidspunt, totdat het aan BCD raakt; dit kan op twee wijzen gebeuren, zooals aanschouwelijk blijkt bij de ellipsoïde, die aan den eenen of aan den anderen kant van BCD kan liggen.

Op de lijn AO liggen dus twee punten P_1 en P_2 van de meetkundige plaats; zij worden gescheiden door het vlak BCD en hun afstanden tot BCD zijn evenredig aan hun afstanden tot A.

De gevraagde meetkundige plaats is dus een oppervlak van den tweeden graad, dat ABCD tot poolviervlak heeft.

Vraagstuk CLIX.

N° 11. Als α, β de afstanden voorstellen van een rechte tot twee gegeven punten, vraagt men den stralencomplex te onderzoeken, welke door $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$ is bepaald.

(J. Neuberg.)

Oplossing *van* J. NEUBERG.

1. De bedoelde complex Γ is bestand tegen wenteling om de *as* AB; men zou hem dus een *omwentelingscomplex* kunnen noemen.

Beschrijft men met A, B als middelpunten bollen waarvan de stralen α, β aan de gegeven vergelijking voldoen, dan behoort de congruentie gevormd door de gemeenschappelijke raaklijnen dezer bollen geheel tot Γ.

De raaklijnen door een der gelijkvormigheidspunten S dezer bollen vormen blijkbaar den complexkegel (S) van S. Men ziet gemakkelijk in, dat elk punt van AB slechts voor twee bollen (A, α), (B, β) gelijkvormigheidspunt is. Derhalve is Γ een *quadratische complex*.

Voor $\alpha + \beta = AB = d$ en $|\alpha - \beta| = d$ gaat telkens een der complexkegels (S) over in een dubbel te tellen vlak loodrecht op de as; zulk een punt worde *bisingulier* genoemd, ter onderscheiding van een singulier punt, waarvoor de complexkegel uit *twee* stralenbundels bestaat.

Voor $\alpha = \beta = ab : \sqrt{(a^2 + b^2)} = R$ heeft men een complexcylinder behoorende bij het oneindig ver gelegen uitwendige gelijkvormigheidspunt.

2. De doorsnede van twee bollen (A, α), (B, β) is een cirkel, waarvan de raaklijnen complexstralen zijn. De meetkundige plaats dezer *parallelcirkels* is een bol.

Bepaalt men nl. op AB een punt C, zoo dat $AC : CB = a^2 : b^2$ is, dan levert het theorema van STEWART voor elk punt P van een parallelcirkel de betrekking

$$\frac{a^2 d}{a^2 + b^2} \cdot \overline{BP}^2 + \frac{b^2 d}{a^2 + b^2} \cdot \overline{AP}^2 = d \cdot \overline{CP}^2 + \frac{a^2 b^2 d^3}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Nu is evenwel

$$a^2 \cdot \overline{BP}^2 + b^2 \cdot \overline{AP}^2 = a^2 b^2.$$

Dus wordt

$$\overline{CP}^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2 - d^2)}{(a^2 + b^2)^2} = r^2,$$

en C is het middelpunt van een bol, die alle parallelcirkels bevat, dus alle complexstralen aanraakt, die loodrecht op de as staan.

In een meridiaanvlak worde op AB als schuine zijde een rechthoekige driehoek ABF geteekend, zoodat AF : BF $= a : b$. Dan is C blijkbaar de projectie van F op AB.

Neemt men nog op FA en FB achtereenvolgens de punten A′ en B′ aan, zoodat FA′ $= a$ en FB′ $= b$ is, dan heeft men, als C′ het snijpunt van A′B′ en FC aanwijst,

$$FC = abd : (a^2 + b^2) \equiv p \text{ en } FC' = ab : \sqrt{a^2 + b^2} \equiv R.$$

Wij kunnen nu drie soorten van complexen onderscheiden:

a) complex Γ_1, waar $d^2 < a^2 + b^2$ is. Er zijn bestaanbare parallelcirkels, gelegen op een bol, met straal $r = \sqrt{R^2 - p^2}$, die de as in twee bisinguliere punten D, E snijdt. De punten der as buiten DE hebben bestaanbare complexkegels;

b) complex Γ_2 met $d^2 = a^2 + b^2$. Bol (C) is in een bisingulier punt C overgegaan; alle overige punten der as hebben bestaanbare complexkegels;

c) complex Γ_3 met $d^2 < a^2 + b^2$. Er zijn geen parallelcirkels en alle punten der as hebben bestaanbare complexkegels.

3. Door C leggen we een vlak μ dat in het punt C_0 loodrecht staat op den willekeurig gekozen complexstraal g.

De projecties van A en B op μ noemen we A_1 en B_1.

Stelt men $CC_0 = \gamma$, $\angle(d, g) = \lambda$, en bedenkt, dat $A_1C_0 = \alpha$, $B_1C_0 = \beta$ is, dan heeft men vooreerst

$$a^2 . \overline{B_1C_0}^2 + b^2 . \overline{A_1C_0}^2 = a^2b^2.$$

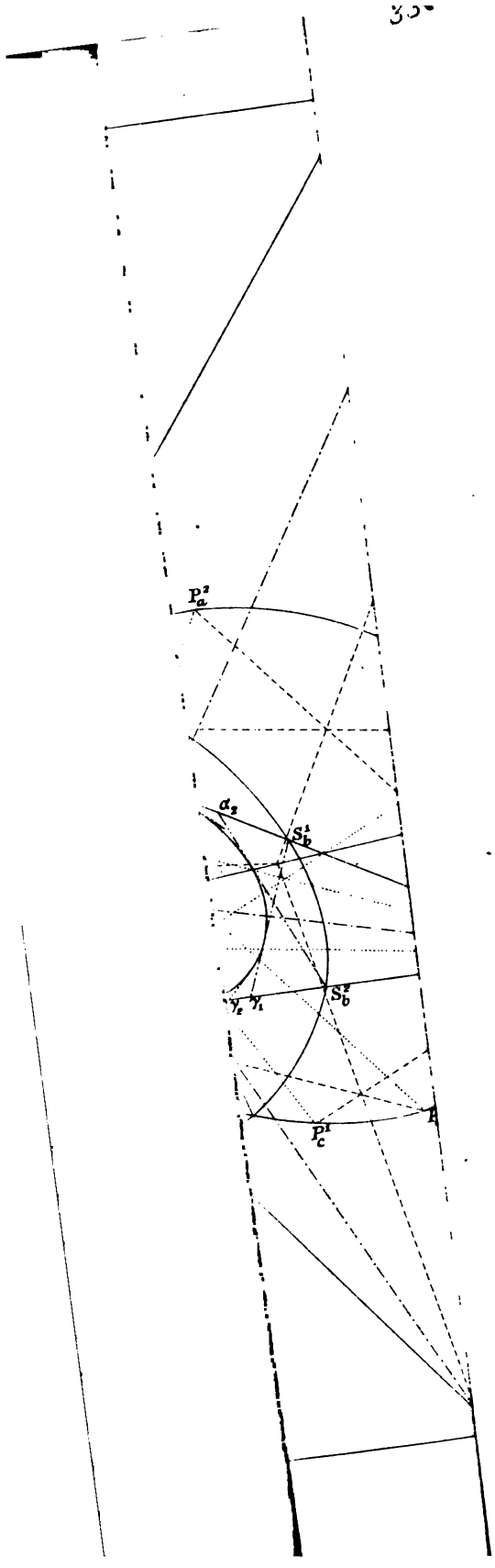
Wegens $A_1C : CB_1 = a^2 : b^2$ levert verder het theorema van STEWART voor driehoek $A_1B_1C_0$ de betrekking

$$a^2 . \overline{B_1C_0}^2 + b^2 . \overline{A_1C_0}^2 = (a^2 + b^2)\gamma^2 + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \overline{A_1B_1}^2.$$

Daar $\overline{A_1B_1} = \overline{AB} \sin\lambda = d \sin\lambda$, vindt men uit de laatste twee vergelijkingen

$$\gamma^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a^2b^2d^2}{(a^2 + b^2)^2} \sin^2\lambda = R^2 - p^2 \sin^2\lambda.$$

Deze vergelijking kan als bepaling van Γ dienen, als men γ en λ als veranderlijken beschouwt. Uit haar blijkt, dat C als middelpunt van Γ is te beschouwen.


P_a^2
α_2
S_b^1
γ_2
γ_1
S_b^2
P_c^1

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarbij aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, Dr. D. COELINGH, Amsterdam, Mauritskade 58, bij wien men ook klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in de toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenheid van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van twee zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderrichtinghe dienende tot het maecken vande reductien van de tacxcustingen tot gereede penningen, om dien-volgende te eysschen en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Heeren Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten, geteekend JOHAN DE WITT, 1671)]
in den handel *f* 6,00 . . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 1892
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen, tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, deel 1—8 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,00 . . . . voor de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle des publications mathématiques, deel 1—10, van elk twee stukken à *f* 4,00 en bij overcompleete stukken, per stuk *f* 2,00.

Tables des matières des volumes I—V . . . . *f* 2,00.
" " " " " VI—X . . . . *f* 3,00.

Het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: „*Een overmoeide arbeid komt alles te boven*," opgericht in 1779, tracht de beoefening der Wiskunde te bevorderen door

a) het houden van vergaderingen,

b) het uitgeven van tijdschriften,

c) het uitgeven van een reeks vraagstukken ter oplossing voor de leden, later gevolgd door de oplossingen,

d) het uitschrijven van prijsvragen,

e) het inrichten eener boekerij, enz.

De vergaderingen worden zooveel mogelijk maandelijks te Amsterdam gehouden, in de maanden van October tot Maart.

Het tijdschrift „*Revue semestrielle des publications mathématiques*" tracht in den kortst mogelijken tijd beknopte opgaven te verschaffen omtrent de in de verschillende wiskundige tijdschriften opgenomen verhandelingen. Het verschijnt jaarlijks in twee stukken, elk van ruim honderd bladzijden.

Het tijdschrift getiteld „*Nieuw Archief voor Wiskunde*" gerediageerd door Dr. J. C. Kluyver te Leiden, Dr. D. J. Korteweg te Amsterdam en Dr. P. H. Schoute te Groningen bevat wiskundige verhandelingen. Elke twee jaar verschijnt een deel, bestaande uit vier stukken van ongeveer vijf vel druks.

De voornaamste der door de leden ingezonden oplossingen van de voorgestelde vraagstukken worden gepubliceerd in het „*Wiskundige Opgaven*," geredigeerd door Dr. J. De Vries te Utrecht. Elk deel bevat de oplossingen van 200 vraagstukken in ruim 400 bladzijden; het verschijnt in twee of drie jaar en bij stukken van ongeveer vijf vel druks.

Jaarlijks wordt door het Genootschap een twaalftal prijsvragen uitgeschreven. Zij, die na verloop van tijd zien prijsvragen hebben beantwoord, verkrijgen den titel van lid van verdienste.

De bibliotheek, waarvan de boeken op aanvraag bij Dr. G. P. Burger, bibliothecaris van de Universiteits-bibliotheek te Amsterdam, aan de leden worden verzonden, is op de hoogte van den tijd, daar het Genootschap in ruiling is met de voornaamste wiskundige genootschappen in het buitenland.

De *jaarlijksche contributie* van de leden der Vereeniging bedraagt *f* 5,00 (entrée *f* 1,00).

Zij, die nog geen lid zijn en mochten verlangen lid te worden, gelieven zich aan te melden bij den Onderwijzer, Dr. D. Coelingh, Mauritskade 58, Amsterdam.

Sci 900.38

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN

DOOR

LEDEN VAN HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP

TER SPREUKE VOERENDE

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

NEGENDE DEEL.
5de Stuk.

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1906.

Ter bevordering eener geregelde toezending van de drukwerken van het Genootschap, wordt den leden beleefd verzocht bij verhuizing hun nieuw adres op te geven aan Dr. D. COELINGH, Ondervoorzitter van het Genootschap, Amsterdam, Prinsengracht 58.

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarbij aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, Dr. D. COELINGH, Amsterdam, Mauritskade 58, bij wien men ook klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in de toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenheid van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van twee zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderrichtinghe dienende tot het maecken vande reductien van de tacxcustingen tot gereede penningen, om dien-volgende te eysschen en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Heeren Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten, geteekend JOHAN DE WITT, 1671)]
in den handel *f* 6,00 . . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 1892
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen, tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, deel 1—8 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete afl[illegible]
in den handel *f* 1,[illegible] [illegible]de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle [illegible] **mathématiques**, deel 1—10, van elk twee stuk[illegible] [illegible]overcompleete stukken, per stuk *f* 2,00.

T[illegible] matières [illegible] . . . *f* 2,00.
[illegible] . . . . *f* 3,00.

Zijn centrum en as, benevens de grootheden R en p gegeven, dan kan men blijkbaar oneindig vele puntenparen A, B vinden. Trekt men n.l. $CF = p$ loodrecht op de as, maakt $CF = R$, en legt door C' een rechte evenwijdig aan de as, dan snijden twee door F getrokken, onderling loodrechte, lijnen de as in twee punten A, B, ten opzichte waarvan Γ door een vergelijking van den vorm $b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = a^2b^2$ wordt bepaald.

4. De betrekking tusschen γ en λ levert terstond de gedaante der complexkegelsnede in een meridiaanvlak.

Voor Γ_1 is n.l.

$$\gamma^2 = R^2 \cos^2 \lambda + r^2 \sin^2 \lambda ;$$

dus raken alle complexstralen van een meridaanvlak aan een ellips met centrum C, groote as 2R en kleine as $2r$, welke de bisinguliere punten D en E tot toppen heeft, terwijl F (§ 3) een der brandpunten is.

Door wenteling om DE beschrijft deze ellips een ellipsoïde, welke alle complexkegels omhult, waarvan de toppen op de as van den complex liggen.

Voor Γ_2 is $r = 0$; de meridiaanellips wordt dus, als omhullende van complexstralen, vervangen door het punt F en zijn spiegelbeeld F' t. o. v. AB. In een meridiaanvlak vormen de complexstralen dus twee stralenbundels. Alle complexkegels met toppen op AB hebben den cirkel (F) gemeen, die C tot centrum en $p = R$ tot straal heeft.

Voor Γ_3 is de meridiaankromme een hyperbool met brandpunten F, F'.

5. Daar γ constant is voor de stralen van een gegeven richting, vormen deze stralen een omwentelingscylinder, die bij wenteling om AB complexcylinder blijft.

In Γ_1 en Γ_2 behoort bij elke richting een bestaanbare complexcylinder. Voor de richtingen loodrecht op AB is in Γ_2 deze cylinder tot zijn as ingekrompen.

In Γ_3 is de cylinder slechts dan bestaanbaar als de rechte door C, in de gegeven richting getrokken, binnen den asymptotenkegel der omwentelingshyperboloïde valt.

6. Wij beschouwen nu de complexstralen g in een willekeurig vlak π. Zij g_1 de projectie van de as d op π, C_1 de projectie van C op g_1, C' de projectie van C op g. Stelt men verder $CC' = \gamma$, $CC_1 = \gamma_1$, $C_1C' = \gamma'$, $\angle(g, d) = \lambda$,

$\angle(g, g_1) = \lambda'$, $\angle(g_1, d) = \lambda_1$, dan levert een drievlakkenhoek, waarvan de ribben evenwijdig zijn met g, g_1 en d, de betrekking $\cos\lambda = \cos\lambda' \cos\lambda_1$.

De vergelijking $\gamma^2 = R^2 - p^2 \sin^2\lambda$ levert na eenige herleiding de betrekking

$$\gamma'^2 = (R^2 - p^2 \sin^2\lambda_1 - \gamma_1^2)\cos^2\lambda' + (R^2 - p^2 - \gamma_1^2)\sin^2\lambda'$$

tusschen de veranderlijken γ' en λ', welke de omhullende der stralen g doet kennen als een kegelsnede met centrum C_1.

Onderzoeken we nu de drie soorten van den complex Γ.

Complex Γ_1. *a*) Is g_1 zelf complexstraal, dus

$$\gamma_1^2 = R^2 - p^2 \sin^2\lambda_1,$$

dan heeft men $\gamma'^2 = -p^2 \cos^2\lambda_1 \sin^2\lambda'$.

Staat nu g_1 loodrecht op d, zoodat $\cos\lambda_1 = 0$ en $\gamma' = 0$ is, dan kan λ' alle waarden verkrijgen. Maakt g' geen rechten hoek met d, dan is noodzakelijk $\gamma' = 0$ en $\lambda' = 0$. M. a. w. een raakvlak aan de meridiaanellipsoïde bevat slechts één bestaanbaren straal, n.l. zijn doorgang met het overeenkomstige meridiaanvlak. Daarentegen bevatten de raakvlakken in de bisinguliere punten D en E elk een bundel van complexstralen; deze vlakken kunnen dus *bisingulier* genoemd worden.

b) Voor $R^2 - p^2 - \gamma_1^2 = 0$, of $\gamma_1 = r$, vindt men

$$\gamma'^2 = p^2 \cos^2\lambda_1 \cos^2\lambda'.$$

Het vlak π raakt in C_1 aan den „parallelbol" (C). Trekt men in π door C_1 een loodlijn op g_1 en neemt daarop de punten G en G_1 aan, waarvoor $C_1G = C_1G' = p\cos\lambda_1$ is, dan is elke rechte door G of G_1 complexstraal. Elk raakvlak aan den parallelbol is derhalve een *singulier* vlak voor Γ_1.

Verplaatst men π zoo dat het loodrecht op hetzelfde meridiaanvlak ν en tevens raakvlak aan den parallelbol blijft, en is N de projectie van C_1 op d, dan volgt uit $C_1N = r\cos\lambda_1$ en $C_1G = p\cos\lambda_1$, dat G in het vlak blijft, dat ν in d onder een hoek ψ snijdt, die bepaald is door $\operatorname{tg}\psi = C_1G : C_1N = p : r$. Maar G ligt ook op den omhullingscylinder van bol (C), die ν loodrecht snijdt. Dus beschrijven de punten G en G' twee ellipsen ε en ε' met assen $DE = 2r$ en $2R$.

Dus is de meetkundige plaats der puntenparen in de raakvlakken aan den parallelbol een omwentelingsellipsoïde met as DE.

c) Is het vlak π willekeurig, g_2 een raaklijn aan de meridiaanellips (ν), evenwijdig aan g_1 getrokken, γ_2 haar afstand van C, dus $\gamma_2^2 = R^2 - p^2 \sin^2 \lambda_1$, dan heeft men

$$\gamma'^2 = (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \cos^2 \lambda' + (r^2 - \gamma_1^2) \sin^2 \lambda'.$$

Is $\gamma_1 > \gamma_2 > r$, dan snijdt π de ellips (ν) niet, en bevat geen bestaanbaren complexstraal.

Is $\gamma_2 > r > \gamma_1$, dan snijdt π den parallelbol, en de complexkromme is een ellips.

Is $\gamma_2 > \gamma_1 > r$, dan snijdt π wel de ellipsoïde, maar niet den bol, en de complexkromme is een hyperbool.

Complex Γ_2. Daar $R = p$ is, heeft men

$$\gamma'^2 = (p^2 \cos^2 \lambda_1 - \gamma_1^2) \cos^2 \lambda' - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda'.$$

Ook hier onderscheiden we verschillende gevallen.

a) $\gamma_1^2 = p^2 \cos^2 \lambda_1$. De rechte g_1 gaat door F of F'. De eenige bestaanbare oplossing is $\gamma' = 0$, $\lambda' = 0$. Elk door een punt van cirkel (F) gelegd vlak bevat dus slechts één bestaanbaren straal.

b) Is $\gamma_1 = 0$, dan gaat π door het centrum C. Trekt men in π door C een loodlijn op g_1 en neemt daarop twee punten G en G' aan, op afstanden $p \cos \lambda_1$ van C, dan is elke rechte door een dier punten in π getrokken een complexstraal, π dus een singulier vlak.

Laat men in (ν) de rechte g_1 om C wentelen, dan doorloopen G en G' op de rechte, die ν in C loodrecht snijdt, een segment van de lengte $2p$.

c) Is $\gamma_1^2 < p^2 \cos^2 \lambda'$ dan liggen F en F' ter weerszijden van g_1. De complexkromme is een hyperbool.

d) Is $\gamma_1^2 > p^2 \cos^2 \lambda'$, dan bevat π geen bestaanbaren straal.

Complex Γ_3. Stelt men, ter bekorting, $R^2 - p^2 = -r^2$, dan wordt

$$\gamma'^2 = (R^2 - p^2 \sin^2 \lambda_1 - \gamma_1^2) \cos^2 \lambda' - (r^2 + \gamma_1^2) \sin^2 \lambda'.$$

a) Is g_1 complexstraal, dus $R^2 - p^2 \sin^2 \lambda_1 = \gamma_1^2$, dan voldoet slechts $\lambda' = 0$, $\gamma' = 0$, zoodat π enkel den straal g_1 bevat.

b) Is dit niet het geval, dan volgt uit de schrijfwijze

$$\gamma'^2 = (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \cos^2 \lambda' - (r^2 + \gamma_1^2) \sin^2 \lambda',$$

dat de complexkromme een hyperbool of onbestaanbaar is, naar gelang men heeft $\gamma_2 > \gamma_1$ of $\gamma_2 < \gamma_1$, dus naarmate of de omwentelingshyperboloïde al dan niet snijdt.

7. Wij nemen C tot oorsprong van een stelsel rechthoekige coördinaten, AB tot z-as.

Zijn $P(x, y, z)$ en $P'(x', y', z')$ twee punten van een straal, en stelt men $CP = \rho$, $CP' = \rho'$, $PP' = \delta$, $\angle PCP' = \phi$, dan levert de inhoud van driehoek CPP' de betrekking

$$\rho^2\rho'^2 \sin^2 \phi = \gamma^2\delta^2.$$

Nu is

$$\rho\rho' \cos \phi = xx' + yy' + zz', \quad \text{dus}$$

$$\gamma^2\delta^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2,$$

of

$$\gamma^2\delta^2 = (xy' - x'y)^2 + (yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2.$$

Beschouwt men als coördinaten van den straal de grootheden

$$p_1 = x - x', \quad p_2 = y - y', \quad p_3 = z - z',$$

$$p_4 = yz' - y'z, \quad p_5 = zx' - z'x, \quad p_6 = xy' - x'y,$$

dan heeft men dus

$$\gamma^2\delta^2 = p_4^2 + p_5^2 + p_6^2.$$

Daar verder $\delta \cos \lambda = (z - z') = p_3$, dus

$$\delta^2 \sin^2 \lambda = (x - x')^2 + (y - y')^2 = p_1^2 + p_2^2 \quad \text{is},$$

gaat de vergelijking

$$\gamma^2 = R^2 \cos^2 \lambda \pm r^2 \sin^2 \lambda$$

van den complex over in de vergelijking in stralencoördinaten

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = R^2 p_3^2 \pm r^2 (p_1^2 + p_2^2).$$

Om den complexkegel van een punt P' te onderzoeken leggen we eenvoudigshalve het vlak XOZ door P'. De doorgang van dien kegel met XOY heeft dan tot vergelijking

$$z'^2x^2 + (x'^2 + z'^2)\, y^2 = R^2z'^2 \pm r^2 [(x - x')^2 + y^2].$$

Complex Γ_1. Men heeft

$$(z'^2 - r^2)\, x^2 + (x'^2 + z'^2 - r^2)\, y^2 + 2r^2x'x = R^2z'^2 + r^2x'^2.$$

a) $z'^2 - r^2 = 0$. P′ ligt in een der bisinguliere vlakken, en de complexkegel snijdt XOY in een parabool.

b) $x'^2 + z'^2 - r^2 = 0$. P′ ligt op den parallelbol. Men vindt, na een eenvoudige herleiding,

$$x'x = r^2 \pm z' \sqrt{r^2 - R^2};$$

dus bestaat de complexkegel uit twee onbestaanbare vlakken, die tot doorsnede hebben een raaklijn in P′ aan den parallelbol; de punten van dezen bol zijn dus singulier.

c) De vergelijking van den doorgang kan in den vorm

$$(z'^2 - r^2)\left(x + \frac{r^2 x'}{z'^2 - r^2}\right)^2 + (x'^2 + z'^2 - r^2)\, y^2 = z'^2\left(R^2 + \frac{x'^2 r^2}{z'^2 - r^2}\right)$$

gebracht worden.

Men leidt uit haar af:

Ligt P′ buiten het door de bisinguliere vlakken $z'^2 = r^2$ begrensde deel der ruimte, dan is de doorgang een ellips. Ligt P′ tusschen deze vlakken, maar buiten den parallelbol, dan is $z'^2 < r^2$ en $x'^2 + z'^2 > r^2$; de doorgang is een hyperbool.

Ligt P′ binnen dien bol, dan is de complexkegel imaginair.

Complex Γ_2. Uit de vergelijking van den doorgang van den complexkegel,

$$z'^2 x^2 + (x'^2 + z'^2)\, y^2 = R^2 z'^2,$$

volgt, dat de kegel in het algemeen het XYvlak volgens een ellips snijdt.

Voor $z' = 0$ vindt men evenwel de rechte CP′, voor $x' = 0$ den cirkel $x^2 + y^2 = R^2$.

Complex Γ_3. Men heeft nu

$$(z'^2 + r^2)\left(x - \frac{r^2 x'}{z'^2 + r^2}\right)^2 + (x'^2 + z'^2 + r^2)\, y^2 = z'^2\left(R - \frac{r^2 x'^2}{z'^2 + r^2}\right).$$

Hieruit volgt, dat P′ een enkelen straal, een bestaanbaren kegel of een onbestaanbaren kegel draagt, naar gelang P′ op, buiten of binnen de meridiaanhyperboloïde ligt.

Vraagstuk CLX.

N² 1 g α. Gegeven zijn een puntenveld en een daarmede reciprook verwant stralenveld. Onderzoek de congruentie der loodlijnen uit elk punt van het eerste veld neergelaten op den overeenkomstigen straal van het tweede veld.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* J. NEUBERG en DR. J. DE VRIES.

Oplossing *van* J. NEUBERG.

De vlakken der beide velden wijzen we door γ en γ' aan, hun doorsnede door d of d' naar gelang deze rechte tot het eerste of tot het tweede veld behoort, het overeenkomstige punt worde door D′ of D aangeduid.

De stralen der congruentie, welke in γ of γ' liggen, zullen achtereenvolgens door h en h' worden aangewezen.

1. Wanneer het punt X de rechte d beschrijft, wentelt de overeenkomstige rechte x' in γ' om het punt D′. De puntenreeks d (X) is projectief met den waaier D′ (x'), dus evenzeer met de puntenreeks l'_∞ (P'_∞), welke de loodlijn h' uit X naar x' op de oneindig ver gelegen rechte l'_∞ van γ' afteekent. Bijgevolg omhult h' een parabool (h'), die d' raakt in het punt X_0 dat overeenkomt met den loodrecht op d gerichten straal x'_0 uit D′. *Dus is γ' een singulier vlak van den tweeden graad.*

Het voetpunt X′ van den straal h' beschrijft de voetpuntenlijn van D′ ten opziehte van de parabool (h'), dus een rationale kubische kromme, welke in D′ een dubbelpunt heeft en daar raakt aan de rechten, die loodrecht zijn op de uit D′ aan (h') getrokken raaklijnen.

2. Om het samenstel der stralen h te onderzoeken, beschouwen we in γ' een waaier M′ (x'), waarvan de top M′ op d' ligt. Het met x' overeenkomende punt X beschrijft op de rechte m een puntenreeks m (X), die met dezen waaier projectief is. Het vlak ξ, dat x' in M′ loodrecht snijdt, doorloopt een vlakkenbundel en bepaalt op m een puntenreeks m (Y), die dus projectief is met m (X). Zijn Z_1, Z_2 de coïncidenties dezer collocale reeksen, dan zullen $M'Z_1$ en $M'Z_2$ twee stralen h wezen.

Daar (zie § 1) d een straal der congruentie is, volgt hieruit, dat de in γ gelegen stralen een kromme der derde klasse omhullen. *Dus is γ een singulier vlak van den derden graad.*

De overeenkomstige rechten x' omhullen ook een kromme der derde klasse, want van elk punt op d' gaan, behalve d' zelf, twee zulke stralen uit. De puntenparen Z_1, Z_2 liggen op een kubische kromme; immers elke door D getrokken rechte m draagt een paar, en D behoort, als uitgangspunt van een loodrecht op d' gerichten straal, tot de bedoelde kromme.

3. Doorloopt X de willekeurig in γ aangenomen rechte a, dan wentelt x' om het in γ' gelegen punt A'. Is X'_1 de projectie van X op γ', en X' de projectie van X'_1 op x', dan behoort XX' tot de congruentie. Daar X'_1 een puntenreeks $b'(X'_1)$ beschrijft, die projectief is met de reeks a (X), dus met den bundel $A'(x')$, omhult $l' \equiv X'_1X'$ een parabool (l'), die b' tot raaklijn heeft. Het punt X' doorloopt de voetpuntenlijn van A' ten opzichte van deze parabool, dus een rationale kubische kromme.

Legt men door a een vlak π, dan zijn de snijpunten van π met deze kubische kromme de voetpunten van even zoovele stralen der congruentie, welke hun uitgangspunt op a hebben. Dus bevat elk vlak π drie stralen, en *de congruentie is van de derde klasse.*

Door elk punt A' van γ' gaan vier stralen der congruentie, n.l. twee raaklijnen der parabool (h') en de beide stralen, welke uitgaan van punten op a en hun voetpunten in A' hebben; zij staan natuurlijk loodrecht op de raaklijnen uit A' naar de parabool (l').

De congruentie is dus van de vierde orde.

Van de vier stralen uit een punt X van γ raken drie aan de omhullende der stralen (h); de vierde projecteert X op x'.

4. Een rechte door het willekeurige punt P snijdt γ en γ' in de punten Y en Y'. De rechte y' van γ', die met het punt Y van γ overeenkomt, is aan Y' toegevoegd in een reciproke verwantschap. De punten Y' die op de overeenkomstige rechten y' liggen, vormen dus een kegelsnede α', terwijl de rechten y' een tweede kegelsnede β' omhullen.

Zijn P_1 en Y_1 de projecties van P en Y op γ', dan is P_1Y_1 loodrecht op y' als PY het is, en omgekeerd. Doorloopt Y in

γ de puntenreeks $a(Y)$, dan beschrijft Y_1 in γ' een daarmede projectieve puntenreeks a_1 (Y_1); derhalve zijn ook de waaiers $A'(y')$ en $P_1(Y_1)$ projectief, brengen dus een kegelsnede (V') voort, die hun snijpunt Y' bevat.

Twee door A' en P_1 getrokken loodrechte rechten snijden elkaar op een cirkel door deze punten, welke met (V'), behalve A' en P_1, twee punten V'_1, V'_2, gemeen heeft.

Hieruit volgt, dat de stralen y', die loodrecht staan op de door P getrokken rechten PY, een kegelsnede ϕ' omhullen. De vier gemeenschappelijke raaklijnen van ϕ' en β' zijn rechten y', die door de overeenkomstige rechte PY loodrecht worden gesneden. Het punt P draagt dus vier stralen der congruentie, zoodat op nieuw blijkt dat deze van de *vierde orde* is.

Neemt men P oneindig ver op de normaal van het vlak γ' dan is de kegelsnede α' de meetkundige plaats der projecties Y' welke op de overeenkomstige rechten y' liggen; deze kegelsnede is dus de doorgang van een door stralen der congruentie gevormd cylindervlak. Het oneindig ver gelegen punt der normaal van γ' is dus een *singulier punt van den tweeden graad.*

Vraagstuk CLXI.

K 13 c. Als D_1 het snijpunt is van het vlak ABC met de rechte door D naar het middelpunt van den in het viervlak ABC beschreven bol, dan is

$$DD_1 = \frac{abc\sqrt{\sin S\,[3\sin S + \sin(2A-S) + \sin(2B-S) + \sin(2C-S)]}}{bc\sin A + ca\sin B + ab\sin C},$$

waar $a = DA$, $b = DB$, $c = DC$, $A = \angle BDC$, $B = \angle CDA$, $C = \angle ADB$ en $2S = A + B + C$ is. (Dr. F. Schuh.)

Opgelost *door* J. A. Barrau, Dr. H. Bremekamp, J. van de Griend Jr., G. Hulsteede, Mevr. A. G. Kerkhoven—Wijthoff, T. van Lohuizen, Dr. J. G. Rutgers, Dr. F. Schuh, Dr. C. Stolp en C. Wafelbakker.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp.

Men verdeele het viervlak in drie andere D_1DBC, D_1DCA, D_1DAB en late uit den gemeenschappelijken top D_1 loodlijnen neer op de zijvlakken DBC, DCA, DAB. Met deze zijvlakken

maakt DD_1 denzelfden hoek r; de uit D_1 getrokken hoogtelijnen hebben dus de lengte $DD_1 \sin r$. De inhouden der genoemde viervlakken zijn gelijk aan $\frac{1}{6} bc \sin A \cdot DD_1 \sin r$ enz. Voor den inhoud van ABCD vindt men dus

$$I = \tfrac{1}{6}(bc \sin A + ca \sin B + ab \sin C)\, DD_1 \sin r.$$

Bekende trigonometrische formules geven verder, als ter bekorting

$$\sin(S - A) \sin(S - B) \sin(S - C) = N$$

gesteld wordt,

$$I = \tfrac{1}{3}\, abc \sqrt{N \sin S} \text{ en } \operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{N}{\sin S}},$$

$$\text{dus } \sin r = \sqrt{\frac{N}{N + \sin S}}.$$

Deze waarden van I en $\sin r$ in bovenstaande vergelijking substitueerende krijgt men een vergelijking, waaruit men vindt

$$DD_1 = \frac{2abc \sqrt{(N + \sin S) \sin S}}{bc \sin A + ca \sin B + ab \sin C}.$$

Zal deze uitkomst in overeenstemming zijn met die van de opgave, dan moet $4(N + \sin S)$ gelijk zijn aan de tusschen vierkante haken geplaatste som. Dat dit werkelijk het geval is, toont men gemakkelijk aan met behulp van de bekende identiteit

$$4 \sin p \sin q \sin r = \sin(q + r - p) + \sin(r + p - q) +$$
$$+ \sin(p + q - r) - \sin(p + q + r).$$

Stelt men hierin $p = S - A$, $q = S - B$, $r = S - C$, dan is $p + q + r = S$, $-p + q + r = 2A - S$, enz. en de vergelijking wordt

$$4N = \sin(2A - S) + \sin(2B - S) + \sin(2C - S) - \sin S.$$

Aan weerszijden $4 \sin S$ optellende krijgt men ten slotte

$$4(N + \sin S) = 3 \sin S + \sin(2A - S) + \sin(2B - S) + \sin(2C - S).$$

Vraagstuk CLXII.

K 13 e γ. In viervlak ABCD zij l_A de doorsnede der vlakken door de ribben van den drievlakkenhoek A welke de overstaande

vlakke hoeken middendoor deelen. Op overeenkomstige wijs behooren l_B, l_C, l_D tot de overige drievlakkenhoeken.

Zij verder m_A de doorsnede der vlakken welke de vlakke hoeken van drievlakkenhoek A loodrecht middendoor deelen.

a) Gaan de vier rechten l door één punt P, dan zijn de producten der paren overstaande ribben van het viervlak even groot.

b) Gaan de vier rechten m door één punt Q, dan zijn de sommen der overstaande ribben even groot.

c) Is aan *a*) en *b*) voldaan, dan is ABCD een regelmatige driezijdige pyramide.

d) Vallen P en Q samen dan heeft men een regelmatig viervlak.

(Dr. F. Schuh.)

Opgelost *door* T. J. Allersma, J. A. Barrau, Dr. H. Bremekamp, J. van de Griend Jr., G. Hulsteede, E. D. J. de Jongh Jr., Mevr. A. G. Kerkhoven—Wijthoff, A. W. Kloos, T. van Lohuizen, Dr. J. G. Rutgers, Dr. F. Schuh, Dr. A. van Thijn en C. Wafelbakker.

Oplossing.

a) Als l_A en l_B elkaar snijden, liggen ze met AB in een vlak, dat de hoeken CAD en CBD middendoor deelt. Snijdt CD dit vlak in E, dan heeft men dus AC : AD = CE : ED en BC : BD = CE : ED, derhalve

$$AC \times BD = AD \times BC.$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$AC \times BD = AB \times CD.$$

De producten der paren overstaande ribben zijn dus even groot.

b) Q ligt op gelijke afstanden van de ribben, is dus het middelpunt van een bol, die alle ribben raakt. Is α de afstand van A tot de raakpunten op AB, AC, AD enz., dan zijn de drie sommen AB + CD, AC + BD en AD + BC elk gelijk aan $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, dus onderling gelijk.

c) Zijn a, b, c de ribben in het vlak ABC, d, e, f de overstaande ribben, dan heeft men, als aan *a*) en *b*) voldaan wordt,

$$a + d = b + e = c + f,$$
$$ad = \quad be \quad = cf.$$

Hieruit volgt

$$a - d = \pm (b - e) = \pm (c - f).$$

Het viervlak voldoet dan aan een der volgende vier voorwaarden:

1) $a = b = c, \quad d = e = f;$

2) $a = e = f, \quad d = b = c;$

3) $b = d = f, \quad a = c = e;$

4) $c = d = e, \quad a = b = f.$

In elk geval is het dus een regelmatige driezijdige pyramide. De punten P en Q liggen op de loodlijn uit den top naar het grondvlak getrokken.

d) Vallen P en Q samen, dan is elke rechte l tevens een rechte m, zoodat elke drievlakkenhoek gelijkzijdig, het viervlak dus regelmatig is.

Vraagstuk CLXIII.

M³ 5 e γ. Zij c_3 een kubische ruimtekromme, O_4 haar raaklijnenoppervlak en c_2 de kegelsnede, welke O_4 gemeen heeft met het osculatievlak van een punt P. Te bewijzen dat de quadratische kegel Q_2 welke c_3 uit een van haar punten projecteert, in P slechts twee punten met c_2 gemeen heeft. (Dr. W. A. VERSLUYS.)

Oplossing *van* Dr. W. A. VERSLUYS.

Het osculatievlak van c_3 in den top T van Q_2 is een gemeenschappelijk raakvlak der oppervlakken Q_2 en O_4, langs de raaklijn t van c_3. In het snijpunt van t met c_2 raakt c_2 dus aan Q_2. Derhalve kan c_2 in P nog slechts twee punten gemeen hebben met Q_2.

Hieruit volgt nog, dat c_3 in P slechts twee punten met c_2 gemeen heeft.

Vraagstuk CLXIV.

K 13 e γ. Van viervlak ABCD is gegeven AB = BC = CD en AC = BD. Aan te toonen, dat het middelpunt van den omge-

schreven bol gelegen is op de rechte, welke de middens van AD en BC verbindt, en samenvalt met het middelpunt van den cirkel, die AB, BC en CD middendoor deelt. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, Dr. H. BREMEKAMP, J. VAN DE GRIEND JR., E. D. J. DE JONGH JR., Mej. Dr. E. VAN DE KAMER, A. W. KLOOS, T. VAN LOHUIZEN, Dr. J. G. RUTGERS, Dr. F. SCHUH, Dr. C. STOLP, Dr. A. VAN THIJN, Dr. W. A. VERSLUYS, Dr. J. DE VRIES *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* J. A. BARRAU en DR. A. VAN THIJN.

Uit de gegevens blijkt, dat men het viervlak zoo kan verplaatsen, dat de punten A, B, C, D de plaatsen der punten D, C, B, A innemen. Daar de middens E en F van AD en BC hun plaats behouden, kan de bedoelde verplaatsing geschieden door een wenteling van 180° om de rechte EF als as. Daar het middelpunt M van den om ABCD beschreven bol niet verplaatst kan zijn, moet het op de as EF liggen.

De middens der gelijke koorden AB, BC, CD liggen met EF in een vlak, dus is M het middelpunt van den cirkel, die door die middens gaat.

OPMERKINGEN. De as EF is blijkbaar de rechte welke AD en BC loodrecht snijdt. Ze bevat tevens het middelpunt van den ingeschreven bol.

Is BC niet gelijk aan AB en CD dan ligt M toch op EF, maar is dan niet meer het middelpunt van den door de middens van AB, BC, CD gelegden cirkel.

Heeft men BC = AD, zoodat elke ribbe gelijk is aan de overstaande ribbe, dan bezit het viervlak drie wentelingsassen, die elkaar snijden in een punt, dat middelpunt der om- en ingeschreven bollen en tevens zwaartepunt is.

Vraagstuk CLXV.

Q 4 a. De zijden van twee volledige vierzijden met gemeenschappelijken diagonaaldriehoek snijden elkaar in zestien punten, die twee aan twee met elk hoekpunt van den diagonaaldriehoek in één rechte liggen. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, J. A. BARRAU, J. VAN DE

GRIEND JR., Mej. Dr. E. VAN DE KAMER, A. W. KLOOS, W. MANTEL, Dr. P. SCHUH, Dr. C. STOLP, Dr. A. VAN THIJN *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* C. VAN ALLER en W. MANTEL.

Als men uit een centrum O de beide vierzijden projecteert op een vlak dat evenwijdig is aan het vlak door O en een der zijden van den diagonaaldriehoek, dan verkrijgt men twee parallelogrammen met gemeenschappelijke diagonalen, welke de projecties zijn van de overige zijden van den diagonaaldriehoek.

De vier zijden van het eerste parallelogram snijden de vier zijden van het tweede in zestien punten. Trekt men uit een dier snijpunten een rechte door het middelpunt of evenwijdig aan een der diagonalen, dan gaat zulk een rechte steeds nog door een ander snijpunt. Hiermee is de stelling bewezen.

Vraagstuk CLXVI.

N° 1 e. Men snijdt een kubisch oppervlak met een vlakkenbundel en projecteert de snijkrommen uit een willekeurig punt op een dier vlakken. Bepaal den graad der meetkundige plaats der buigpunten en de klasse van de omhullende der buigraaklijnen in het aldus verkregen vlakke stelsel. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. W. A. VERSLUYS *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. W. A. VERSLUYS.

1. Zij O^n een willekeurig algebraïsch oppervlak van den graad n, zonder knoop- of keer-kromme; zij l een willekeurige as, V een willekeurig vlak, en P een willekeurig punt. Zij p^n de projectie uit P op V van een snijkromme van O^n met een vlak door l.

Iedere buigraaklijn van een kromme p^n is de projectie van een hoofdraaklijn van O^n, die l ontmoet. De graad van de meetkundige plaats der buigpunten der krommen p^n is het aantal dezer buigpunten gelegen op een rechte r van V. Deze buig-

punten zijn de projecties van punten op O^n, gelegen in het vlak (Pr), waarvoor een hoofdraaklijn l ontmoet.

De hoofdraaklijnen van O^n in de punten van het vlak (Pr) vormen een regelvlak van den graad $n(3n-4)$ (zie J. DE VRIES „Eenige kenmerkende getallen van een algebraïsch oppervlak." Versl. K. A. v. W. XIII, 753). Er bestaan dus $n(3n-4)$ hoofdraaklijnen van O^n, die l ontmoeten en waarvan de raakpunten in het vlak (Pr) liggen. De gezochte meetkundige plaats is dus van den graad $n(3n-4)$. Deze graad verandert niet als V door l gaat. Is O^n een kubisch oppervlak, dus $n=3$, dan is deze graad 15.

2. De klasse van de omhullende der buigraaklijnen is het aantal der buigraaklijnen van krommen p^3 die door een willekeurig punt Q van V gaan. Iedere buigraaklijn van een kromme p^3 gaande door het punt Q is de projectie van een hoofdraaklijn van O^3 die de lijnen PQ en l ontmoet. En omgekeerd projecteert zich iedere hoofdraaklijn van O^3 die l en PQ ontmoet, als een buigraaklijn van een kromme p^3, die door Q gaat, als tenminste P niet gelegen is op een hoofdraaklijn van O^3 die l ontmoet. De hoofdraaklijnen van O^3 vormen een congruentie van den graad 6 en van de klasse 9. De rechten die PQ en l ontmoeten vormen een congruentie (1, 1). Het aantal gemeenschappelijke stralen der beide congruenties is dus $9+6=15$, m. a. w. de omhullende der buigraaklijnen van de krommen p^3 is van de klasse 15.

Vraagstuk CLXVII.

M^2 9 e. De punten van een rationale ruimtekromme worden in de paren van een involutie gerangschikt. Deze puntenparen verbindt men door kubische ruimtekrommen met vier gegeven punten. Bepaal den graad van het door deze krommen gevormde oppervlak.

(Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. W. A. VERSLUYS *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

1. Wij zullen de doorsnede bepalen van het bedoelde oppervlak met het vlak α_4 dat drie der gegeven punten

A_1, A_2, A_3 bevat. Deze bestaat natuurlijk uit kegelsneden en rechten, als deelen van samengestelde kubische lijnen.

Is P' een der snijpunten van α_4 met de gegeven rationale ruimtekromme ρ^n, P'' het door de gegeven involutie aan P' toegevoegde punt en S het snijpunt van α_4 met de rechte die P'' met het vierde gegeven punt A_4 verbindt, dan behoort het samenstel van de rechte A_4P'' en de kegelsnede $A_1A_2A_3P'S$ tot de gevraagde meetkundige plaats. Deze heeft dus met α_4 reeds n kegelsneden gemeen.

2. De vlakken door A_3A_4 bepalen op ρ^n de groepen van een involutie van den graad n, welke met de gegeven involutie $(n-1)$ paren Q', Q'' gemeen heeft. Snijdt het vlak door A_3A_4 en $Q'Q''$ de rechte A_1A_2 in R, dan vormt de kegelsnede $A_3A_4Q'Q''R$ met A_1A_2 een lijn van het bedoelde oppervlak O. De rechte A_1A_2 is dus een $(n-1)$voudige rechte van O, en hetzelfde geldt voor de overige vijf rechten A_iA_k.

De doorsnede van O met α_4 bestaat derhalve uit drie $(n-1)$voudige rechten en n kegelsneden; O is bijgevolg een oppervlak van den graad $(5n-3)$.

3. Een rechte door A_1 en in α_4 snijdt O nog in $(2n-1)$ buiten A_1 gelegen punten; dus is A_1 een $(3n-2)$voudig punt.

Elk der punten A_k draagt drie $(n-1)$voudige rechten, $3n$ kegelsneden en n enkelvoudige rechten; de laatsten vormen elk met een der in het vlak α_k gelegen kegelsneden een kubische lijn.

Opmerking. Vervangt men de quadratische involutie door een kubische, dan vindt men, op overeenkomstige wijze, voor den graad van de meetkundige plaats der kubische ruimtekrommen, die de drietallen der involutie met drie vaste punten A verbinden, het getal $(5n-6)$ Het oppervlak heeft nu drie $(3n-4)$voudige punten, drie $(n-2)$voudige rechten, n kegelsneden en $6(n-1)$ enkelvoudige rechten.

Vraagstuk CLXVIII.

N° 1 1. De rechten van een kubisch regelvlak zijn gerangschikt in de paren van een involutie. Te onderzoeken de verzameling der transversalen dezer paren. (Dr. J. de Vries.)

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

1. Aan elke rechte van het gegeven regelvlak ρ^3 kan men de rechte toevoegen welke haar op de dubbellijn d snijdt; de daardoor bepaalde involutie heeft met de gegeven involutie een paar l_0, l_0' gemeen. Elke rechte door het snijpunt D_0 van l_0 en l_0' behoort tot den bedoelden stralencomplex; evenzoo elke rechte in hun verbindingsvlak δ_0. D_0 en δ_0 zijn dus een *hoofdpunt* en een *hoofdvlak* van den complex.

De beide dubbelstralen der gegeven involutie zijn assen van twee bijzondere lineaire complexen; deze zullen hier buiten beschouwing blijven.

Een vlak ϕ door de enkelvoudige richtlijn e snijdt ρ^3 nog in twee rechten l en m. Zijn l' en m' de rechten welke in de gegeven involutie met hen overeenkomen, dan behooren tot den complex alle stralen van ϕ, die een der doorgangen van l' en m' bevatten. De in ϕ gelegen complexstralen vormen dus twee waaiers, zoodat de *complex quadratisch* is [1]).

2. De doorsnede van ρ^3 met een willekeurig vlak ϕ is een kubische kromme met dubbelpunt D op d. De in ϕ gelegen complexstralen omhullen een kegelsnede ϕ^2 die δ_0 aanraakt; de raaklijnen welke zij door D zendt, verbinden de beide in D gelegen doorgangen van beschrijvende lijnen met de doorgangen der toegevoegde rechten.

Gaat ϕ door D_0 dan liggen in D_0 de doorgangen der aan elkaar toegevoegde rechten l_0 en l_0'; dus is D_0 de top van een waaier van complexstralen en de *complexkegelsnede ontaardt in twee waaiers.*

Dit geschiedt ook als ϕ door een rechte l gaat. Dan is de doorgang van l' de top van een der waaiers; de andere top is het centrum der involutie, welke de rechten van ρ^3 op de door ϕ ingesneden kegelsnede bepalen; hij ligt blijkbaar in δ_0. Elk raakvlak van ρ^3 is dus een *singulier vlak.*

3. De complexstralen door een punt P vormen natuurlijk een quadratischen kegel, die door D_0 gaat. Deze ontaardt in

---

[1]) Deze complex blijkt reeds door Weiler (Zeitschr. f. M. u. Ph., 27, bl 276) gevonden te zijn. Zie Sturm, Liniengeometrie. III, bl. 432.

twee concentrische waaiers, wanneer P op ρ^3, dus op een rechte l ligt. Een der waaiers bestaat dan uit de stralen door P naar l'.

Verder ontaardt de kegel als P in het hoofdvlak δ_0 ligt. Het *singuliere oppervlak* bestaat dus uit ρ^3 en δ_0. De complex is in zich zelf duaal, daar dit met ρ^3 het geval is. Hij bezit vier dubbelstralen, n.l. de rechten d, e, l_0, l'_0; deze zijn toch singulier voor elk hunner punten en vlakken.

Vraagstuk CLXIX.

B 4 g. Men beschouwt de beide stralenparen, die met betrekking tot de rechthoekige assen OX_1 en OX_2 bepaald worden door de vergelijkingen

$$a_{20}x_1^2 + 2a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 = 0 \text{ en } f_{20}x_1^2 + 2f_{11}x_1x_2 + f_{02}x_2^2 = 0.$$

Welke is de meetkundige beteekenis der voorwaarde

$$a_{20}f_{20} + 2a_{11}f_{11} + a_{02}f_{02} = 0.$$

(Dr. J. de Vries.)

Opgelost *door* C. van Aller, J. van de Griend Jr., Dr. J. G. Rutgers, Dr. F. Schuh *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. F. Schuh.

De loodlijnen in O op het stralenpaar

$$f_{20}x_1^2 + 2f_{11}x_1x_2 + f_{02}x_2^2 = 0$$

worden voorgesteld door de vergelijking

$$B \equiv b_{20}x_1^2 + 2b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 = 0,$$

waarin

$$b_{20} = f_{02}, \qquad b_{11} = -f_{11}, \qquad b_{02} = f_{20}$$

is. De gegeven voorwaarde kan dus vervangen worden door

$$\Delta \equiv a_{20}b_{02} - 2a_{11}b_{11} + a_{02}b_{20} = 0.$$

Nu is, zooals gemakkelijk is aan te toonen, Δ een simultane invariant der beide quadratische vormen

$$A \equiv a_{20}x_1^2 + 2a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 \text{ en } B.$$

De voorwaarde $\Delta = 0$ stelt dus een betrekking tusschen de

stralenparen $A = 0$ en $B = 0$ voor, die bestand is tegen projectieve transformatie. De beteekenis dier voorwaarde kan men vinden door het assenstelsel bijzonder te kiezen. Nemen we de assen langs de stralen van $A = 0$, dan wordt de vergelijking van dit stralenpaar

$$2a_{11}x_1x_2 = 0.$$

Nu gaat de voorwaarde $A = 0$ over in

$$-\ 2a_{11}b_{11} = 0,$$

zoodat het stralenpaar $B = 0$ tot vergelijking heeft

$$b_{20}x_1^2 + b_{02}x_2^2 = 0.$$

Hieruit leest men af, dat de stralenparen $A = 0$ en $B = 0$ elkaar harmonisch scheiden.

Hieruit volgt dan verder dat de voorwaarde

$$a_{20}f_{20} + 2a_{11}f_{11} + a_{02}f_{02} = 0$$

voor de stralenparen

$a_{20}x_1^2 + 2a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 = 0$ en $f_{20}x_1^2 + 2f_{11}x_1x_2 + f_{02}x_2^2 = 0$

beteekent dat het eene paar harmonisch gescheiden wordt door de loodlijnen op het andere paar.

Vraagstuk CLXX.

M' 5 h. Men vraagt aan te toonen dat een vlakke kubische kromme kan voorgesteld worden door de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_1 & x & yz \\ y_1 & y & zx \\ z_1 & z & xy \end{vmatrix} = 0,$$

waarin x_1, y_1, z_1 de coördinaten zijn van een willekeurig punt dier kromme. (C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, H. B. BONE JR., W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, Dr. F. SCHUH, Dr. C. STOLP *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

De kubische kromme, die door de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = 0$$

wordt voorgesteld, is bestand tegen de quadratische transformatie $xx' = yy' = zz'$. Zij gaat door de invariante punten $x^2 = y^2 = z^2$, welke een vierhoek vormen, waarvan de nevenhoekpunten ook op de kromme liggen en tevens hoekpunten van den coördinatendriehoek zijn.

Uit de vergelijking blijkt terstond dat de kromme de meetkundige plaats is van de door de transformatie gekoppelde puntenparen waarvan de verbindingslijn door het punt P_1 (x_1, y_1, z_1) gaat. Derhalve is P_1 het tangentiaalpunt der vier invariante punten, kan dus nooit een buigpunt wezen, terwijl de kromme geen singulier punt kan hebben.

Is nu een kubische kromme van het geslacht één gegeven, dan kan men, met uitsluiting van haar buigpunten, voor P_1 een willekeurig op haar gelegen punt nemen. Kiest men dan als coördinatendriehoek den diagonaaldriehoek van den vierhoek der antitangentiaalpunten van P_1, dan kan de kromme door een vergelijking van den voorgeschreven vorm aangewezen worden.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

1. De kubische kromme voorgesteld door de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_1 & x & yz \\ y_1 & y & zx \\ z_1 & z & xy \end{vmatrix} = 0$$

gaat door de hoekpunten A, B, C van den coördinatendriehoek, door het punt $P(x_1, y_1, z_1)$ en door het punt $P'(y_1z_1, z_1x_1, x_1y_1)$. Het punt P' is bepaald als P niet in een der hoekpunten van

den coördinatendriehoek ligt. Voor $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ b.v. is P' een willekeurig punt op de as $x = 0$, terwijl de kromme in de lijn BC ($x = 0$) en twee door A gaande rechten ($y^2 = z^2$) ontaardt; dit geval sluiten we in het volgende uit

De vergelijking der raaklijn in het punt A (1, 0, 0) is $y_1 y - z_1 z = 0$.

Deze raaklijn gaat dus door P' en hetzelfde geldt natuurlijk voor de raaklijnen in B en C.

De coördinaten van een punt der lijn PP' zijn $\lambda x_1 + \mu y_1 z_1$, $\lambda y_1 + \mu z_1 x_1$, $\lambda z_1 + \mu x_1 y_1$; de snijpunten van PP' met de kromme worden gevonden uit

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda x_1 + \mu y_1 z_1 & (\lambda y_1 + \mu z_1 x_1)(\lambda z_1 + \mu x_1 y_1) \\ y_1 & \lambda y_1 + \mu z_1 x_1 & (\lambda z_1 + \mu x_1 y_1)(\lambda x_1 + \mu y_1 z_1) \\ z_1 & \lambda z_1 + \mu x_1 y_1 & (\lambda x_1 + \mu y_1 z_1)(\lambda y_1 + \mu z_1 x_1) \end{vmatrix} = 0,$$

dus uit

$$\begin{vmatrix} x_1 & \mu y_1 z_1 & \lambda\mu x_1 (y_1^2 + z_1^2) \\ y_1 & \mu z_1 x_1 & \lambda\mu y_1 (z_1^2 + x_1^2) \\ z_1 & \mu x_1 y_1 & \lambda\mu z_1 (x_1^2 + y_1^2) \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$(y_1^2 - z_1^2)(z_1^2 - x_1^2)(x_1^2 - y_1^2)\lambda\mu^2 = 0.$$

Hieruit blijkt, dat de raaklijn in P door P' gaat. Zijn echter twee der drie grootheden x_1^2, y_1^2, z_1^2 onderling gelijk, b.v. $y_1^2 = z_1^2$, dan wordt aan de laatste vergelijking door alle waarden van λ en μ voldaan, zoodat dan PP' tot de kromme behoort. We zullen daarom x_1^2, y_1^2 en z_1^2 onderling verschillend onderstellen.

Men vindt gemakkelijk, dat in deze onderstelling A, B, C en P geen dubbelpunten der kromme zijn, zoodat uit het punt P' vier eigenlijke raaklijnen P'A, P'B, P'C en P'P aan de kromme kunnen getrokken worden, welke dus van de zesde klasse is. Daar P en P' blijkens de gemaakte onderstelling verschillen, vallen niet meer dan twee snijpunten met PP' in P samen, zoodat P geen buigpunt der kromme is. De in de opgave bedoelde eigenschap geldt dus niet voor iedere kubische kromme en niet voor ieder punt (x_1, y_1, z_1) op zulk eene kromme.

2. Is eene kubische kromme van het geslacht één en P geen

van haar buigpunten, dan kan, zooals blijken zal, haar vergelijking in den verlangden vorm gebracht worden. De raaklijn in P snijdt de kromme dan in een van P verschillend punt P'. Uit P' kunnen, behalve PP', nog drie raaklijnen aan de kromme getrokken worden; hun raakpunten noemen we A, B, en C. Deze punten nemen we nu als hoekpunten van den coördinatendriehoek, terwijl we het eenheidspunt (1, 1, 1) zoo kunnen kiezen, dat, als x_1, y_1, z_1 de coördinaten van P zijn, de coördinaten van P' door y_1z_1, z_1x_1, x_1y_1 worden voorgesteld. Ligt P niet op een der zijden van den coördinatendriehoek (m a. w. is P geen sextactisch punt der kromme), en zijn ξ_1, η_1, ζ_1 en ξ_1', η_1', ζ_1' de verhoudingsgetallen der afstanden van P en P' tot de zijden van dien driehoek, dan heeft men dus als eenheidspunt een punt te kiezen, waarvan de verhoudingsgetallen der afstanden tot die zijden $\sqrt{\xi_1\xi_1'}$, $\sqrt{\eta_1\eta_1'}$, $\sqrt{\zeta_1\zeta_1'}$ zijn. Daar men telkens zoowel den eenen als den anderen wortel kiezen kan, krijgt men vier punten R, die men als eenheidspunt nemen kan; zij liggen ieder in een der vier deelen, waarin het vlak door de zijden van den coördinatendriehoek verdeeld wordt. De rechte die een hoekpunt A van den coördinatendriehoek met een der vier punten R verbindt, gaat nog door een tweede punt R, zoodat door A twee zulke verbindingslijnen gaan; deze liggen harmonisch zoowel ten opzichte van AB en AC als ten opzichte van AP en AP' en zijn dus de dubbelstralen der involutie, die door de stralenparen AB, AC en AP, AP' wordt bepaald. Hiermede zijn de verbindingslijnen der vier punten R aangewezen, dus ook de punten R zelf.

3. Het is nu gemakkelijk aan te toonen, dat bij deze keus van het coördinatenstelsel de vergelijking der kromme den verlangden vorm aanneemt. De vergelijking van een kubische kromme door de hoekpunten A, B, C van den coördinatendriehoek, waarvan de raaklijnen in A, B en C door

$$P'(y_1z_1,\ z_1x_1,\ x_1y_1)$$

gaan, heeft den vorm

$$ax^2(yy_1 - zz_1) + by^2(zz_1 - xx_1) + cz^2(xx_1 - yy_1) + dxyz = 0.$$

De voorwaarde, dat de kromme door P' gaat, vordert $d = 0$, zoodat de voorwaarde, dat P op de kromme ligt, overgaat in

$$ax_1^2(y_1^2 - z_1^2) + by_1^2(z_1^2 - x_1^2) + cz_1^2(x_1^2 - y_1^2) = 0. \quad . \quad (\alpha)$$

De vergelijking der raaklijn in P is

$$a\{2xx_1(y_1^2-z_1^2)+x_1^2(yy_1-zz_1)\}+b\{2yy_1(z_1^2-x_1^2)+y_1^2(zz_1-xx_1)\}+$$
$$+c\{2zz_1(x_1^2-y_1^2)+z_1^2(xx_1-yy_1)\}=0.$$

Deze gaat door P′ als voldaan is aan

$$a(y_1^2-z_1^2)+b(z_1^2-x_1^2)+c(x_1^2-y_1^2)=0 \quad \ldots\ldots (\beta)$$

Uit de vergelijkingen (α) en (β) volgt, daar we x_1^2, y_1^2 en z_1^2 verschillend ondersteld hebben, $a=b=c$, zoodat in verband met $d=0$, de vergelijking der kromme overgaat in

$$xx_1(y^2-z^2)+yy_1(z^2-x^2)+zz_1(x^2-y^2)=0.$$

Hiervoor kan men schrijven

$$\begin{vmatrix} x_1 & x & yz \\ y_1 & y & zx \\ z_1 & z & xy \end{vmatrix}=0.$$

4. Uit de vergelijking der kromme leidt men gemakkelijk af, dat ze de vier punten (1, 1, 1), (— 1, 1, 1), (1, — 1, 1) en (1, 1, — 1) bevat, die men als eenheidspunt kan kiezen, en verder dat de raaklijnen in die punten door P gaan. Hierdoor krijgen de punten R ook voor het geval, dat P een *sextactisch punt* is en dus op een zijde van den coördinatendriehoek ligt, een eenvoudige beteekenis.

Vraagstuk CLXXI.

M¹ 5 k. Als men uit een punt D in het vlak van een gegeven driehoek loodlijnen neerlaat op de zijden van dien driehoek, worden deze elk in twee stukken verdeeld. Onderzoek de meetkundige plaats van het punt D, waarvoor het produkt van drie niet aan elkaar grenzende stukken gelijk is aan het produkt der overige drie.

(C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, H. B. BONE JR, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, Dr. F. SCHUH, Dr. C STOLP, Dr. A. TOXOPEUS, H. J. VAN VEEN *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* W. H. L. JANSSEN VAN RAAY.

Men kan met betrekking tot de beide producten twee onderstellingen maken, en er zijn voor het punt D dan ook twee verschillende meetkundige plaatsen aan te wijzen, naarmate de voetpunten der loodlijnen, uit D op de zijden van den driehoek neergelaten, in eene rechte lijn liggen, of wel, met de overstaande hoekpunten verbonden, lijnen geven, die door één punt gaan; anders gezegd, naarmate op die voetpunten het theorema van *Ceva* of dat van *Menelaus* toepasselijk is.

I. *De voetpunten liggen overeenkomstig het theorema van Ceva.* Voor het geval, dat de voetpunten in eene rechte lijn liggen, is de meetkundige plaats reeds bekend, en omdat bovendien de uitkomst, in verband met het voorafgaande vraagstuk, tot het vermoeden noopt, dat bij de opgave in de eerste plaats gedacht is aan voetpunten, die overeenkomstig het theorema van *Ceva* gelegen zijn, zal dit laatste geval thans het eerst beschouwd worden.

Kiest men den driehoek ABC tot assendriehoek, en laat men uit het punt D de loodlijnen x, y en z op de zijden BC, CA, en AB neer, dan zijn de segmenten van deze zijden, te beginnen bij het punt C, en gaande over het punt B, achtereenvolgens gelijk aan

$$y \operatorname{cosec} C + x \cot C, \quad z \operatorname{cosec} B + x \cot B, \quad x \operatorname{cosec} B + z \cot B,$$

$$y \operatorname{cosec} A + z \cot A, \quad z \operatorname{cosec} A + y \cot A, \quad x \operatorname{cosec} C + y \cot C,$$

zoodat de gevraagde meetkundige plaats wordt voorgesteld door de vergelijking

$$(y \operatorname{cosec} C + x \cot C)(x \operatorname{cosec} B + z \cot B)(z \operatorname{cosec} A + y \cot A) =$$

$$= (z \operatorname{cosec} B + x \cot B)(y \operatorname{cosec} A + z \cot A)(x \operatorname{cosec} C + y \cot C) \ldots 1)$$

of, na vermenigvuldiging van de beide leden met sin A sin B sin C, door

$$(y + x \cos C)(x + z \cos B)(z + y \cos A) =$$

$$= (z + x \cos B)(y + z \cos A)(x + y \cos C) \ldots\ldots 2)$$

of eindelijk in determinantvorm, overeenkomstig het vorige vraagstuk, door

$$\begin{vmatrix} \cos A - \cos B \cos C & x & yz \\ \cos B - \cos C \cos A & y & zx \\ \cos C - \cos A \cos B & z & xy \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; 3)$$

De gezochte kromme is dus van den derden graad, gaat door de drie hoekpunten en bevat uit den aard der zaak hun tegenpunten op den omgeschreven cirkel, de middelpunten der in-, aan- en omgeschreven cirkels, benevens het hoogtepunt. Dat zij verder de loodlijnen op de middens der zijden tot asymptoten heeft blijkt op de volgende wijzen.

a. Noemt men de segmenten der zijden a_1 en a_2, b_1 en b_2, c_1 en c_2, dan kan de gestelde voorwaarde vervangen worden door

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

Ligt nu het punt D op grooten afstand van den driehoek, dan moet toch een der voetpunten op eene zijde liggen, de beide anderen daarentegen op het verlengde eener zijde; stel dat het eerste geval zich bij de zijde a voordoet, dan kan voor de betrekking (4) geschreven worden

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_2 \pm b}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_1 \pm c} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

zoodat, als de segmenten, behoorende bij de zijden b en c oneindig groot worden,

$$a_1 = a_2.$$

De loodlijn op het midden van a is dus een asymptoot; evenzoo zijn dit de beide andere middelloodlijnen.

b. De middelloodlijn van BC heeft tot vergelijking

$$y \sin B - z \sin C + x \sin (B - C) = 0. \quad . \; . \; . \; 6)$$

In verband met de betrekking

$$y \sin B + z \sin C + x \sin (B + C) = \frac{I}{R} \quad . \; . \; . \; 7)$$

waarin I den inhoud van den assendriehoek en R den straal van den daarom beschreven cirkel voorstelt, volgt daaruit voor elk punt dier loodlijn

$$y + x \cos C = \frac{I}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

en

$$z + x \cos B = \frac{I}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Ter bepaling van hare snijpunten met de kubische kromme voorgesteld door de vergelijking (2) heeft men dus de betrekking

$$\sin C\,(x + z \cos B)(z + y \cos A) = \sin B\,(y + z \cos A)(x + y \cos C) \quad . \quad . \quad 10)$$

Daar deze vergelijking nog slechts van den tweeden graad is, ligt een der snijpunten op oneindigen afstand, zoodat de beschouwde loodlijn in ieder geval met eene asymptoot evenwijdig is. Door vervolgens y uit de verg. (8), z uit de verg. (9) op te lossen en de daarvoor verkregen uitdrukkingen in (10) te substitueeren, verkrijgt men eene vergelijking in x, die van den eersten graad is, zoodat de loodlijn met de kromme nog een tweede punt op oneindigen afstand gemeen heeft, dus eene asymptoot is. De waarde $x = R \cos A$, die ten slotte overblijft, wijst het middelpunt M van den omgeschreven cirkel aan. Daar M het tangentiaalpunt der drie oneindig ver gelegen punten is, moet het een buigpunt wezen. Daar verder de harmonische poollijn van dit buigpunt oneindig ver ligt, is M tevens middelpunt der kromme.

Opmerkingen. 1. De elementen der eerste kolom van den determinant (3) moeten volgens het voorafgaande vraagstuk evenredig zijn met de coördinaten van een punt der kromme. Dit is het hoogtepunt van den driehoek, die ontstaat als door de hoekpunten van den gegeven driehoek lijnen evenwijdig met de zijden worden getrokken; de afstanden van dat hoogtepunt tot deze zijden worden verkregen door de bedoelde elementen van den determinant te vermenigvuldigen met 2R.

2. Wanneer de driehoek gelijkbeenig, dus b.v. $b = c$ en $B = C$ is, dan gaat de vergelijking (3), als men in den

determinant de onderste rij met de voorafgaande vermindert, over in

$$\begin{vmatrix} \cos A - \cos B \cos C & x & yz \\ \cos B - \cos C \cos A & y & zx \\ 0 & -(y-z) & x(y-z) \end{vmatrix} = 0 \ldots 11)$$

valt dus uiteen in de twee vergelijkingen

$$y - z = 0 \ldots\ldots\ldots 12)$$

$$\begin{vmatrix} \cos A - \cos B \cos C & x & yz \\ \cos B - \cos C \cos A & y & zx \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0 \ldots 13)$$

zoodat de kromme uiteenvalt in de hoogtelijn van den gelijkbeenigen driehoek en eene hyperbool.

Is de driehoek gelijkzijdig, dan bestaat de meetkundige plaats enkel uit de drie, onbepaald verlengde, hoogtelijnen.

II. *De voetpunten der loodlijnen liggen in eene rechte lijn.* Men weet dat de gevraagde meetkundige plaats in dit geval de omgeschreven cirkel van den driehoek is (zie bijvoorbeeld *Casey*, *Sequel to Euclid*, blz. 34 of *Rouché* et *de Comberousse*, *Traité de géometrie*, 1891, I, blz. 97.) In verband met het voorgaande blijkt dit analytisch als volgt.

De reeds gevonden uitdrukkingen voor de segmenten der zijden blijven dezelfden behoudens sommige veranderingen in de teekens. Dit laatste heeft ten gevolge dat men nu eene derdegraadsvergelijking vindt, die uiteen valt in de beide volgenden:

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C = 0 \ldots\ldots 14)$$

$$yz \sin A + zx \sin B + xy \sin C = 0 \ldots\ldots 15)$$

Hiervan stelt de eerste de lijn in het oneindige voor, de tweede den omgeschreven cirkel.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp:

1. Tot de meetkundige plaats behoort vooreerst het middelpunt O van den om driehoek ABC beschreven cirkel, daar het

zich op de zijden in de middens daarvan projecteert. Zijn nu D en D′ twee punten, die symmetrisch liggen ten opzichte van O, dan zijn ook de projecties van D en D′ op elke zijde van den driehoek symmetrisch gelegen ten opzichte van het midden dier zijde. Zijn verder A_1, B_1, C_1 de projecties van D op BC, CA, AB en A_1', B_1', C_1' de overeenkomstige projecties van D′, dan verdeelen de projecties van D en D′ op ééne zijde die zijde in omgekeerde reden. Stellen wij namelijk

$$CA_1 = \lambda BA_1, \quad AB_1 = \mu CB_1, \quad BC_1 = \nu AC_1 \quad \ldots\ldots \quad 1).$$

dan is $CA_1' = BA_1' : \lambda$, enz., zoodat

$$\frac{CA_1}{BA_1} \times \frac{AB_1}{CB_1} \times \frac{BC_1}{AC_1} = \lambda\mu\nu \text{ en } \frac{CA_1'}{BA_1'} \times \frac{AB_1'}{CB_1'} \times \frac{BC_1'}{AC_1'} = \frac{1}{\lambda\mu\nu}.$$

Zal nu een der punten D of D′ tot de meetkundige plaats behooren, dan moet het product van drie aan elkaar grenzende stukken gelijk zijn aan dat der overige drie, dus zal men moeten hebben

$$\lambda\mu\nu = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Het blijkt nu, dat D en D′ slechts gelijktijdig aan deze voorwaarde kunnen voldoen en dat de gezochte kromme bijgevolg O tot middelpunt heeft.

Wanneer de punten D en D′ der kromme in 't oneindige komen, wordt de rechte OD asymptoot. Van de drie projecties van D moeten er nu minstens twee op oneindigen afstand liggen, zoodat ook minstens twee van de drie verhoudingen λ, μ, ν de waarde -1 moeten hebben. Maar dan heeft volgens 2) de derde verhouding de waarde $+1$, zoodat de projectie van D op de derde zijde het midden dier zijde is. Hieruit volgt onmiddellijk, dat de asymptoten der kromme de zijden des driehoeks rechthoekig middendoor deelen.

2. Ten einde tot de vergelijking der kromme in afstandscoördinaten te geraken, zullen wij beginnen met λ, μ, ν uit te drukken in de afstanden $DA_1 = x$, $DB_1 = y$, $DC_1 = z$ van een punt D tot de zijden des driehoeks. Daartoe laten wij uit A_1 de loodlijnen A_1E en A_1F neer op AB en AC, waardoor de hoeken $DA_1E = B$, en $DA_1F = C$ verkregen worden. Beschouwt men A_1E beurtelings als zijde van driehoek A_1BE en

als zijde van het rechthoekig trapezium A_1EC_1D, dan vindt men door gelijkstelling der waarden van A_1E

$$BA_1 \sin B = z + x \cos B.$$

Op gelijke wijze handelende met A_1F krijgt men

$$CA_1 \sin C = y + x \cos C,$$

en wordt

$$\lambda = CA_1 : BA_1 = (y + x \cos C) \sin B : (z + x \cos B) \sin C.$$

De overeenkomstige uitdrukkingen voor μ en ν worden door cyclische permutatie van letters verkregen.

Door de waarden van λ, μ, ν in 2) te substitueeren kan men natuurlijk de vergelijking der kromme verkrijgen. Alvorens hiertoe over te gaan, willen wij de verkregen vergelijkingen afzonderlijk in oogenschouw nemen. Zonder breuken kan men ze aldus schrijven

$$\left.\begin{aligned} (y + x \cos C) \sin B &= \lambda (z + x \cos B) \sin C, \\ (z + y \cos A) \sin C &= \mu (x + y \cos C) \sin A, \\ (x + z \cos B) \sin A &= \nu (y + z \cos A) \sin B. \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \; 3)$$

Beschouwt men λ, μ, ν als willekeurige standvastigen, dan stellen de vergelijkingen rechten voor, die de zijden BC, CA, AB rechthoekig in gegeven verhouding verdeelen. Ze gaan over in die der asymptoten, als men de verhoudingen $= 1$ stelt. Op nul herleid worden ze in dit bijzondere geval

$$\left.\begin{aligned} U &\equiv x \sin (B - C) + y \sin B - z \sin C = 0, \\ V &\equiv - x \sin A + y \sin (C - A) + z \sin C = 0, \\ W &\equiv x \sin A - y \sin B + z \sin (A - B) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \; 4)$$

In verband met de lijn in het oneindige

$$T \equiv x \sin A + y \sin B + z \sin C = 0. \quad \ldots . \; 5)$$

geven zij de punten in 't oneindige $(-1, \cos C, \cos B)$, enz. Stelt men nog

$$U + V + W \equiv D, \quad \ldots \ldots . \; 6)$$

dan vindt men door optelling van de drie vergelijkingen 4)

$$D \equiv x \sin (B - C) + y \sin (C - A) + z \sin (A - B) = 0,$$

d. i. de vergelijking van de bekende middellijn van *Brocard*, welke hier vermeld wordt wegens de beteekenis, die hij voor onze kromme bezit.

3. Na deze uitweiding gaan we er toe over, de vergelijking der kromme in verschillende gedaanten af te leiden. De vermenigvuldiging van de vergelijkingen 3) geeft in verband met 2)

$$(y + x \cos C)(z + y \cos A)(x + z \cos B) =$$
$$= (z + x \cos B)(x + y \cos C)(y + z \cos A) \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Deze vergelijking kan bij behoorlijke samenvoeging der termen aldus geschreven worden

$$(\cos A - \cos B \cos C)\, x (y^2 - z^2) + (\cos B - \cos C \cos A)\, y (z^2 - x^2) +$$
$$+ (\cos C - \cos A \cos B)\, z (x^2 - y^2) = 0.$$

Alvorens deze in determinantenvorm te brengen, willen wij de beteekenis nagaan van de goniometrische uitdrukkingen, die in de vergelijking voorkomen. Na vermenigvuldiging met de middellijn 2R des omgeschreven cirkels stellen zij de afstanden van zeker punt H_1 tot de zijden des driehoeks voor en wel $x_1 = 2R (\cos A - \cos B \cos C)$ den afstand tot BC. De afstand x_2 van het hoogtepunt H tot dezelfde zijde is $2R \cos B \cos C$; derhalve is $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = R \cos A$, d. i. de afstand van O tot BC. Zoo voortgaande besluit men, dat H_1 het punt der kromme is, dat diametraal tegenover H ligt. De coördinaten van H_1 (x_1, y_1, z_1) invoerende kan men de vergelijking ook in dezen vorm schrijven (zie het vorige vraagstuk)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0.$$

Van de kromme, die blijkbaar door de hoekpunten van den driehoek ABC gaat, kan nu ook deze bepaling gegeven worden, dat zij is de meetkundige plaats der isogonaal toegevoegde punten $P(x, y, z)$, $P'(yz, zx, xy)$, welke met H_1 op één rechte liggen.

4. In een geheel anderen vorm vindt men de vergelijking der kromme op de volgende wijze. Men stelle

$$\lambda = \frac{1-l}{1+l},\ \mu = \frac{1-m}{1+m},\ \nu = \frac{1-n}{1+n}$$

en substitueere deze waarden in 3), waardoor men zal vinden

$$x \sin(B-C) + y \sin B - z \sin C = l.(x \sin A + y \sin B + z \sin C),$$

enz. of in symbolischen vorm, naar 4) en 5),

$$U = lT,\ V = mT,\ W = nT.$$

Voor de vergelijking 2), die overgaat in

$$\frac{1-l}{1+l} \cdot \frac{1-m}{1+m} \cdot \frac{1-n}{1+n} = 1,$$

kan men na herleiding schrijven

$$lmn + l + m + n = 0$$

en de eliminatie van l, m, n levert, met gebruikmaking van 6), de volgende vergelijking op

$$UVW + DT^2 = 0.$$

Uit deze vergelijking blijkt niet alleen, dat $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ de asymptoten der kromme zijn, maar ook, dat de diameter van *Brocard* $D = 0$ de kromme in het buigpunt (middelpunt) O raakt. Hieraan kan een tweede opmerking vastgeknoopt worden. De isogonaal toegevoegde van de kromme is de kromme zelve, die van den diameter van *Brocard* is de hyperbool van *Kiepert*, het aan O isogonaal toegevoegde punt is het punt H. Derhalve heeft de kromme met de hyperbool van *Kiepert* in het hoogtepunt een *driepuntige aanraking*.

Opmerkingen. I. Vervangt men de voorwaarde 2) door $\lambda\mu\nu = k$, waarin k een willekeurige standvastige beteekent, dan krijgt men in plaats van 7) de vergelijking van een bundel

$$(y + x \cos C)(z + y \cos A)(x + z \cos B) -$$
$$- k(z + x \cos B)(x + y \cos C)(y + z \cos A) = 0.$$

Van de negen basispunten liggen er zes op den omgeschreven cirkel, namelijk de hoekpunten A, B, C en de diametraal er tegenover liggende punten A′, B′, C′; de overige drie zijn de aan A′, B′, C′ isogonaal toegevoegde punten, die in het oneindige liggen.

Bijzondere waarden van k zijn, behalve de reeds behandelde waarde $k = 1$, de waarden 0, ∞, -1.

Voor $k = 0$ en $k = \infty$ vindt men drie rechten. In het geval $k = -1$ laat zich het eerste lid der laatste vergelijking[1]) in twee factoren splitsen, die afzonderlijk gelijk aan nul gesteld, de lijn in het oneindige en den omgeschreven cirkel van driehoek ABC opleveren. Deze uitkomst was te voorzien; want voor punten op oneindigen afstand is in 't algemeen $\lambda = \mu = \nu = -1$ en dus $\lambda\mu\nu = -1$, terwijl voor punten van den omgeschreven cirkel hetzelfde product de waarde -1 heeft, omdat de projecties van D op één rechte (lijn van *Wallace*) liggen.

II. De meetkundige beteekenis der voorwaarde $\lambda\mu\nu = 1$ is, dat de rechten AA_1, BB_1, CC_1 elkaar in één punt S snijden (*Ceva*). Aan elk punt D van de kubische kromme (D) van ons vraagstuk beantwoordt dus een punt S eener tweede kubische kromme (S) en met twee diametraal tegenover elkaar gelegen punten D en D′ der eerste komen twee isotoom toegevoegde punten S en S′ der tweede kromme overeen. Stelt men $\lambda = \frac{\eta}{\zeta}$, $\mu = \frac{\zeta}{\xi}$, $\nu = \frac{\xi}{\eta}$, dan komt dit eenvoudig neer op de invoering van de barycentrische coördinaten van het punt S. Door ze in te voeren in de vergelijkingen 3), zal men deze aldus kunnen schrijven

$$x(\eta \cot B - \zeta \cot C) - y(\zeta \operatorname{cosec} C) + z(\eta \operatorname{cosec} B) = 0,$$

enz. Men kan nu verder x, y en z elimineeren en krijgt dan de vergelijking der kromme (S) allereerst in dezen vorm

---

1) Aan de vergelijking kan men dan deze gedaanten geven:

$$2xyz(1 + \cos A \cos B \cos C) + x(y^2 + z^2)\sin B \sin C + y(z^2 + x^2)\sin C \sin A + z(x^2 + y^2)\sin A \sin B = 0, \qquad (VW + WU + UV)T + T^2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \eta \cot B - \zeta \cot C & -\zeta \operatorname{cosec} C & \eta \operatorname{cosec} B \\ \zeta \operatorname{cosec} C & \zeta \cot C - \xi \cot A & -\xi \operatorname{cosec} A \\ -\eta \operatorname{cosec} B & \xi \operatorname{cosec} A & \xi \cot A - \eta \cot B \end{vmatrix} = 0.$$

Door gepaste herleidingen, die hier achterwege moeten blijven, kan aan de laatste vergelijking een eenvoudige gedaante gegeven worden. Met verandering van ζ, η, ξ in x, y, z wordt zij ten slotte

$$\begin{vmatrix} \cot A & \cot B & \cot C \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0.$$

Men houde in het oog, dat x, y en z hier barycentrische coördinaten zijn, zoodat men voor het hoogtepunt H heeft

$$x : y : z = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C$$

en voor het isotoom daaraan toegevoegde punt H_0

$$x : y : z = \cot A : \cot B : \cot C.$$

In verband hiermede kan men van de kubische kromme (S) zeggen, dat zij is de meetkundige plaats der isotoom verwante puntenparen, welke met H_0, het zoogenaamde reciproke punt van het orthocentrum, op één rechte liggen.

Vraagstuk CLXXII.

K 7 d. Gegeven zijn de homogene coördinaten a_k, b_k, c_k, d_k ($k = 1, 2, 3$) van vier punten. Bepaal de vergelijkingen van de verbindingslijnen der diagonaalpunten van den volledigen vierhoek, welke de gegeven punten tot hoekpunten heeft. (C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, T. J. ALLERSMA *en* Dr. F. SCHUH.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

Zij A het snijpunt van ad met bc, B het snijpunt van ac met bd en C het snijpunt van ab met cd. De vergelijking van ad is

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

of in afgekorten vorm,

$$(xad) = 0.$$

De vergelijking van bc is

$$(xbc) = 0,$$

zoodat voor de vergelijking van AB geschreven kan worden

$$(xad) + \lambda\,(xbc) = 0,$$

waarin λ zoo bepaald moet worden, dat de lijn door het snijpunt B van ac en bd gaat. De voorwaarde, dat de lijnen

$$(xad) + \lambda\,(xbc) = 0,\ (xac) = 0 \text{ en } (xbd) = 0,$$

door één punt gaan, is

$$\begin{vmatrix} a_2d_3 - a_3d_2\,,\ a_3d_1 - a_1d_3\,,\ a_1d_2 - a_2d_1 \\ a_2c_3 - a_3c_2\,,\ a_3c_1 - a_1c_3\,,\ a_1c_2 - a_2c_1 \\ b_2d_3 - b_3d_2\,,\ b_3d_1 - b_1d_3\,,\ b_1d_2 - b_2d_1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} b_2c_3 - b_3c_2\,,\ b_3c_1 - b_1c_3\,,\ b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_2c_3 - a_3c_2\,,\ a_3c_1 - a_1c_3\,,\ a_1c_2 - a_2c_1 \\ b_2d_3 - b_3d_2\,,\ b_3d_1 - b_1d_3\,,\ b_1d_2 - b_2d_1 \end{vmatrix} = 0,$$

waarvoor we ter afkorting schrijven:

$$\Delta_1 + \lambda\Delta_2 = 0.$$

De voorwaarde $\Delta_1 = 0$ beteekent, dat de lijnen ad, ac en bd door één punt gaan. Daaraan is voldaan als a, b en d op één rechte liggen, dus als $(abd) = 0$ is, en ook als a, c en d op één rechte liggen, dus als $(acd) = 0$ is. Hieruit blijkt, dat Δ_1 het product van (abd) en (acd) met een getallenfactor is. Door één term van Δ_1 met den overeenkomstigen term van $(abd)\,(acd)$ te vergelijken, blijkt dat die getallenfactor -1 is, waaruit volgt

$$\Delta_1 = -\,(abd)\,(acd).$$

Evenzoo vindt men

$$\Delta_2 = (abc)\,(bcd),$$

waaruit volgt

$$\lambda = \frac{(abd)\,(acd)}{(abc)\,(bcd)}.$$

De vergelijking van de rechte AB wordt dus

$$(xad)\,(abc)\,(dbc) + (xbc)\,(bad)\,(cad) = 0.$$

Ook kan die vergelijking in den volgenden vorm geschreven worden

$$(xac)\,(abd)\,(cbd) + (xbd)\,(bac)\,(dac) = 0.$$

Voor de vergelijking der rechte BC vindt men evenzoo:

$$(xac)\,(adb)\,(cdb) + (xdb)\,(dac)\,(bac) = 0,$$

of:

$$(xab)\,(adc)\,(bdc) + (xdc)\,(dab)\,(cab) = 0,$$

en voor de vergelijking der rechte CA

$$(xab)\,(acd)\,(bcd) + (xcd)\,(cab)\,(dab) = 0,$$

of:

$$(xad)\,(acb)\,(dcb) + (xcb)\,(cad)\,(bad) = 0.$$

Vraagstuk CLXXIII.

K 2 d. In het vlak van driehoek ABC liggen de punten P en P_1. Door P_1 trekt men rechten evenwijdig aan AP, BP, CP, welke CA, AB, BC in A_1, B_1, C_1 en AB, BC, CA in A_2, B_2, C_2 snijden. Als P_1 een vast punt is en A_1, B_1, C_1, en A_2, B_2, C_2 collineaire drietallen zijn, vraagt men te bepalen

1) de ligging van P_1,
2) de meetkundige plaats van P,
3) de omhullenden der rechten $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$,
4) de meetkundige plaats van het snijpunt dezer rechten.

(T. J. Allersma.)

Opgelost *door* T. J. Allersma *en* Dr. F. Schuh.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

Zijn p, q, r de barycentrische coördinaten van P, p_1, q_1, r_1 die van P_1 en x, y, z de loopende barycentrische coördinaten, dan is vooreerst de vergelijking van AP: $\frac{y}{q} = \frac{z}{r}$.

De coördinaten van het punt in het oneindige van AP zijn $-(q+r)$, q, r; de rechte P_1A_1 door P_1 evenwijdig aan AP heeft dus tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ -(q+r) & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

De coördinaten van het snijpunt A_1 van P_1A_1 met CA ($y=0$) zijn $(p_1q + q_1q + q_1r)$, 0, $(r_1q - q_1r)$.

Door cyclische letterverwisseling vindt men de coördinaten van B_1 en C_1. De voorwaarde, dat A_1, B_1 en C_1 collineair zijn, luidt dus

$$\begin{vmatrix} p_1q + q_1q + q_1r & 0 & r_1q - q_1r \\ p_1r - r_1p & q_1r + r_1r + r_1p & 0 \\ 0 & q_1p - p_1q & r_1p + p_1p + p_1q \end{vmatrix} = 0.$$

Hiervoor kan geschreven worden

$$(p_1 + q_1 + r_1)(p + q + r)(pqp_1r_1 + qrq_1p_1 + rpr_1q_1) = 0.$$

Ligt P of P_1 in het oneindige dan zijn dus A_1, B_1 en C_1 collineair, zooals ook onmiddellijk is in te zien. Liggen P en P_1 in het eindige, dan wordt de voorwaarde voor de collineaire ligging van A_1, B_1 en C_1

$$pqp_1r_1 + qrq_1p_1 + rpr_1q_1 = 0.$$

Evenzoo vindt men voor de voorwaarde, dat A_2, B_2 en C_2 collineair zijn

$$pqq_1r_1 + qrr_1p_1 + rpp_1q_1 = 0.$$

1) Wil er van een meetkundige plaats van P sprake zijn, dan moeten deze beide vergelijkingen dezelfde lijn voorstellen; hiervoor is de voorwaarde

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{q_1}{r_1} = \frac{r_1}{p_1}.$$

Is P_1 bestaanbaar dan volgt hieruit $p_1 = q_1 = r_1$, m. a. w. *P_1 is het zwaartepunt van driehoek ABC.*

2) De meetkundige plaats van P heeft dan tot vergelijking

$$pq + qr + rp = 0,$$

m a. w. *de meetkundige plaats van P is de ellips van* STEINER, d. i. de ellips door A, B en C, die het zwaartepunt G van den driehoek als middelpunt heeft.

3) De rechte $A_1B_1C_1$ heeft tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2q+r & 0 & q-r \\ r-p & 2r+p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

of, na herleiding met behulp van $pq + qr + rp = 0$,

$$(2p - q + 2r)x + (2p + 2q - r)y + (-p + 2q + 2r)z = 0.$$

Zijn p', q', r' de coördinaten van het punt P′ dat op de ellips van STEINER diametraal tegenover P ligt, dan is

$$p' : q' : r' = (-p + 2q + 2r) : (2p - q + 2r) : (2p + 2q - r).$$

De vergelijking van $A_1B_1C_1$ wordt nu

$$q'x + r'y + p'z = 0,$$

waaruit blijkt dat de rechte $A_2B_2C_2$ door het punt P′ gaat. Daar P′ op de ellips van STEINER ligt, kunnen we voor de coördinaten van P′ schrijven p', $-\frac{p'}{p'+1}$, 1, waardoor de vergelijking van $A_1B_1C_1$ overgaat in

$$p'^2z + p'(-x + y + z) + y = 0,$$

waarin p' een parameter is. Hieruit vindt men voor de omhullende van $A_1B_1C_1$ $(-x + y + z)^2 - 4yz = 0$, of

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0.$$

Uit de symmetrie dier vergelijking blijkt, dat dit tevens de omhullende der rechten $A_2B_2C_2$ is. Verder blijkt uit de vergelijking, *dat de gemeenschappelijke omhullende der rechten $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ de ellips is, die de zijden van driehoek ABC in de middens dier zijden aanraakt.* Deze ellips, ook wel de tweede ellips van STEINER genoemd, heeft eveneens het zwaartepunt G van den driehoek als middelpunt en dezelfde punten in het oneindige als de ellips van STEINER. Hieruit volgt, dat de meetkundige plaats van P en de gemeenschappelijke omhullende van $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ concentrisch zijn en gelijkvormig gelegen.

4) Voor de vergelijking der rechte $A_2B_2C_2$ vindt men op dezelfde wijze als boven:

$$r'x + p'y + q'z = 0,$$

zoodat $A_2B_2C_2$ eveneens door P′ gaat. Hieruit volgt, dat $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ de beide raaklijnen der ingeschreven ellips uit het diametraal tegenover P gelegen punt der omgeschreven ellips zijn, en verder, *dat de meetkundige plaats van het snijpunt S van $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ de ellips van* STEINER *is.*

Vraagstuk CLXXIV.

K 8 f. Van een vierhoek ABCD, die een ingeschreven en een omgeschreven cirkel bezit, worden de hoeken A en B door 2α en en 2β aangewezen, de hoek DEA der diagonalen door 2γ. Bewijs dat men heeft

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

(J. A. BARRAU.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, H. B. BONE JR., Dr. H. BREMEKAMP, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, L. DE JONG, E. D. J. DE JONGH JR., A. KEESING, DR. J. G. RUTGERS, DR. F. SCHUH, H. J. VAN VEEN en DR. W. A. WIJTHOFF.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

1. De raakpunten der zijden AB, BC, CD, DA met den ingeschreven cirkel zullen door F, G, H, I aangewezen worden. Zij K het snijpunt van AD en BC.

Daar ABGCDI kan beschouwd worden als een om een cirkel beschreven zeshoek, gaan AC, BD en GI door een punt E, dat dan natuurlijk ook op de rechte FH ligt.

Omdat ABCD een koordenvierhoek is, heeft men $\angle ACB = \angle ADB$ of, wat hetzelfde is, $\angle ECG = \angle IDE$. Verder is $\angle KGI = \angle KIG$, of $\angle CGE = \angle DIE$. Uit de driehoeken EGC en EDI vindt men dus $\angle GEC = \angle IED$. Maar $\angle IED$ is ook gelijk aan $\angle BEG$, zoodat men heeft $\angle GEC = \angle BEG$, d. w. z. *de rechten, die de raakpunten der overstaande zijden verbinden, deelen de hoeken der diagonalen middendoor.*

2. Nu is verder $\angle KIG + \angle KGI = \angle A + \angle B$, dus $\angle DIE = \alpha + \beta$, en daar $\angle DEI = \frac{1}{4} \angle DEA = \gamma$ is, vindt men uit driehoek DEI

$$DI : \sin\gamma = DE : \sin(\alpha + \beta).$$

Uit $2 \angle CHE = \angle A + \angle ADH = 2\alpha + (180^\circ - 2\beta)$ volgt $\angle CHE = 90^\circ + \alpha - \beta$, dus $\angle DHE = 90^\circ - (\alpha - \beta)$. Daar $\angle DEH = 90^\circ - \angle DEI = 90^\circ - \gamma$ is, vindt men uit driehoek DEH

$$DH : \cos\gamma = DE : \cos(\alpha - \beta).$$

Maar $DH = DI$, bijgevolg leveren de gevonden evenredigheden

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Oplossing *van* Dr. W. A. Wijthoff [1]).

Stellen wij de bogen AB, BC, CD en DA van den omgeschreven cirkel achtervolgens door $4\phi_1$, $4\phi_2$, $4\phi_3$ en $4\phi_4$ voor, dan is

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 90^\circ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

De eigenschap dat de vierhoek ook een ingeschreven cirkel heeft, drukken wij uit door de sommen der koorden der overstaande bogen aan elkaar gelijk te stellen, dus door

$$\sin 2\phi_1 + \sin 2\phi_3 = \sin 2\phi_2 + \sin 2\phi_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

---

[1]) De overige oplossingen komen vrij wel met deze oplossing overeen.

Door de hoeken A, B en DEA in bogen van den omgeschreven cirkel uit te drukken, vinden we verder

$$\alpha = \phi_2 + \phi_3; \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

$$\beta = \phi_3 + \phi_4; \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

$$\gamma = \phi_2 + \phi_4. \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Uit (3), (4) en (5) volgt:

$$-\alpha + \beta + \gamma = 2\phi_4; \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

$$\alpha - \beta + \gamma = 2\phi_2; \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 2\phi_3; \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

uit (3), (4) en (5) in verband met (1)

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ - 2\phi_1. \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

Door toepassing van (6), (7), (8) en (9) gaat (2) over in

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)=\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma).$$

Dus is

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma = 2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta),$$

en hieruit volgt ten slotte

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

Vraagstuk CLXXV.

K 1 6. Gegeven is een driehoek ABC. Men vraagt een punt in zijn vlak te bepalen, dat het centrum kan zijn van een inversie, welke A, B, C omzet in de hoekpunten van een driehoek van gegeven vorm. (J. A. BARRAU).

Opgelost *door* C. VAN ALLER, J. A. BARRAU, H. B. BONE JR., Dr. H. BREMEKAMP, E. D. J. DE JONGH JR., W. MANTEL, Dr. F. SCHUH *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing.

Zij O het centrum der inversie en stellen we OA, OB en OC door d, e en f voor. Is verder r de straal van den inver-

teerenden cirkel, die A, B, C omzet in A′, B′, C′, en stellen we OA′, OB′ en OC′ door d', e' en f' voor, dan is

$$d' = \frac{r^2}{d},\ e' = \frac{r^2}{e},\ f' = \frac{r^2}{f}.$$

Uit de gelijkvormigheid der driehoeken OBC en O′B′C′ volgt, als a, b, c de zijden van driehoek ABC, a', b', c' de zijden van driehoek A′B′C′ zijn,

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{f} = \frac{r^2 d}{def}.$$

Evenzoo vindt men

$$\frac{b'}{b} = \frac{r^2 e}{def},\ \frac{c'}{c} = \frac{r^2 f}{def}.$$

Dus is

$$d : e : f = \frac{a'}{a} : \frac{b'}{b} : \frac{c'}{c}.$$

De verhoudingen der afstanden van O tot de hoekpunten van den gegeven driehoek zijn dus bekend.

We construeeren nu den cirkel, die de meetkundige plaats is van de punten, waarvan de afstanden tot B en C zich verhouden als $\frac{b'}{b}$ tot $\frac{c'}{c}$; het middelpunt D van dien cirkel ligt op BC. Een dergelijken cirkel construeeren we voor de punten C en A. De beide snijpunten dier cirkels geven dan de punten aan, waarin het centrum der inversie kan gekozen worden. De derde cirkel (voor de punten A en B) moet natuurlijk door door de snijpunten der beide genoemde cirkels gaan, zoodat zijn middelpunt het snijpunt van DE met AB is.

In het voorgaande werd ondersteld, dat gegeven is hoe de zijden van de beide driehoeken bij elkaar behooren. Is dit niet gegeven dan kan men op zes manieren een correspondentie tusschen de zijden van de beide driehoeken kiezen, waardoor men dan twaalf punten krijgt, waar het centrum der inversie gelegen kan zijn.

Opmerking van W. H. L. Janssen van Raay. In *Rouché et de Comberousse, Traité de géométrie*, 1891, t. I, p. 450, vindt men de oplossing van dit vraagstuk. De beide punten, die aan de vraag voldoen, heeten daar de *metaharmonische centra* der beide driehoeken.

Vraagstuk CLXXVI.

K 13 c γ. Aan welke voorwaarde moeten de ribben van twee viervlakken voldoen, zal het mogelijk zijn, ze zoo te plaatsen, dat de hoekpunten van het eene viervlak door een inversie in de hoekpunten van het andere omgezet kunnen worden?

(J. A. BARRAU.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, H. B. BONE JR., Dr. H. BREMEKAMP, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, E. D. J. DE JONGH JR. *en* Dr. F. SCHUH.

Oplossing *van* Dr. H. BREMEKAMP.

1. Zij ABCD een der viervlakken, O het centrum van inversie. Stellen we $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = d$, $DB = e$, $DC = f$; $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, $OD = u$, en duiden de overeenkomstige grootheden voor het tweede viervlak door accenten aan, dan is

$$c' : c = k^2 : xy \quad \text{en} \quad f' : f = k^2 : zu,$$

dus

$$c'f' : cf = k^4 : xyzu.$$

De bedoelde voorwaarde is dus

$$a'd' : ad = b'e' : be = c'f' : cf.$$

Is hieraan voldaan, dan kunnen de verhoudingen van x, y, z en u zoo gekozen worden dat ABCD in A'B'C'D' overgaat. Het punt O is dan een der snijpunten van drie bollen.

2. Dezelfde betrekking bestaat natuurlijk tusschen de zijden van twee volledige vierhoeken, die door inversie samenhangen.

Zij nu gegeven $ad + cf = be$, zoodat voor een door inversie afgeleide figuur de betrekking $a'd' + c'f' = b'e'$ geldt.

Wij stellen $b' = a' + c'$, nemen dus aan, dat A', B', C' in een rechte liggen. Dan is $a'd' + c'f' = (a' + c')e'$ of $a'(d' - e') = c'(e' - f')$. Hieraan wordt voldaan door te stellen $d' - e' = c'$ en $e' - f' = a'$, zoodat D' op de rechte A'B'C' ligt.

De hoekpunten van den gegeven vierhoek kunnen dus door inversie in vier collineaire punten omgezet worden; zij liggen derhalve op een cirkel. En hiermee is het omgekeerde van de stelling van Ptolemaeus bewezen.

Vraagstuk CLXXVII.

N⁴ 1 b. Een ellips verandert zoo, dat haar middelpunt een rechte doorloopt, terwijl twee vaste punten de uiteinden van twee toegevoegde middellijnen blijven. Gevraagd wordt haar omhullende.

(J. A. BARRAU.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, W. H L. JANSSEN VAN RAAY, W. MANTEL, Dr. P. H. SCHOUTE, Dr. F. SCHUH, H. J. VAN VEEN *en* Dr. W. A. WIJTHOFF.

Oplossing *van* H. J. VAN VEEN.

De veranderlijke ellips kan beschouwd worden als scheeve projectie van een cirkel, die door de gegeven punten A en B gaat, terwijl zijn vlak loodrecht staat op het vlak door A, B en de gegeven rechte l. Zijn middelpunt M is bepaald door de voorwaarde $MA \perp MB$, de projectierichting door de rechte uit M naar het middelpunt der ellips.

Is O het snijpunt van l met AB, dan zullen de raaklijnen van den cirkel, die evenwijdig loopen met OM, voor elke der projectierichtingen geprojecteerd worden in dezelfde rechten die evenwijdig aan l en raaklijnen der ellips zijn. *De omhullende bestaat dus uit twee rechten evenwijdig aan l.*

Zij kunnen gemakkelijk geconstrueerd worden zoo men den cirkel om AB in het vlak der ellips neerslaat.

Oplossing *van* Dr. W. A. WIJTHOFF.

1. Wij nemen de lijn, die de beide vaste punten verbindt, als x-as en de lijn, die door het middelpunt doorloopen wordt, als y-as aan.

Vervormen wij de ellips in een van haar standen door een transformatie $x_1 = x$, $y_1 = ky$, zoo is het duidelijk, dat zij door de vaste punten blijft gaan en haar middelpunt op de y-as blijft. Voorts is het duidelijk, dat deze transformatie geen verandering brengt in de eigenschap van het middendoor deelen van evenwijdige koorden, zoodat de vaste punten uiteinden van toegevoegde middellijnen blijven. Ten slotte zien wij, dat wij door een juiste keuze van k elk punt van de y-as tot middelpunt kunnen maken, zoodat wij alle standen der veranderlijke ellips verkrijgen door k alle waarden van $-\infty$ tot $+\infty$ te laten doorloopen.

Daar bij deze transformatie de x-coördinaat niet verandert, zullen ook de maximum- en minimum-waarden van x niet veranderen. De ellips zal dus blijven raken aan twee vaste rechten evenwijdig met de y-as.

De gevraagde omhullende bestaat dus uit twee rechte lijnen evenwijdig aan de lijn die door het middelpunt doorloopen wordt.

2. Afzonderlijk dient behandeld te worden het geval, dat de lijn, die door het middelpunt doorloopen wordt, evenwijdig is aan de verbindingslijn der vaste punten, in welk geval de bovenstaande behandeling niet doorgaat. Wij nemen dan de lijn die door de vaste punten gaat weder als x-as aan en een willekeurige y-as. Gebruiken wij nu de transformatie $x_1 = x + ky$, $y_1 = y$, dan komen wij door een dergelijke redeneering tot hetzelfde resultaat.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

Zijn P_1, P_2 de gegeven vaste punten en is m de door het middelpunt M doorloopen rechte, N het vierde hoekpunt van het parallelogram P_1MP_2N, n de lijn door N evenwijdig aan m, Q het snijpunt van P_1P_2 en n, R het punt van P_1P_2 dat door P_1 en P_2 harmonisch gescheiden is van Q, r de lijn door R evenwijdig aan m en t, t' het paar lijnen evenwijdig aan m en harmonisch gescheiden zoowel door m en de lijn in het oneindige als door n en r, dan bestaat de gevraagde omhullende uit de lijnen t, t'.

Want deze lijnen raken alle kegelsneden van het vraagstuk aan. Als M de lijn m doorloopt, beschrijft N namelijk de lijn n en hieruit volgt, dat de punten Q en R voor al die kegelsneden dezelfde beteekenis hebben, n.l. dat R steeds de pool is van n. De rest volgt dan uit de opmerking, dat de aan m evenwijdige raaklijnen van elk der kegelsneden symmetrisch liggen ten opzichte van m, en Q en R harmonisch scheiden

De middellijn der veranderlijke kegelsnee die naar de raakpunten met de omhullende gaat, omhult R; in denzelfden zin omhullen de kegelsneden de punten P_1 en P_2.

OPMERKING. De n-dimensionale uitbreiding van dit vraagligt geheel voor de hand; ze luidt:

„In de ruimte R_n verandert een quadratische gebogen ruimte O^2_{n-1} (met ∞^{n-1} punten), die met de oneindig verre ruimte

R^{∞}_{n-1} van R_n geen bestaanbaar punt gemeen heeft (karakter ellips), zoodanig, dat haar middelpunt M een gegeven ruimte $R^{(m)}_{n-1}$ doorloopt en n willekeurig gegeven punten P_1, P_2, ... P_n uiteinden van n toegevoegde middellijnen blijven. Gevraagd wordt de omhullende van O^2_{n-1}."

We beschouwen het parallelotoop met 2^n hoekpunten, waarvan de n lijnen MP_i ($i = 1, 2, \ldots n$) de door M gaande ribben zijn, en zien onmiddellijk, dat het tegenover M liggende hoekpunt N bij verplaatsing van M in $R^{(m)}_{n-1}$ een ruimte $R^{(n)}_{n-1}$ evenwijdig aan $R^{(m)}_{n-1}$ doorloopt. Is nu $R^{(q)}_{n-2}$ de doorsnee van deze $R^{(m)}_{n-1}$ met de ruimte $R^{(p)}_{n-1}$ der n punten P_i en R de pool van $R^{(q)}_{n-2}$ met betrekking tot het simplex der n punten P_i, dan vormen de met $R^{(m)}_{n-1}$ evenwijdig aan weerskanten op gelijken afstand gelegen ruimten $R^{(t)}_{n-1}$, $R^{(t')}_{n-1}$, die $R^{(q)}_{n-1}$ en het punt R harmonisch scheiden, samen de gezochte omhullende. De middellijnen door de raakpunten omhullen ook hier het punt R. En de ruimten O^2_{n-1} omhullen de quadratische gebogen ruimte O^2_{n-2} in $R^{(p)}_{n-1}$, die door de punten P_i gaat en waarvoor $R^{(q)}_{n-2}$ en R poolruimte en pool zijn.

Vraagstuk CLXXVIII.

N[1] 1 h. Elke tetraedrale complex kan voorgesteld worden door een vergelijking in lijncoördinaten van den vorm $Ap_1p_4 + Bp_2p_5 + Cp_3p_6 = 0$. Men vraagt dit te bewijzen, de dubbelverhouding van den complex uit te drukken in A, B, C, en de lineaire congruenties aan te geven, waaruit de complex is opgebouwd.

(Dr. Z. P. Bouman.)

Opgelost *door* H. B. Bone Jr., Dr. Z. P. Bouman, Dr. F. Schuh *en* Dr. A. Toxopeus.

Oplossing *van* Dr. F. Schuh.

1. Zijn y_i en z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de homogene coördinaten van twee punten eener rechte, waarbij we den complextetraëder als coördinatentetraëder bezigen, dan zijn de lijncoördinaten:

$$p_1 = y_2z_3 - y_3z_2\,, \qquad p_4 = y_1z_4 - y_4z_1\,,$$
$$p_2 = y_3z_1 - y_1z_3\,, \qquad p_5 = y_2z_4 - y_4z_2\,,$$
$$p_3 = y_1z_2 - y_2z_1\,, \qquad p_6 = y_3z_4 - y_4z_3.$$

Zijn P_i de snijpunten dier rechte met de coördinatenvlakken. De coördinaten van P_1 vindt men door P_1 als het punt (y) te beschouwen, waardoor $y_1 = 0$ wordt. Die coördinaten zijn dus

$$0\,,\ p_3\,,\ -p_2\,,\ p_4.$$

Evenzoo vindt men voor de coördinaten van P_2, P_3 en P_4 achtereenvolgens

$$\begin{array}{rrrr} -p_3\,, & 0\,, & p_1\,, & p_5\,, \\ p_2\,, & -p_1\,, & 0\,, & p_6\,, \\ p_4\,, & p_5\,, & p_6\,, & 0. \end{array}$$

Voor de dubbelverhouding D dier 4 punten vindt men:

$$D = (P_1P_2P_3P_4) = \left(-\frac{p_2}{p_4}, \frac{p_1}{p_5}, \frac{0}{p_5}, \frac{p_6}{0}\right) = -\frac{p_2p_5}{p_1p_4}.$$

De rechten, die den tetraedralen complex vormen, voldoen dus aan de betrekking

$$Dp_1p_4 + p_2p_5 = 0.$$

Daar de lijncoördinaten de identieke betrekking

$$p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$$

bevredigen, kan voor de vergelijking van den complex ook geschreven worden

$$(\lambda D + C)\,p_1p_4 + (\lambda + C)\,p_2p_5 + Cp_3p_6 = 0\,,$$

waarin λ en C willekeurige constanten zijn. Stelt men

$$\lambda D + C = A,$$
$$\lambda + C = B,$$

dan wordt de vergelijking van den complex

$$Ap_1p_4 + Bp_2p_5 + Cp_3p_6 = 0.$$

De dubbelverhouding van den complex is dan bepaald door

$$D = \frac{A - C}{B - C}.$$

2. De complexstralen, die een willekeurige rechte l snijden,

vormen een congruentie van den tweeden graad en de tweede klasse. De rechten dier congruentie, die in een willekeurig door l gelegd vlak V gelegen zijn, omhullen een kegelsnede, die de snijlijnen a_1, a_2, a_3, a_4 van V met de vlakken van den tetraëder tot raaklijnen heeft. Is echter l as van een in den tetraedralen complex begrepen lineaire congruentie, dan moet in ieder door l gelegd vlak V een bundel van congruentiestralen gelegen zijn. Dit is alleen dan het geval als drie der vier rechten a_1, a_2, a_3, a_4, b.v. a_2, a_3 en a_4, door één punt gaan; is m dan een rechte van V, die de rechten a_i onder de dubbelverhouding D snijdt, en Q het snijpunt van m met a_1, dan snijdt iedere door Q gaande rechte van V de rechten a_i onder de dubbelverhouding D. Voor ieder door l gaand vlak gaan alleen dan drie der vier rechten a_i door één punt als l door een der hoekpunten van den tetraëder, b.v. door A_1 gaat. Verder moet, als l de as eener lineaire congruentie is, door ieder punt van l een vlakke bundel van congruentiestralen gaan, waaruit volgt dat l ook in een der zijvlakken van den tetraeder gelegen moet zijn, b.v. in het vlak $A_1A_2A_3$. Derhalve moet l een lijn van een der 12 vlakke stralenbundels zijn, die door een hoekpunt en een zijvlak van den tetraeder gedragen worden. Daar alle rechten, die met een hoekpunt of een zijvlak van den tetraëder incident zijn, tot den tetraedralen complex behooren, ontaardt dan de congruentie van den 2den graad en de 2de klasse in de congruentie van den eersten graad en de klasse nul van alle door A_1 gaande rechten, de congruentie van den graad nul en de eerste klasse van alle in $A_1A_2A_3$, gelegen rechten en een lineaire congruentie. Deze congruentie heeft tot as de lijn l en tot tweede as een lijn l' door A_4 gelegen in het vlak $A_2A_3A_4$. Zij R het snijpunt van l met A_2A_3 en R′ het snijpunt van l' met A_2A_3. De lijn A_2A_3 is een congruentiestraal. Een, weinig van A_2A_3 verschillende, congruentiestraal snijdt de vier zijvlakken van den tetraëder in vier punten, die weinig van R′, A_3, A_2 en R verschillen. Hieruit volgt, dat R en R′ zoo gelegen zijn dat de dubbelverhouding $(R'A_3A_2R) = D$ is.

Vraagstuk CLXXIX.

N[1] 1 c. Als vier lineaire complexen paarsgewijze in involutie liggen, dan worden de assen dér congruentie welke twee dier com-

plexen gemeen hebben, gesneden door de assen der congruentie welke de overige twee complexen bepalen.. (Dr. Z. P. BOUMAN).

Opgelost *door* Dr. Z. P. BOUMAN, Dr. F. SCHUH *en* Dr. A. TOXOPEUS.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

De opgave is niet geheel juist, daar noodig is dat de complexen op twee manieren paarsgewijze in involutie liggen. Zij moet dus luiden:

Als van vier lineaire complexen S_1, S_2, S_3 *en* S_4 *de complex* S_1 *met* S_3 *en met* S_4 *en eveneens de complex* S_2 *met* S_3 *en met* S_4 *in involutie ligt, dan wordt ieder der assen van de congruentie, die de complexen* S_1 *en* S_2 *gemeen hebben, gesneden door ieder der assen van de congruentie welke de overige twee complexen bepalen.*

We beschouwen de zes lijncoördinaten p_i als de homogene coördinaten van een punt in een vijfdimensionale ruimte. De identieke betrekking $p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$ stelt een quadratische figuur K van vier dimensies voor, die in deze vijfdimensionale ruimte gelegen is. Ieder punt van K vertegenwoordigt dan een rechte der driedimensionale ruimte. Een lineaire complex wordt afgebeeld als de doorsnede van een lineaire ruimte L van 4 dimensies met K. Twee lineaire complexen liggen in involutie als de bijbehoorende lineaire ruimten toegevoegd zijn ten opzichte van K, m. a. w. als de eene lineaire ruimte door de pool van de andere gaat. De voorwaarde dat twee rechten elkaar snijden beteekent voor de beeldpunten dat ze toegevoegd zijn ten opzichte van K, m. a. w. dat de vierdimensionale lineaire poolruimte van het eene beeldpunt door het andere beeldpunt gaat. Hieruit volgt weer dat de lineaire complex speciaal is als L aan K raakt; de complex bestaat dan uit alle rechten, die de rechte snijden, waarvoor het raakpunt van L en K het beeldpunt is.

Wij stellen de bij de complexen S_i behoorende lineaire ruimten door L_i voor. De congruentie, die S_1 en S_2 gemeen hebben, behoort tot alle complexen van den bundel $S_1 + \lambda S_2$, waarvan de lineaire beeldruimten door de driedimensionale snijruimte L_{12} van L_1 en L_2 gaan. Tot dien bundel behooren twee speciale lineaire complexen, die afgebeeld worden als de beide vier-

dimensionale lineaire raakruimten T_1 en T_2 door L_{12} aan K. De raakpunten R_1 en R_2 zijn de beeldpunten van de assen dier speciale lineaire complexen, dus de beeldpunten der assen van de congruentie, die S_1 en S_2 gemeen hebben; deze congruentie stellen we door S_{12} voor.

Wanneer nu ieder der assen van de congruentie S_{12} gesneden wordt door ieder der assen van de congruentie S_{34}, m. a. w. als de assen der eene congruentie behooren tot de andere congruentie, dan moeten de beeldpunten R_3 en R_4 van de assen der congruentie S_{34} toegevoegd zijn zoowel aan R_1 als aan R_2, dus gelegen zijn zoowel op T_1 als op T_2, dus op L_{12}. De raakruimten T_3 en T_4 hebben dus beide hun pool op L_{12} en ditzelfde geldt derhalve voor iedere vierdimensionale lineaire ruimte door de driedimensionale snijruimte L_{34} van T_3 en T_4. Daar L_3 en L_4 door L_{34} gaan, liggen bijgevolg de polen van L_3 en L_4 op L_{12}, dus op L_1 en L_2, m. a. w. L_3 en L_4 zijn zoowel aan L_1 als aan L_2 toegevoegd, of S_3 en S_4 liggen zoowel met S_1 als met S_2 in involutie. Omgekeerd volgt ook uit die involutorische ligging, dat de assen der congruentie S_{12} tot de congruentie S_{34} behooren.

Opmerkingen. 1. Wil men dat iedere as der congruentie S_{12} door slechts één der assen van de congruentie S_{34} gesneden wordt, dan staat dit niet in verband met involutorische ligging der complexen. Daarvoor is slechts noodig, dat b.v. R_1 en R_3 en eveneens R_2 en R_4 toegevoegd zijn, dus dat R_3 in T_1 en R_4 in T_2 ligt.

Uit het volgende voorbeeld blijkt, dat er involutorische ligging zijn kan tusschen S_1 en S_3, S_2 en S_4, S_1 en S_2, S_3 en S_4 zonder dat een der assen van de congruentie S_{12} gesneden wordt door een as der congruentie S_{34}. Daartoe nemen we de complexen S_1 en S_4 speciaal, met kruisende assen, a_1 en a_4.

De complex S_2 ligt met S_1 en S_4 in involutie als a_1 en a_4 complexstralen van S_2 zijn. Hierbij kan S_2 nog zoodanig gekozen worden, dat a_1 en een willekeurig aangenomen rechte a_{12} de assen der congruentie S_{12} zijn; S_2 is dan de complex, die door de congruentie S_{12} en de rechte a_4 bepaald is. Evenzoo kan S_3 zoo worden gekozen, dat S_3 met S_1 en S_4 in involutie ligt en de congruentie S_{34} de rechte a_4 en een willekeurige aangenomen rechte a_{34} als assen heeft. De rechten a_{12} en a_{34} kunnen nu zoo gekozen worden, dat geen der assen van de congruentie S_{12} een as der congruentie S_{34} snijdt.

2. Is in de opgave met „paarsgewijze" bedoeld, dat elke twee complexen in involutie liggen, dan geldt de stelling op welke der drie manieren we de vier complexen twee aan twee tot snijding brengen. Men heeft dan een bijzonder geval van een stelling van F. KLEIN, volgens welke er zes lineaire algemeene complexen mogelijk zijn, zoodanig dat ieder dier complexen met ieder der overige in involutie ligt; de assen der congruentie, die twee complexen gemeen hebben, behooren tot de vier overige complexen, m. a. w. ieder dier assen wordt door de 12 assen der 6 congruenties, die door twee dier vier complexen bepaald worden, gesneden. De zes beeldruimten dier complexen vormen een poolsimplex der quadratische figuur K.

Vraagstuk CLXXX.

O 3 h. Als een ruimtekromme, in een punt P, n punten gemeen heeft met haar osculatievlak zonder dat daar de eerste kromtestraal ρ oneindig groot is, vraagt men den kromtestraal der doorsnede van het osculatievlak met het raaklijnenoppervlak uit te drukken in ρ. (Dr. Z. P. BOUMAN.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, H. B. BONE JR., Dr. Z. P. BOUMAN *en* Dr. F. SCHUH.

Oplossing *van* H. B. BONE JR.

Neemt men het punt P tot oorsprong van rechthoekige coördinaten, zijn osculatievlak tot XY-vlak en zijn raaklijn tot X-as, dan kan men de vergelijkingen der kromme in de buurt van P blijkbaar aldus schrijven:

$$y = b_0 x^2 + b_1 x^3 \quad + \ldots\ldots$$
$$z = a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + \ldots\ldots \quad (n \geqq 3).$$

Voor den eersten kromtestraal der kromme in het punt P vindt men dan $\rho = \dfrac{1}{2b_0}$.

De raaklijn in een punt (x, y, z) van de kromme heeft tot vergelijkingen:

$$Y - (b_0x^2 + b_1x^3 \quad + \ldots) = (2b_0x + 3b_1x^2 + \ldots.)\ (X - x)$$

$$Z - (a_0x^n + a_1x^{n+1} + \ldots) = (na_0x^{n-1} + (n+1)\,a_1x^n + \ldots)\,(X - x).$$

Dus wordt de dooranede van het raaklijnenoppervlak met het osculatievlak XOY, met x als parameter, voorgesteld door

$$X = \frac{(n-1)\,a_0x^n + na_1x^{n+1} + \ldots}{na_0x^{n-1} + (n+1)\,a_1x^n + \ldots},$$

$$Y = (2b_0x + 3b_1x^2 + \ldots.)\,X - (b_0x^2 + 2b_1x^3 + \ldots.).$$

De kromtestraal van deze kromme in den oorsprong wordt gevonden uit:

$$\rho' = \lim_{x=0} \frac{X^2}{2Y} = \lim_{x=0} \frac{\left(\frac{n-1}{n}x\right)^2}{2\left[2b_0\frac{n-1}{n}x^2 - b_0x^2\right]} =$$

$$= \frac{\frac{(n-1)^2}{n^2}}{2\frac{n-2}{n}b_0} = \frac{1}{2b_0} \cdot \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}.$$

Men heeft dus de betrekking

$$\rho' = \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\,\rho.$$

Vraagstuk CLXXXI.

K 5 d. Drie rechten wentelen met gelijke hoeksnelheden om een van haar punten. Men vraagt de meetkundige plaats te bepalen van de middelpunten van de in- en omgeschreven cirkels, van het hoogtepunt en het zwaartepunt van den door die rechten gevormden driehoek. (J. VAN DE GRIEND JR.)

Opgelost *door* H. B. BONE JR., J. VAN DE GRIEND JR., W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, Dr. F. SCHUH, Dr. C. STOLP en H. J. VAN VEEN.

Oplossing *van* W. H. L. JANSSEN VAN RAAY.

I. De vraag kan gemakkelijk beantwoord worden door toepassing van de volgende stelling:

Wanneer een driehoek van veranderlijke grootte maar onveranderlijken vorm in zijn vlak wentelt om een punt, dat zijn karakter met betrekking tot den driehoek bewaart, dan doorloopen alle tot den driehoek behoorende punten gelijkvormige banen.

BEWIJS VAN DEZE STELLING. Laten O het draaipunt, M en N twee bijzondere punten van den driehoek zijn, dan behouden, omdat de driehoek bij de wenteling gelijkvormig met zich zelf blijft, de voerstralen OM en ON dezelfde verhouding en denzelfden ingesloten hoek; dus zijn de banen van M en N gelijkvormig. Het is verder duidelijk, dat, zoo eene der bedoelde banen door het draaipunt gaat, alle anderen dit eveneens doen.

II. Wanneer nu de lijnen BC, CA en AB achtereenvolgens met gelijke hoeksnelheden om de punten P, Q en R wentelen, dan behouden de hoeken A, B en C, die zij met elkaar vormen, hunne grootte, zoodat de bewegelijke driehoek ABC onveranderd van vorm blijft. Daarbij doorloopen de punten A, B en C vaste cirkels, die twee aan twee door de hoekpunten van den driehoek PQR gaan en een punt O gemeenschappelijk hebben; de cirkels gaan n l. door één punt, omdat de bogen POQ, QOR en ROP te zamen 360° bevatten. Omdat de punten O, P, Q en R onveranderlijk zijn, deelen de lijnen, die O met A, B en C verbinden, de hoeken van △ ABC in eene standvastige reden, zoodat O een merkwaardig punt van den wentelenden driehoek is. En daar de hoekpunten cirkels doorloopen, welke door O gaan, doen dit volgens de boven bewezen stelling alle punten van den driehoek, dus ook de vier in de opgave genoemde punten. Men vindt overigens dit laatste rechtstreeks bewezen in ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de géométrie*, I, 6e druk 1891, blz. 470.

Oplossing *van* J. VAN DE GRIEND JR.

Zijn A, B, C de vaste punten, P het snijpunt der stralen uit B en C, Q dat der stralen uit C en A, R dat der stralen uit P en Q. Volgens de theorie der snelheidsassen (Zie N. A.

VI, bl. 273 Opm.) vindt men het snelheidscentrum p van P door loodlijnen in B op BP en in C op CP, die elkaar in p snijden. Eveneens vindt men de snelheidscentra q en r van Q en R. Daar $\triangle$ PQR gelijkvormig met zichzelf blijft, is het snelheidscentrum n van het middelpunt N van den ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABC ook het middelpunt van den ingeschreven cirkel van $\triangle pqr$. Beschouwt men omgekeerd pqr als bewegend stelsel, dan blijkt door geheel overeenkomstige redeneering, dat N het snelheidscentrum is van n. N en n voeren dus steeds tegengesteld gelijke bewegingen uit loodrecht op hun verbindingslijn. Daaruit volgt dat het midden dezer verbindingslijn in rust blijft en dus de baan voor N is een cirkel met Nn tot middellijn. Eveneens is de baan voor H een cirkel met Hh als middellijn (H hoogtepunt van $\triangle$ PQR, h van $\triangle pqr$), van M een cirkel met Mm en van Z een cirkel met Zz tot middellijn.

Vraagstuk CLXXXII.

K 1 c. X is een punt in het vlak van driehoek ABC. Op de zijden van een anderen driehoek $A_1B_1C_1$ beschrijft men de driehoeken $B_1C_1A'_1$, $C_1A_1B'_1$ en $A_1B_1C'_1$ achtereenvolgens gelijkvormig met BCA, CAB en ABC, en bepaalt de punten X_a, X_b, X_c die ten opzichte van die driehoeken gelijkvormig liggen met X.

Dan heeft men de volgende eigenschappen:

1) $X_aX_bX_c$ is gelijkvormig met den driehoek, die de projecties van X op de zijden van ABC tot hoekpunten heeft.

2) De driehoek, die de middens van A_1X_a, B_1X_b, C_1X_c tot hoekpunten heeft, is gelijkvormig met ABC.

3) Zijn $A_1X'_a$, $B_1X'_b$, $C_1X'_c$ gelijk en tegengesteld gericht met A'_1X_a, B'_1X_b, C'_1X_c, dan is $X'_aX'_bX'_c$ gelijkvormig met ABC.

4) Neemt men $A_1X''_a$, $B_1X''_b$, $C_1X''_c$ gelijk en evenwijdig aan $A'X_a$, B'_1X_b, C'_1X_c, dan is $X''_aX''_bX''_c$ omgekeerd gelijkvormig met den driehoek bepaald door de projecties, op de zijden van ABC, van het snijpunt X′ der rechten door de middens van BC, CA, AB evenwijdig aan XA, XB, XC. (J. VAN DE GRIEND JR.)

Oplossing *van* J. VAN DE GRIEND JR.

Ter oplossing stellen we de hoekpunten van $\triangle$ ABC voor door complexe grootheden A, B en C, die ten opzichte van

willekeurige assen en bij willekeurig gekozen eenheid hun plaats in het platte vlak aanwijzen, en leiden in de eerste plaats de voorwaarde voor de gelijkvormigheid van twee willekeurige driehoeken PQR en P'Q'R' af. Liggen Q en Q' in den oorsprong, dan is deze voorwaarde blijkbaar

$$\frac{P}{R} = \frac{P'}{R'}.$$

Algemeener dus, als Q en Q' niet in den oorsprong liggen,

$$\frac{P - Q}{R - Q} = \frac{P' - Q'}{R' - Q'},$$

waarvoor men kan schrijven

$$(Q - R)P' + (R - P)Q' + (P - Q)R' = 0,$$

of $$(Q' - R')P + (R' - P')Q + (P' - Q')R = 0 \quad . \quad . \quad 1)$$

1. Volgens de voorwaarden van het vraagstuk is, als alle punten door complexe grootheden worden voorgesteld:

$$\left.\begin{aligned}(C - B)X_a + (X - C)B_1 + (B - X)C_1 &= 0\\ (A - C)X_b + (X - A)C_1 + (C - X)A_1 &= 0\\ (B - A)X_c + (X - B)A_1 + (A - X)B_1 &= 0\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Door vermenigvuldiging met A — X, B — X en C — X en optelling worden A_1, B_1 en C_1 geëlimineerd, en vindt men

$$(A - X)(C - B)X_a + (B - X)(A - C)X_b + (C - X)(B - A)X_c = 0.$$

De som der coëfficienten von X_a, X_b en X_c is 0. In verband hiermede vindt men

$$(X_c - X_b) : (X_a - X_c) : (X_b - X_a) =$$
$$= (A - X)(C - B) : (B - X)(A - C) : (C - X)(B - A).$$

In den vorm

$$\frac{X_b - X_c}{X_a - X_c} = \frac{A - X}{B - X} \times \frac{B - C}{A - C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

leert deze vergelijking, dat $\angle X_aX_cX_b = \angle BXA + \angle ACB$ *);

*) Zij leert bovendien, dat $\frac{X_bX_c}{X_aX_c} = \frac{AX}{BX} \times \frac{BC}{AC}$ is, d. i. in verband met de verder bewezen gelijkvormigheid van $\triangle X_aX_bX_c$ en $\triangle PQR$, dat in $\triangle ABC$ $\frac{QR}{PR} = \frac{AX}{BX} \cdot \frac{BC}{AC}$ is Deze gelijkheid kan ook langs meetkundigen weg bewezen worden.

meetkundig blijkt daaruit, dat $\angle X_a X_c X_b = \angle QRP$, waar PQR de driehoek der projectiën van X op de zijden van $\triangle ABC$ is. Uit deze en een dergelijke vergelijking voor den volgenden hoek volgt de omgekeerde gelijkvormigheid van $\triangle X_a X_b X_c$ en $\triangle PQR$.

2. De vergelijkingen (A) geven door optelling (eliminatie van X)

$$(C - B)(X_a + A_1) + (A - C)(X_b + B_1) + (B - A)(X_c + C_1) = 0.$$

Daaruit blijkt, volgens (1), de gelijkvormigheid van $\triangle ABC$ met den driehoek, die $\frac{1}{2}(X_a + A_1)$, $\frac{1}{2}(X_b + B_1)$, $\frac{1}{2}(X_c + C_1)$, d. z. de middens van $X_a A_1$, $X_b B_1$ en $X_c C_1$, tot hoekpunten heeft.

3. Door de gelijkvormige ligging van X_a in $\triangle B_1 C_1 A'_1$ en X in $\triangle BCA$ is

$$X_a - A'_1 = \frac{B_1 - C_1}{B - C}(X - A).$$

Daar $A_1 X'_a$ gelijk en tegengesteld gericht is met $A'_1 X_a$, heeft men

$$X'_a - A_1 = -\frac{B_1 - C_1}{B - C}(X - A)$$

of

$$-A_1(B - C) + B_1(X - A) - C_1(X - A) + (B - C)X'_a = 0.$$

Eveneens is

$$-B_1(C - A) + C_1(X - B) - A_1(X - B) + (C - A)X'_b = 0,$$

$$-C_1(A - B) + A_1(X - C) - B_1(X - C) + (A - B)X'_c = 0.$$

Eliminatie van A_1, B_1 en C_1 (door optelling) levert

$$(B - C)X'_a + (C - A)X'_b + (A - B)X'_c = 0.$$

Deze vergelijking spreekt de gestelde gelijkvormigheid van $\triangle X'_a X'_b X'_c$ met $\triangle ABC$ uit.

4. Hier is

$$X''_a - A_1 = \frac{B_1 - C_1}{B - C}(X - A),$$

of

$$-A_1(B-C)-B_1(X-A)+C_1(X-A)+(B-C)X''_a=0,$$
$$-B_1(C-A)-C_1(X-B)+A_1(X-B)+(C-A)X''_b=0, \quad (B)$$
$$-C_1(A-B)-A_1(X-C)+B_1(X-C)+(A-B)X''_c=0.$$

Daar de determinant der coëfficienten van A_1, B_1 en C_1,

$$\begin{vmatrix} -B+C & -X+A & X-A \\ X-B & -C+A & B-X \\ C-X & X-C & B-A \end{vmatrix}$$

gelijk aan nul is, waarvan men zich door herleiding gemakkelijk overtuigt, laten ook deze vergelijkingen eliminatie van A_1, B_1 en C_1 toe; de eliminatievergelijking (voorwaarde voor de oplosbaarheid van het stel (B) naar A_1, B_1 en C_1) is

$$\begin{vmatrix} -B+C & -X+A & (B-C)X''_a \\ X-B & -C+A & (C-A)X''_b \\ C-X & X-C & (A-B)X''_c \end{vmatrix}=0.$$

Na afscheiding van den factor $X-C$ neemt deze vergelijking de volgende gedaante aan

$$X''_a(B-C)(X+A-B-C)+X''_b(C-A)(X+B-A-C)+$$
$$+X''_c(A-B)(X+C-A-B)=0.$$

De som der coëfficienten van X''_a, X''_b en X''_c is nul; wij kunnen dus vinden

$$\frac{X''_b-X''_c}{X''_a-X''_c}=\frac{B-C}{A-C}\times\frac{X+A-B-C}{X+B-A-C}.$$

In den vorm

$$\frac{X''_b-X''_c}{X''_a-X''_c}=\frac{A-\dfrac{A+B+C-X}{2}}{B-\dfrac{A+B+C-X}{2}}+\frac{B-C}{A-C}$$

komt deze vergelijking geheel overeen met de vergelijking (2), mits men daarin X vervangt door $\frac{1}{2}(A+B+C-X)$, d. w. z.

het punt X door het punt X', dat aan de andere zijde van het zwaartepunt op half zoo grooten afstand ligt als X, — hetgeen met de bepaling van X' volgens het vraagstuk overeenkomt. Alzoo is $\triangle X''_a X''_b X''_c$ omgekeerd gelijkvormig met den projectiedriehoek P'Q'R', die uit X' geheel op dezelfde wijze is afgeleid als PQR uit X.

Wanneer X het hoogtepunt van $\triangle$ ABC is, wordt X' middelpunt van den omgeschreven cirkel. Dan is $\triangle X''_a X''_b X''_c$ evenals $\triangle X'_a X'_b X'_c$ gelijkvormig met $\triangle$ ABC, maar omgekeerd.

Wanneer X het zwaartepunt van $\triangle$ ABC wordt, valt X' samen met X. Dan is $\triangle X''_a X''_b X''_c$ gelijkvormig met $\triangle X_a X_b X_c$.

Vraagstuk CLXXXIII.

O 2 b. Zij φ de hoek, dien de raaklijn aan een kromme met de positieve X-as maakt, en p de loodlijn uit den oorsprong op die raaklijn getrokken. Men vraagt naar de meetkundige beteekenis van $\frac{dp}{d\varphi}$ en van $\frac{d^2p}{d\varphi^2}$. (Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* C. van Aller, T. J. Allersma, H. B. Bone Jr., Dr. H. Bremekamp, W. H. L. Janssen van Raay, L. de Jong, Dr. W. Kapteyn, Dr. J. G. Rutgers, Dr F. Schuh, Dr. A. Toxopeus, H. J. van Veen *en* Dr. W. A. Wijthoff.

Oplossing.

1. Noemt men de coördinaten van het raakpunt x en y, de loopende coördinaten der raaklijn X en Y, dan is de vergelijking der raaklijn

$$Y - y = (X - x) \operatorname{tg} \phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

of

$$X \sin \phi - Y \cos \phi = x \sin \phi - y \cos \phi = p. \quad . \quad . \quad 2)$$

Dus is

$$\frac{dp}{d\phi} = x \cos \phi + \sin \phi \frac{dx}{d\phi} + y \sin \phi - \frac{dy}{d\phi} \cos \phi \quad . \quad . \quad 3)$$

Maar

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\phi} = \operatorname{tg}\phi\,\frac{dx}{d\phi},$$

dus is

$$\frac{dp}{d\phi} = x\cos\phi + y\sin\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Deze uitdrukking stelt blijkbaar het gedeelte der raaklijn voor, dat begrensd wordt door het raakpunt en het voetpunt der loodlijn p.

2. Uit de vergelijking (4) volgt door differentiatie

$$\frac{d^2p}{d\phi^2} = -x\sin\phi + \cos\phi\,\frac{dx}{d\phi} + y\cos\phi + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\phi}\sin\phi \quad . \quad 5)$$

dus is

$$\frac{d^2p}{d\phi^2} = -x\sin\phi + y\cos\phi + \sec\phi\,\frac{dx}{d\phi} \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Nu volgt uit

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\phi$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx}{d\phi} = \sec^2\phi.$$

Dus is

$$\frac{dx}{d\phi} = \mathrm{R}\cos\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

wanneer R den kromtestraal van het punt (x,y) voorstelt, zoodat, ook in verband met vergelijking (2)

$$\frac{d^2p}{d\phi^2} = \mathrm{R} - p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Dus is $\frac{d^2p}{d\phi^2}$ de afstand van het krommingsmiddelpunt tot het voetpunt van de loodlijn uit den oorsprong op de normaal.

Vraagstuk CLXXXIV.

D 3 a. Als $\mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ een functie is van $x + iy$, dan voldoen X en Y aan bekende partiëele differentiaalvergelijkingen der eerste en

tweede orde. Als $x + iy = re^{i\theta}$, $X + iY = Re^{i\Theta}$ wordt gesteld, vraagt men naar analoge betrekkingen voor R en Θ, als functies van r en θ.

Opgelost *door* H. B. Bone Jr., Dr. H. Bremekamp, W. H. L. Janssen van Raay, Dr. W. Kapteyn, Dr. J. G. Rutgers, Dr. F. Schuh, Dr. J. Stein, Dr. A. Toxopeus *en* Dr. W. A. Wijthoff.

Oplossing *van* Dr. W. A. Wijthoff.

Als $X + iY$ een functie is van $x + iy$, zal de logarithmus van $X + iY$ een functie zijn van den logarithmus van $x + iy$.

Nu is

$$l(X + iY) = l(Re^{i\Theta}) = lR + i\Theta,$$

$$l(x + iy) = l(re^{i\vartheta}) = lr + i\vartheta.$$

lR en Θ zullen dus, als functies van lr en ϑ beschouwd, aan dezelfde betrekkingen moeten voldoen, waaraan X en Y voldoen als functies van x en y.

Wij hebben dus de volgende differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

$$\frac{\partial(lR)}{\partial(lr)} = \frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta} \quad \text{en} \quad \frac{\partial(lR)}{\partial\vartheta} = -\frac{\partial\Theta}{\partial(lr)},$$

welke wij gemakkelijk herleiden tot:

$$r\frac{\partial R}{\partial r} = R\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta} \quad \text{en} \quad \frac{\partial R}{\partial\vartheta} = -Rr\frac{\partial\Theta}{\partial r}.$$

Verder hebben wij de volgende differentiaalvergelijking van de tweede orde

$$\frac{\partial^2(lR)}{\partial(lr)^2} + \frac{\partial^2(lR)}{\partial\vartheta^2} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial(lr)^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\vartheta^2} = 0,$$

welke te herleiden zijn tot

$$Rr^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} - r^2\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 + Rr\cdot\frac{\partial R}{\partial r} + R\frac{\partial^2 R}{\partial\vartheta^2} - \left(\frac{\partial R}{\partial\vartheta}\right)^2 = 0$$

en

$$r^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} + r\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\vartheta^2} = 0.$$

Vraagstuk CLXXXV.

A 1 b. Te bewijzen, dat men voor een oneven getal n heeft

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots\frac{n+1}{2}}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}} - \frac{(n-2)(n-3)\ldots\frac{n-1}{2}}{1!\,1.2\ldots\frac{n-3}{2}} +$$

$$\frac{(n-3)(n-4)\ldots\frac{n-3}{2}}{2!\,1.2.\ .\frac{n-5}{2}} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 1.$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. J. H. M. FALKENHAGEN, L. DE JONG, Dr. W. KAPTEYN, Dr. J. G. RUTGERS, Dr. J. STEIN, Dr. C. STOLP *en* Dr. W. A. WIJTHOFF.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Wanneer men in de functie

$$f(x) \equiv A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \text{enz.} + A_p$$

x telkens met de eenheid laat aangroeien, dan is het p^e verschil gelijk aan het p^e differentiaalquotiënt $A_0 p(p-1)\ldots 2.1$, dus

$$f(x+p) - \binom{p}{1} f(x+p-1) + \binom{p}{2} f(x+p-2) - \ldots +$$

$$+ (-1)^p f(x) = A_0 p!$$

Nemen wij voor $f(x)$ het product $x(x-1)(x-2.\ .(x-p+1)$ of, korter geschreven $x^{p/-1}$, dan is $A_0 = 1$. Denken we ons bovendien elken binomiaalcoëfficiënt $\binom{p}{k}$ geschreven in den vorm $\frac{p!}{k!(p-k)!}$, dan gaat de laatste vergelijking, na deeling door $p!$, over in

$$\frac{(x+p)^{p/-1}}{p!} - \frac{(x+p-1)^{p/-1}}{1!(p-1)!} + \frac{(x+p-2)^{p/-1}}{2!(p-2)!} - \ldots + (-1)^p \frac{x^{p/-1}}{p!} = 1,$$

Door hierin te stellen

$$x = p = \tfrac{1}{2}(n-1)$$

zal men de identieke vergelijking van het vraagstuk voor den dag zien komen.

Oplossing *van* Dr. J. STEIN.

Men kan deze reeks schrijven in den vorm

$$\frac{\Gamma n}{\left(\Gamma\frac{n+1}{2}\right)^2} \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-n; 1\right), \text{ indien}$$

$F(\alpha,\beta,\gamma; x)$ de hypergeometrische reeds $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \ldots$ voorstelt.

Nu is

$$F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-n; 1\right) = \lim_{\varepsilon=0} F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-n+\varepsilon; 1\right) =$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Gamma(1-n+\varepsilon)\Gamma\varepsilon}{\left(\Gamma\frac{1-n}{2}+\varepsilon\right)^2} = \frac{\left(\Gamma\frac{n+1}{2}\right)^2}{\Gamma n}, \text{ daar } \lim_{\varepsilon=0} \frac{\Gamma\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon-n+1)} = \Gamma n.$$

Vraagstuk CLXXXVI.

D 6 e. Heeft men voor kleine waarden van u

$$\left(u + \frac{1}{u}\right) f\left(u - \frac{1}{u}\right) = A_0 - A_1 u + A_2 u^2 - A_3 u^3 + \ldots$$

dan kan men de som bepalen van

$$A_0 I_0(z) + A_1 I_1(z) + A_2 I_2(z) + \ldots \ldots$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN *en* Dr. J. G. RUTGERS.

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Stelt men de waarde

$$I_n(z) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_r^+ e^{\frac{z}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)} u^{n-1} du,$$

waar de integraal in positieven zin wordt genomen, langs een cirkel met een straal r zoo klein als men wil, in de som

$$S = A_0 I_0(z) + A_1 I_1(z) + A_2 I_2(z) + \ldots\ldots,$$

dan gaat deze over in

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_r^+ e^{\frac{z}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)} (A_0 - A_1 u + A_2 u^2 - \ldots) \frac{du}{u}.$$

Stelt men nu $u - u^{-1} = t$, dan verandert de cirkel in een gesloten kromme C, die in negatieven zin wordt doorloopen, en men vindt

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_C^- e^{\frac{1}{2}zt} f(t)\, dt.$$

Vraagstuk CLXXXVII.

C 2 k. Als $f(x) = f(1 - x)$ is, heeft men

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}\pi x} = \int_0^1 f(x) \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\pi x\, dx,$$

indien deze integralen beteekenis hebben. (Dr. J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* H. B. BONE Jr., Dr. H. BREMEKAMP, Dr. J. H. M. FALKENHAGEN, J. H. KEYSERS, Dr. J. C. KLUYVER, L. DE JONG, Dr. J. G. RUTGERS, Dr. F. SCHUH, Dr. C. STOLP *en* Dr. W. A. WIJTHOFF.

Oplossing.

Als de eerste integraal bestaat, heeft men achtereenvolgens

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) \frac{dx}{\sin \frac{\pi x}{2}} = 2 \int_0^1 f(x) \frac{dx}{\sin \pi x} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \frac{dx}{\sin \pi x} + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(1-x) \frac{dx}{\sin \pi x} = \int_0^1 f(x) \frac{dx}{\sin \pi x} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left(\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right) f(x)\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 f(x) \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2}\, dx +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int_0^1 f(1-x) \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2}\, dx = \int_0^1 f(x) \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2}\, dx.$$

Vraagstuk CLXXXVIII.

A 1 b. Met de zoogenaamde getallen E van Euler, de coëfficienten der ontwikkeling

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \sum_1^\infty \frac{E_k}{2k!} x^{2k},$$

kan men de volgende veeltermen vormen:

$$N_0(x) = 1, \qquad N_0(x) = x,$$

$$N_2(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{E_1}{2!}, \qquad N_3(x) = \frac{x^3}{3!} - \frac{E_1}{2!} \frac{x}{1!},$$

$$N_4(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{E_1}{2!} \frac{x^2}{2!} + \frac{E_2}{4!}, \qquad N_5(x) = \frac{x^5}{5!} - \frac{E_1}{2!} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{E_2}{4!} \cdot \frac{x}{1!},$$

. . . . . .

Men vraagt te bewijzen

$$1^n - 3^n + 5^n + \ldots (-1)^k (2k+1)^n = \tfrac{1}{2} n! \left[N_n(0) + (-1)^k N_n(2k+2) \right]^{*)}.$$

(Dr. J. C. Kluyver.)

Opgelost *door* Dr. J. H. M. Falkenhagen, L. de Jong, J. H. Keysers, Dr. J. C. Kluyver, Dr. J. G. Rutgers, Dr. C. Stolp *en* Dr. W. A. Wijthoff.

Oplossing *van* Dr. J. H. M. Falkenhagen, L. de Jong, J. H. Keysers *en* Dr. J. C. Kluyver.

Wanneer men de uitdrukking

$$\frac{2e^{iv}}{e^v + e^{-v}} = \frac{e^{iv}}{\cos iv}$$

*) In de aanvankelijke opgave bevond zich eene onjuistheid.

naar opklimmende machten van v ontwikkelt, vindt men als coëfficienten veeltermen in y, die geen andere zijn dan de veeltermen $N_n(y)$ der opgave.

Uit de aldus verkregen vergelijking

$$\frac{2e^{yv}}{e^v+e^{-v}}=\frac{2e^{yv}}{e^{2v}+1}\,.\,e^v=1+\sum_1^\infty v^n N_n(y)$$

volgt voor $y=0$ en voor $y=2k+2$

$$\frac{1}{e^{2v}+1}\,.\,e^v=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sum_1^\infty v^n N_n(0),$$

$$\frac{e^{2v(k+1)}}{e^{2v}+1}\,.\,e^v=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sum_1^\infty v^n N_n(2k+2),$$

zoodat men heeft

$$\frac{1+(-1)^k e^{2v(k+1)}}{1+e^{2v}}\,.\,e^v=e^v-e^{3v}+e^{5v}-\ldots+(-1)^k e^{(2k+1)v}=$$

$$=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(-1)^k+\tfrac{1}{2}\sum_1^\infty v^n\,[N_n(0)+(-1)^k N_n(2k+2)].$$

Hieruit volgt het gevraagde, wanneer men beide leden n-maal naar v differentieert en daarna $v=0$ stelt. Men vindt

$$1^n-3^n+5^n-\ldots+(-1)^k(2k+1)^n=\tfrac{1}{2}n\,!\,[N_n(0)+(-1)^k N_n(2k+2)].$$

Opmerking van Dr. W. A. Wijthoff.

De volgende formule kan op dergelijke wijze worden afgeleid:

$$2^n-4^n+6^n-\ldots(-1)^{k-1}(2k)^n=\tfrac{1}{2}n\,!\,[N_n(1)+(-1)^{k-1}N_n(2k+1)].$$

Oplossing van Dr. C. Stolp.

De gewone herleidingsformule ter berekening van de getallen E is

$$E_q-\binom{2q}{2}E_{q-1}+\binom{2q}{4}E_{q-2}-\ldots+(-1)^q=0.$$

Na deeling van de vergelijking door $(-1)^q(2q)\,!$ neemt zij, bij omgekeerde rangschikking der termen, de volgende gedaante aan

$$\frac{1}{(2q)\,!}-\frac{E_1}{2\,!\,(2q-2)\,!}+\frac{E_2}{4\,!\,(2q-4)\,!}-\ldots+\frac{(-1)^q E_q}{(2q)\,!}=0.$$

Het eerste lid is nu niets anders dan de even functie $N_{2q}(x)$ voor $x = +1$ of $x = -1$. Men kan dus naar verkiezing schrijven $N_{2q}(1) = 0$, $N_{2q}(-1) = 0$ of wel

$$N_{2q}(1) + N_{2q}(-1) = 0.$$

De veeltermen $N_{2q-1}(x)$ bevatten alleen termen van *oneven* graad, zoodat men voor elke waarde van n heeft

$$N_{2q-1}(x) + N_{2q-1}(-x) = 0.$$

Stelt men hierin $x = 1$ en let men op de voorgaande vergelijking, dan ziet men, dat voor *even* en *oneven* waarden van p

$$N_p(1) + N_p(-1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Herhaalde differentiatie van de functie $N_p(x)$ geeft, zooals licht is in te zien, $N'_p(x) = N_{p-1}(x)$, $N''_p(x) = N_{p-2}(x)$, enz.

Ontwikkelt men, hiervan gebruik makende, $N_p(1+x)$ en $N_p(-1+x)$ naar de opklimmende machten van x, dan zal men vinden

$$N_p(1+x) = N_p(1) + N_{p-1}(1)\frac{x}{1!} + N_{p-2}(1)\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^p}{p!},$$

$$N_p(-1+x) = N_p(-1) + N_{p-1}(-1)\frac{x}{1!} + N_{p-2}(-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^p}{p!}.$$

Telt men deze vergelijkingen onder toepassing van (1) bij elkaar op, dan krijgt men

$$N_p(1+x) + N_p(-1+x) = \frac{2x^p}{p!}$$

of ook

$$x^p = \tfrac{1}{2}\, p!\, [N_p(-1+x) + N_p(1+x)]. \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

In deze vergelijking schrijven wij n voor p en substitueeren daarin voor x achtereenvolgens de waarden $1, 3, 5 \ldots (2k+1)$, daarbij de tweede, de vierde vergelijking, enz. met (-1) vermenigvuldigende. Er komt dan

$$+1^n = \tfrac{1}{2} n!\, [N_n(0) + N_n(2)],$$

$$-3^n = \tfrac{1}{2} n!\, [-N_n(2) - N_n(4)],$$

$$+5^n = \tfrac{1}{2} n!\, [+N_n(4) + N_n(6)] \ldots,$$

$$(-1)^k (2k+1)^n = \tfrac{1}{2} n!\, [(-1)^k N_n(2k) + (-1)^k N_n(2k+2)].$$

Deze vergelijkingen bij elkaar optellende heeft men

$$1^n - 3^n + 5^n - \ldots + (-1)^k (2k+1)^n = \tfrac{1}{2} n! \left[N_n(0) + (-1)^k N_n(2k+2) \right].$$

OPMERKING. Verscheidene veeltermen, waaronder

$$n!\, N_n(x) \equiv x^n - \binom{n}{2} E_1 x^{n-2} + \binom{n}{4} E_2 x^{n-4} - \text{ enz.}$$

die verschillende constanten bevatten, als tangenten- en cosecanten-coëfficiënten, Bernouillaansche coëfficiënten, zijn een vijf en twintig jaar geleden door mij in hun onderling verband beschouwd in een opstel: *De ontwikkeling van functiën door gedeeltelijke integratie*, Nieuw Archief (1e Reeks), Deel X, blz. 81—97. De aldaar op bladz. 86 voorkomende formule (30)

$$\psi_1(z, p) + \psi_1(z+1, p) = 2z^p$$

komt met formule 2) in de oplossing van dit vraagstuk overeen. Zij

$$M_n(x) \equiv \frac{x^n}{n!} - \frac{T_1 x^{n-1}}{1!\,(n-1)!} + \frac{T_3 x^{n-3}}{3!\,(n-3)!} - \text{ enz.},$$

waarin $T_1 = 1$, $T_3 = 2$, $T_5 = 16$, $T_7 = 272$, enz. de tangenten-coëfficienten aanduiden. Weet men nu, dat

$$M_n(x+1) = N_n(x),$$

dan is het duidelijk, dat de uitkomst van ons vraagstuk ook aldus kan worden weergegeven

$$1^n - 3^n + 5^n - \ldots + (-1)^k (2k+1)^n = \tfrac{1}{2} n! \left[M_n(1) + (-1)^k M_n(2k+3) \right].$$

Vraagstuk CLXXXIX.

J 1 b. Een ketting van n schalmen is aan de einden vast. Dieven verbreken p schalmen en bekomen daardoor $(p-1)$ kettingen, elk van minstens k schalmen. Op hoeveel wijzen kunnen zij die p schalmen kiezen? (W. MANTEL.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, W. MANTEL, Dr. F. SCHUH *en* Dr. W. A. WIJTHOFF.

Oplossing *van* Dr. W. A. WIJTHOFF.

Nummeren wij de schalmen naar volgorde 1, 2, 3 . . . . . n, dan komt het vraagstuk hierop neer, dat wij p dezer getallen

zóó hebben uit te kiezen, dat elk tweetal opeenvolgende getallen een verschil van minstens $k+1$ bezit.

Zijn $a_1, a_2 \ldots\ldots a_p$, naar volgorde hunner grootte, de getallen die bij een mogelijke verbrekingswijze behooren, dan is dus

$$a_{q+1} \geqq a_q + k + 1.$$

Wij beschouwen nu de getallen

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 &= a_2 - k, \\ b_3 &= a_3 - 2k, \\ &\text{enz.} \\ b_p &= a_p - (p-1)k; \end{aligned}$$

zij vormen ook een opklimmende reeks, waarvan nu echter elk tweetal opeenvolgende getallen geen grooter verschil dan 1 behoeft te bezitten. Immers uit $a_{q+1} \geqq a_q + k + 1$ volgt

$$b_{q+1} + qk \geqq b_q + qk + 1,$$

dus is

$$b_{q+1} \geqq b_q + 1.$$

Het getal b_p (het grootste der b's) kan niet grooter zijn dan $n-(p-1)k$.

Omgekeerd blijkt onmiddellijk, dat elke combinatie van p verschillende getallen waarvan het grootste niet grooter is dan $n-(p-1)k$, naar volgorde gerangschikt, als b-reeks kan dienen, en altijd, maar ook slechts op één wijze, een a-reeks kan opleveren die aan de eischen voldoet.

Het aantal mogelijke verbrekingswijzen is dus gelijk aan het aantal combinaties van p elementen die gevormd kunnen worden uit $n-(p-1)k$ elementen, en is dus

$$\frac{\{n-(p-1)k\}\{n-(p-1)k-1\}\ldots\{n-(p-1)(k+1)\}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots p}.$$

Vraagstuk CXC.

K 20 d. Als p een ondeelbaar getal voorstelt, dat bij deeling door 4 de rest 1 laat, dan is

$$\operatorname{ctg}\frac{1^2\pi}{2p} - \operatorname{tg}\frac{2^2\pi}{2p} + \operatorname{ctg}\frac{3^2\pi}{2p} - \ldots - \operatorname{tg}\frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\pi}{2p} = 0.$$

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* Dr. J. H. M. FALKENHAGEN, W. MANTEL, Dr. J. STEIN *en* Dr. W. A. WIJTHOFF.

Oplossing.

De getallen van 1 tot $\frac{p-1}{2}$ leveren, in het vierkant verheven, met betrekking tot den modulus p, de gezamenlijke $\frac{1}{2}(p-1)$ quadraatresten van p elk éénmaal op. Deze quadraatresten zijn de wortels der bekende congruentie

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Laat p, zooals ondersteld wordt, bij deeling door 4 de rest 1, dan is $\frac{1}{2}(p-1)$ een *even* getal. Hieruit volgt, dat als x_1 een wortel van deze congruentie is, $-x_1$ of, wat op hetzelfde neerkomt, $p-x_1$ een tweede wortel zal zijn. De $\frac{1}{2}(p-1)$ quadraatresten van p zijn dus te splitsen in $\frac{1}{4}(p-1)$ tweetallen zóó dat voor de beide tot één tweetal behoorende quadraatresten telkens de betrekking

$$x_1 + x_2 \equiv 0 \pmod{p}$$

geldt. En daar bij elke quadraatrest een der getallen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ behoort, zijn ook deze getallen te splitsen in $\frac{1}{4}(p-1)$ tweetallen, die telkens voldoen aan de betrekking

$$a_1^2 + a_2^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wij denken ons nu deze splitsing volbracht, en voegen telkens de met twee bijbehoorende getallen a_1 en a_2 overeenkomende termen van de gegeven reeks bijeen. Wij kunnen dan drie gevallen onderscheiden.

I. a_1 en a_2 zijn beide *oneven*.

De overeenkomstige termen van de reeks zijn dan

$$\operatorname{ctg}\frac{a_1^2\pi}{2p} + \operatorname{ctg}\frac{a_2^2\pi}{2p}.$$

$a_1^2 + a_2^2$ is een veelvoud van p. Het is bovendien een even getal, dus een veelvoud van $2p$. Dus is $\frac{a_1^2\pi}{2p} + \frac{a_2^2\pi}{2p}$ een veel-

voud van π. Hieruit volgt, dat de beide cotangenten slechts in teeken verschillen, dus een som 0 opleveren.

II. a_1 en a_2 zijn beide *even*.

De overeenkomstige termen der reeks zijn

$$-\left\{\operatorname{tg}\frac{a_1^2\pi}{2p}+\operatorname{tg}\frac{a_2^2\pi}{2p}\right\}.$$

$a_1^2+a_2^2$ is ook in dit geval een even getal, dus een veelvoud van $2p$. Dus is weder $\frac{a_1^2\pi}{2p}+\frac{a_2^2\pi}{2p}$ een veelvoud van π. Hieruit volgt, dat de beide tangenten slechts in teeken verschillen, dus een som 0 opleveren.

III. Een der beide getallen, a_1, is *oneven*, het andere, a_2, *even*.

De overeenkomstige termen der reeks zijn nu

$$\operatorname{ctg}\frac{a_1^2\pi}{2p}-\operatorname{tg}\frac{a_2^2\pi}{2p}.$$

In dit geval is $a_1^2+a_2^2$ een oneven veelvoud van p, dus $\frac{a_1^2\pi}{2p}+\frac{a_2^2\pi}{2p}$ een oneven veelvoud van $\frac{1}{2}\pi$. De cotangens van den eenen en de tangens van den anderen hoek zijn dus aan elkaar gelijk en leveren dus een verschil 0 op.

De gezamenlijke termen van de reeks vallen dus twee aan twee tegen elkaar weg, waaruit volgt, dat haar som gelijk aan nul is.

Vraagstuk CXCI.

K 13 b. Als de vlakken door de ribben a_k van drievlakkenhoek A loodrecht op de vlakken β_k van drievlakkenhoek B door één rechte gaan, dan snijden de vlakken door de ribben b_k van B loodrecht op de vlakken α_k van A elkaar ook volgens een rechte. Men vraagt een meetkundig bewijs van deze in de oplossing van vraagstuk 76 genoemde stelling. (W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, W. MANTEL *en* Dr. W. A. WIJTHOFF.

Oplossing *van* W. MANTEL.

We brengen de toppen der bedoelde drievlakshoeken A en B door translatie naar eenzelfde punt over en beschouwen hun supplementaire drievlakshoeken A′ en B′.

Wijzen we de ribben aan door a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 enz., dan volgt uit de onderstelling dat de vlakken (a_1b_1'), (a_2b_2') en (a_3b_3') door een rechte gaan, zoodat de drievlakshoeken A en B′ perspectief liggen. Derhalve liggen de drie rechten $c_1 \equiv (a_2a_3,\ b_2'b_3')$, $c_2 \equiv (a_3a_1,\ b_3'b_1')$, $c_3 \equiv (a_1a_2,\ b_1'b_2')$ in één vlak; zij n een loodlijn op dit vlak.

Nu is c_1 loodrecht op n, en tevens, als rechte van het vlak $b_2'b_3'$, loodrecht op b_1, dus loodrecht op het vlak (b_1n). Maar dan is het vlak (a_2a_3) loodrecht op (b_1n). Evenzoo zijn (a_3a_1) en (a_1a_2) loodrecht op (b_2n) en (b_3n). Dus gaan de vlakken, die b_1, b_2, b_3 loodrecht op (a_2a_3), (a_3a_1), (a_1a_2) projecteeren, door een rechte.

Vraagstuk CXCII.

P 1 b α. Wanneer twee krommen C en C_1 in elkander worden omgezet door de transformatie

$$x_1 = \frac{x}{mx + ny},\ y_1 = \frac{px + n}{mx + ny},$$

dan snijden de raaklijnen in overeenkomstige punten de Y-as in twee punten T en T_1 zoodat $\overline{OT} \,.\, \overline{OT_1}$, standvastig is.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, H. B. BONE JR., Dr. H. BREMEKAMP, Mej. Dr. A. A. DALHUISEN, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, L. DE JONG *en* Dr. F. SCHUH.

Oplossing *van* H. B. BONE JR.

De transformatie is projectief, zet dus de raaklijnen van C en C_1 in overeenkomstige punten in elkaar om. Daar uit $x = 0$ volgt $x_1 = 0$, gaat de Y-as in zich zelve over. Derhalve gaan ook de punten T en T_1 in elkaar over. Nu levert de tweede vergelijking der transformatie voor $x = 0$ de betrekking $yy_1 = 1$; bijgevolg is $\overline{OT} \,.\, \overline{OT_1} = 1$.

Vraagstuk CXCIII.

M³ 5 a. Het vlak π, dat om een as wentelt, snijdt de rechten a, b, c in de punten A, B, C. De vlakken α, β, γ staan in deze punten loodrecht op a, b, c. Men vraagt naar de meetkundige plaats van het snijpunt van α, β, γ. (J. NEUBERG)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, H. B. BONE JR., W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, Dr. F. SCHUH *en* Dr. A. TOXOPEUS.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

1. Zijn l, m en n de lijnen in het oneindige der vlakken α, β, γ, dan beschrijven de vlakken α, β, γ drie projectieve vlakkenbundels, waarvan l, m en n de dragers zijn. Hieruit volgt onmiddellijk, dat de meetkundige plaats van het snijpunt P der vlakken α, β, γ een kubische ruimtekromme is, gaande door de hoekpunten D, E, F van den door de rechten l, m, n gevormden driehoek. De kromme heeft dus drie bestaanbare punten in het oneindige, zoodat ze uit elk van haar oneindig ver gelegen punten door een hyperbolischen cylinder geprojecteerd wordt, m. a. w. *de meetkundige plaats is een kubische hyperbool.*

De drie hyperbolische cylinders, waarop de kromme ligt, zijn de meetkundige plaatsen der snijlijnen van twee der drie vlakken α, β, γ. Twee dezer cylinders hebben een der rechten l, m, n en de kubische hyperbool gemeen.

De raaklijnen der kromme in hare punten D, E, F in het oneindige zijn gemakkelijk aan te geven. De raaklijn in D is n.l. de snijlijn der beide vlakken β en γ voor een vlak π, dat evenwijdig aan a is (het punt A ligt dan in het oneindige, terwijl α het vlak in het oneindige is). Evenzoo voor de raaklijnen in E en F.

De as p, waarom π wentelt, en de rechten a, b, c hebben in het algemeen geen punt met de kromme gemeen.

2. De vergelijkingen der meetkundige plaats zijn gemakkelijk op te maken. Daartoe nemen we de as p, waarom π wentelt, als Z-as van een rechthoekig coördinatenstelsel aan. Zijn

$$y = a_1 x + a_2, \quad z = a_3 x + a_4$$

de vergelijkingen der rechte a, terwijl men die van b en c vindt als men a_k door b_k of c_k vervangt, en is $y = \lambda x$ de vergelijking van het vlak π, dan zijn de coördinaten van het punt A

$$x = \frac{a_2}{\lambda - a}, \quad y = \frac{a_2\lambda}{\lambda - a_1}, \quad z = \frac{\lambda a_4 + a_2 a_3 - a_1 a_4}{\lambda - a_1}.$$

De vergelijking van het vlak α is dus

$$x - \frac{a_2}{\lambda - a_1} + \left(y - \frac{a_2\lambda}{\lambda - a_1}\right) a_1 + \left(z - \frac{\lambda a_4 + a_2 a_3 - a_1 a_4}{\lambda - a_1}\right) a_3 = 0,$$

of

$$\lambda(x + a_1 y + a_3 z - a_1 a_2 - a_3 a_4) = a_1(x + a_1 y + a_3 z) + a_2 + a_2 a_3^2 - a_1 a_3 a_4 = 0.$$

Door letterverwisseling vindt men de vergelijkingen der vlakken β en γ. Door uit de drie zoo verkregen vergelijkingen x, y en z op te lossen vindt men de parametervoorstelling der kromme; men vindt x, y en z als quotienten van twee geheele kubische functies van λ met gemeenschappelijken noemer. Door λ telkens uit twee der vergelijkingen te elimineeren vindt men de vergelijkingen der hyperbolische cylinders, waarop de kromme ligt, die ook als de vergelijkingen der kromme zijn op te vatten. Zij zijn begrepen in

$$\begin{Vmatrix} x + a_1 y + a_3 z - a_1 a_2 - a_3 a_4 & a_1(x + a_1 y + a_3 z - a_3 a_4) + a_2(1 + a_3^2) \\ x + b_1 y + b_3 z - b_1 b_2 - b_3 b_4 & b_1(x + b_1 y + b_3 z - b_3 b_4) + b_2(1 + b_3^2) \\ x + c_1 y + c_3 z - c_1 c_2 - c_3 c_4 & c_1(x + c_1 y + c_3 z - c_3 c_4) + c_2(1 + c_3^2) \end{Vmatrix} = 0.$$

OPMERKING. Als c de as p snijdt in C_0 dan ontaardt de kubische hyperbool in een hyperbool, gelegen in het vlak γ_0 dat in C_0 loodrecht op c staat, en de doorsnede der vlakken α, β, die a en b loodrecht snijden in de punten welke ze met het vlak cp gemeen hebben.

Vraagstuk CXCIV.

P 6 f. Bepaal de transformatieformules

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = \phi(x, y)$$

welke elke kromme zoodanig in een andere omzetten, dat voor overeenkomstige punten de snijpunten N en N_1 der normalen met de X-as aan de betrekking $\overline{ON} \cdot \overline{ON_1} = \text{const.}$ voldoen.

Opgelost *door* C. VAN ALLER, H. B. BONE Jr. *en* Dr. F. SCHUH.

Oplossing *van* H. B. Bone Jr.

Zijn de coördinaatassen rechthoekig met O als oorsprong, dan is

$$ON = x + yp, \quad ON_1 = x_1 + y_1 p_1,$$

alwaar $p = \frac{dy}{dx}$, $p_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$. Dus moet $(x + yp)(x_1 + y_1 p_1) = \text{const.}$ zijn, of

$$(x + yp)\left(x_1 + y_1 \frac{\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial y_1}{dy} p}{\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial y} p}\right) = \text{const.},$$

dat is:

$$(x + yp)\frac{x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + p\left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + y_1 \frac{\partial y_1}{\partial y}\right)}{\frac{\partial x_1}{\partial x} + p \frac{\partial x_1}{\partial y}} = \text{const}$$

of wel:

$$(x + yp)\frac{\frac{\partial(x_1^2 + y_1^2)}{\partial x} + p \frac{\partial(x_1^2 + y_1^2)}{\partial y}}{\frac{\partial x_1}{\partial x} + p \frac{\partial x_1}{\partial y}} = \text{const.} \quad . \quad . \quad 1)$$

In 't eerste lid van deze vergelijking kan men nu x, y en p onafhankelijk van elkaar willekeurig kiezen. Nemen we nu eerst bepaalde waarden voor x en y, dus ook voor x_1, y_1, $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_1}{\partial y}, \frac{\partial y_1}{\partial x}, \frac{\partial y_1}{\partial y}$, dan moet 't eerste lid van 1) dus onafhankelijk van p zijn.

Daar nu de noemer der breuk lineair in p is, moet de teller dit ook zijn, dus de term in p^2 uit den teller verdwijnen, d. i.

$$\frac{\partial(x_1^2 + y_1^2)}{\partial y} = 0 \quad \text{of} \quad x_1^2 + y_1^2 = F(x) \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

waarin F een nog onbekende functie beteekent.

Dit invoerende krijgen we uit (1):

$$\frac{x + yp}{\frac{\partial x_1}{\partial x} + p \frac{\partial x_1}{\partial y}} \cdot \frac{\partial(x_1^2 + y_1^2)}{\partial x} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Opdat hier het eerste lid onafhankelijk van p zij, is noodig en voldoende, dat men heeft

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial x}}{x} = \frac{\frac{\partial x_1}{\partial y}}{y}$$

is, dus

$$x_1 = \Phi(x^2 + y^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta)$$

waarin Φ een nog onbekende functie beteekent.

Nu krijgen we uit 2):

$$\frac{x}{\frac{\partial x_1}{\partial x}} \cdot \frac{\partial (x_1^2 + y_1^2)}{\partial x} = \text{const.} \quad \text{of} \quad \frac{x F'(x)}{\frac{\partial x_1}{\partial x}} = \text{const.} \quad . \quad . \quad 3)$$

Hieruit volgt, dat $\frac{\partial x_1}{\partial x}$ enkel van x afhangt, zoodat, volgens β) $2x\Phi'(x^2 + y^2)$ enkel een functie van x is. Bijgevolg is $\Phi'(x^2 + y^2) = \frac{1}{a}$ waar a constant is. Dus is

$$\Phi(x^2 + y^2) = \frac{x^2 + y^2}{a} + b,$$

of

$$x_1 = \frac{x^2 + y^2}{a} + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Dit in 3) substitueerende, krijgen we: $F'(x) = \text{const.}$, dus $F(x) = c(x - d)$, waar c en d willekeurige constanten zijn; dus is volgens α)

$$x = \frac{x_1^2 + y_1^2}{c} + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

De vergelijkingen 4) en 5) bepalen de transformatie; a, b, c en d zijn willekeurige constanten.

Om verg. 5) in den geeischten vorm te brengen zou y_1 opgelost en voor x_1 de uitdrukking uit 4) gesubstitueerd moeten worden.

Opmerking. De vergelijkingen α) en β) beteekenen, dat rechte lijnen evenwijdig met OY overgaan in cirkels met O tot centrum en omgekeerd, wat meetkundig te voorspellen was.

Vraagstuk CXCV.

P 6 f. Bepaal de transformaties in poolcoördinaten van den vorm

$$r_1 = f(r, \theta), \ \theta_1 = \phi(r, \theta)$$

welke een kromme zoodanig in een andere omzetten, dat voor overeenkomstige punten het product der subnormalen of het product der subtangenten of het product van de subnormaal van P en de subtangens van P_1 een standvastige waarde heeft.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* H. B. BONE JR. *en* DR. F. SCHUH.

Oplossing *van* H. B. BONE JR.

I. Opdat 't product der subnormalen constant zij moet

$$\frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{dr_1}{d\phi_1} = \text{const.} \quad \text{of}$$

$$\frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{\dfrac{\partial r_1}{d\phi} + \dfrac{\partial r_1}{\partial r} \cdot \dfrac{dr}{d\phi}}{\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \phi} + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial r} \cdot \dfrac{dr}{d\phi}} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

De voorwaarde, dat het 1e lid bij gegeven r en ϕ, en dus bepaalde r_1, ϕ_1, $\dfrac{\partial r_1}{\partial \phi}$, $\dfrac{\partial r_1}{\partial r}$, $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \phi}$, $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial r}$, onafhankelijk zij van $\dfrac{dr}{d\phi}$, levert dat de teller, evenals de noemer, lineair moet zijn in $\dfrac{dr}{d\phi}$. Dus is $\dfrac{\partial r_1}{\partial r} = 0$ of $r_1 = F(\phi)$, waarin F een nog onbepaalde functie beteekent.

Nu wordt de vergelijking 1)

$$\frac{\dfrac{\partial r_1}{\partial \phi} \cdot \dfrac{dr}{d\phi}}{\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \phi} + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial r} \cdot \dfrac{dr}{d\phi}} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

en opdat dit het geval zij, moet de noemer, evenals de teller, evenredig zijn met $\dfrac{dr}{d\phi}$. Dus is $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \phi} = 0$ of $\phi_1 = G(r)$, waarin G een nog onbepaald functie voorstelt.

Vergelijking 2) wordt nu

$$\frac{\dfrac{\partial r_1}{\partial \phi}}{\dfrac{\partial \phi_1}{\partial r}} = \text{const. of } \frac{F'(\phi)}{G'(r)} = \text{const., waaruit volgt: } F'(\phi) = \text{const.} = a,$$

$G'(r) = \text{const.} = b$, of $F(\phi) = a\phi + b$, $G(r) = cr + d$, waarin ook b en d willekeurige constanten zijn.

De gezochte transformaties hebben dus den vorm

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a\phi + b \\ \phi_1 &= cr + d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

en 't is duidelijk, dat ook alle transformaties van dezen vorm aan den eisch voldoen.

II. De voorwaarde dat 't product der subtangenten constant zij, luidt:

$$\frac{1}{r^2 r_1^2} \frac{dr}{d\phi} \frac{dr_1}{d\phi_1} = \text{const.}$$

of

$$\frac{1}{r^2 r_1^2} \cdot \frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{\dfrac{\partial r_1}{\partial \phi} + \dfrac{\partial r_1}{\partial r} \cdot \dfrac{dr}{d\phi}}{\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \phi} + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial r} \cdot \dfrac{dr}{d\phi}} = \text{const.} \quad \ldots\ldots \quad 4).$$

Op dezelfde wijze als onder I leiden we hieruit af dat $r_1 = F(\phi)$, $\phi_1 = G(r)$ is. Als we dit in 4) invoeren, vinden we $\dfrac{1}{r^2[(\phi)]^2} \dfrac{F'(\phi)}{G'(r)} = \text{const.}$

Dus is

$$\frac{F'(\phi)}{[F(\phi)]^2} = \text{const. en} \quad r^2 G'(r) = \text{const.}$$

Hieruit volgt

$$F(\phi) = \frac{1}{a\phi + b}, \quad G(r) = \frac{c}{r} + d,$$

waarin a, b, c, d willekeurige constanten zijn.

De gezochte transformaties zijn dus vervat in de formules

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{a\phi + b} \\ \phi_1 &= \frac{c}{r} + d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Blijkbaar voldoen alle transformaties 5) aan de vraag.

Zoowel voor I als II geldt de opmerking, dat de gevonden transformaties de rechten door den oorsprong in cirkels met middelpunt in den oorsprong omzetten en omgekeerd, wat meetkundig te voorzien was.

III. Opdat 't product van de subnormaal van P en de subtangens van P_1 const. zij, moet

$$\frac{dr}{d\phi} \cdot \frac{r_1^2}{\frac{dr_1}{d\phi_1}} = \text{const.}$$

of

$$\frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{\frac{\partial r_1}{\partial \phi} + \frac{\partial r_1}{\partial r} \cdot \frac{dr}{d\phi}}{\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi} + \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \cdot \frac{dr}{d\phi}} \cdot \frac{1}{\frac{dr}{d\phi}} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

De voorwaarde, dat deze verg. bij gegeven r en ϕ voor alle waarden van $\frac{dr}{d\phi}$ geldt, levert $\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial r_1}{\partial \phi} = 0$ dus

$$r_1 = F(r) \text{ en } \phi_1 = G(\phi).$$

Dit in 6) substitueerende vindt men

$$[F(r)]^{-2} \frac{F'(r)}{G'(\phi)} = \text{const.}$$

Dus is

$$\frac{F'(r)}{[F(r)]^2} = \text{const. en} \quad G'(\phi) = \text{const.}$$

Hieruit volgt

$$F(r) = \frac{1}{cr + d}, \quad G(\phi) = a\phi + b,$$

waar a, b, c, d willekeurige constanten zijn.

Alzoo stellen de formules

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{cr + d} \\ \phi_1 &= a\phi + b \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

de gezochte transformaties voor.

Cirkels om den oorsprong als middelpunt gaan in even zulke cirkels, rechten door den oorsprong in even zulke rechten over en omgekeerd, wat meetkundig te voorzien was.

Vraagstuk CXCVI.

N° 1 d. Gegeven zijn twee onderling loodrechte projectievlakken. Onderzoek de congruentie der stralen, welke elk de projecties van een tot een gegeven vlak behoorend punt met elkaar verbinden.

(Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* H. B. BONE JR., Dr. P. H. SCHOUTE, Dr. F. SCHUH, Dr. A. TOXOPEUS *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES.

1. Wij noemen den horizontalen doorgang van het gegeven vlak d_1, den vertikalen d_2, en hun snijpunt O. Door O brengen wij het derde projectievlak, en de oneindig ver gelegen rechte van dit vlak noemen wij l_∞. Het is dan in de eerste plaats duidelijk dat alle stralen der te onderzoeken congruentie de as van projectie loodrecht kruisen, dus l_∞ snijden. Verder is gemakkelijk in te zien dat het punt O een uitzonderingspunt is; immers, daar de beide projecties van dit punt samenvallen, wordt hun verbindingslijn volkomen onbepaald, zoodat de volledige congruentie uiteenvalt in de stralenschoof aan het punt O en eene andere congruentie; wij zullen ons verder alleen met deze laatste bezighouden.

2. Een willekeurig vlak loodrecht op de as van projectie wordt door de beide projectievlakken en het gegeven vlak ε gesneden volgens een rechthoekigen driehoek ABC, waarbij A op d_1 en B op d_2 ligt; nemen wij dan van een willekeurig punt P van AB de beide projecties P′ en P″, dan is $s = P'P''$ een straal der congruentie. Doorloopt P de lijn AB, dan worden blijkbaar P′ en P″ gerangschikt in twee projectieve puntenreeksen, waarvan de oneindig ver gelegen punten aan elkaar zijn toegevoegd, terwijl, wanneer P′ met C samenvalt, P″ in B komt te liggen, en omgekeerd, wanneer P″ in C ligt, P′ op A valt.

Hieruit volgt: *de stralen der congruentie in een vlak loodrecht op de as van projectie omhullen eene parabool, die de beide projectievlakken aanraakt in punten van* d_1 *en* d_2.

Al deze vlakken zijn dus voor de congruentie *singuliere vlakken*, en wel van den graad 2.

De asrichting der zooeven gevonden parabool vindt men gemakkelijk indien men de beide rechten CA en CB door l_∞ aanvult tot een om de parabool beschreven driehoek, en dan de eigenschap toepast dat de verbindingslijnen der hoekpunten met de op de tegenoverliggende zijden gelegen raakpunten door één punt moeten gaan; de uitkomst is dat de asrichting wordt aangewezen door de mediaan CM van driehoek ABC. Neemt men P juist in het midden M van AB, dan wordt P'P''//AB, en het raakpunt valt op CM; dit volgt uit dezelfde stelling, toegepast op $\triangle$ AP'P''.

3. Verplaatsen wij het singuliere vlak evenwijdig aan zich zelf, dan vinden wij in iederen nieuwen stand eene figuur die voor het gelijkvormigheidspunt O gelijkvormig en gelijkstandig is met de eerst beschouwde. Alle zoo verkregen parabolen liggen op een quadratischen kegel met top in O, die het eerste en tweede projectievlak aanraakt volgens d_1 en d_2, en het derde volgens de rechte door O die de gemeenschappelijke asrichting van alle parabolen bevat. De lijn l_∞ raakt den kegel in het oneindige aan, en de stralen onzer congruentie zijn niets anders dan de raaklijnen van den kegel die op l_∞ rusten (met uitzondering van die rechten in het derde projectievlak die niet door O gaan). Iedere straal der congruentie wordt door den onmiddellijk voorafgaanden en onmiddellijk volgenden gesneden in een punt dat oneindig weinig van het raakpunt met den kegel verschilt; de beide brandpunten vallen dus met dit raakpunt samen, en de kegel stelt het *focaaloppervlak* der congruentie voor.

De punten van l_∞ zijn singuliere punten van den eersten graad. Door ieder punt van l_∞ gaat n.l., afgezien van het derde projectievlak, slechts één raakvlak aan den kegel; de stralen in dit vlak en door het punt van l_∞ zijn stralen der congruentie; zij vormen een waaier met oneindig ver gelegen centrum.

4. De congruentie is van den *graad* 2 en de *klasse* 1. Immers het vlak door een willekeurig punt P en l_∞ snijdt den kegel volgens eene parabool, en aan deze kan men uit P twee raaklijnen trekken. Omgekeerd snijdt een willekeurig vlak α den kegel volgens eene kegelsnede, en l_∞ in een punt L_∞; nu gaan wel is waar door L_∞ twee raaklijnen aan die kegelsnede, maar daarvan behoort de eene, daar ze in het derde

projectievlak ligt zonder door O te gaan, niet tot de congruentie.

Deze uitkomsten zijn in overeenstemming met de algemeene stelling dat de verbindingslijnen der puntenparen van twee collineaire puntenvelden eene congruentie (3, 1) vormen*); indien wij de *volledige* congruentie beschouwen, dan moet aan de beide stralen door een punt P, die wij zooeven vonden, nog de straal door O worden toegevoegd.

De *rang* der congruentie, d. w. z. het aantal stralenparen die met eene willekeurige rechte g tot eenzelfden waaier behooren, is nul; immers door ieder punt van g gaan twee stralen s, doch deze liggen steeds in een vlak door l_∞, en dit vlak bevat de lijn g niet.

5. Wij toonen ten slotte nog aan hoe men graad en klasse der congruentie rechtstreeks kan vinden, d. w. z. zonder gebruik te maken van den quadratischen kegel. Wij brengen door een willekeurig punt Q en l_∞ een vlak, laten hierin een straal om Q draaien en noemen de snijpunten met CA en CB, A_1 en A_2. Deze punten brengen door hunne beweging op CA en CB twee perspectieve puntenreeksen voort; trekken wij dus door A_1 eene lijn // CB, en door A_2 eene lijn // CA, dan zal het snijpunt P eene orthogonale hyperbool beschrijven, die door C gaat en waarvan de asymptoten door Q gaan en evenwijdig loopen aan CA en CB; de snijpunten dezer hyperbool met AB zijn blijkbaar de punten P, behoorende bij de congruentiestralen die door Q gaan.

De klasse daarentegen vinden wij als volgt. Wij nemen een willekeurig vlak aan, en noemen de doorgangen l_1 en l_2. Indien nu de loodlijn, in een zeker punt P′ van l_1 op het horizontale projectievlak opgericht, het vlak ε zoodanig in een punt P snijdt dat P″ op l_2 valt, dan is P′P″ een straal der congruentie in het willekeurige vlak $l_1 l_2$. Wij richten dus in *alle* punten van l_1 de loodlijnen op, d. w. z. wij brengen door l_1 het horizontaal projecteerend vlak, snijden dit met ε, en projecteeren de snijlijn op het vertikale projectievlak. Door het snijpunt dezer projectie en l_2 gaat dan de eenige straal der congruentie die in het vlak $l_1 l_2$ ligt.

---

*) Zie bijv. Reye „Geom. d. Lage", 3e Aufl. Bd. II, S. 202.

Vraagstuk CXCVII.

M² 3 a. Trekt men in het vlak ε van het voorgaande vraagstuk een willekeurige rechte, dan vormen de door haar punten aangewezen congruentiestralen een hyperbolische paraboloïde. Door een gegeven rechte brengt men raakvlakken aan de ∞^2 paraboloïden welke bij de rechten van ε behooren. Bepaal den graad van de meetkundige plaats der raakpunten. (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE, Dr. F. SCHUH, Dr. A. TOXOPEUS *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. F. SCHUH.

De straal s, die de projecties P′ en P″ van een punt P der in het gegeven vlak ε gelegen rechte l verbindt, rust op de projecties l' en l'' van l en is evenwijdig aan het derde projectievlak. Dus beschrijft s een hyperbolische paraboloide $(HP)_l$ als P de rechte l doorloopt.

Een raakvlak door de willekeurige rechte r aan $(HP)_l$ bevat een beschrijvende lijn s die r snijdt; zij P het punt, waaruit s is afgeleid. Draait men l in ε om P, dan blijft s behouden, maar de plaats van het raakpunt op s verandert. Dus is de meetkundige plaats der raakpunten van de raakvlakken door r aan de oppervlakken (HP) tevens de meetkundige plaats der congruentiestralen s, die op r rusten.

Daar elk punt van r twee stralen s draagt, terwijl een vlak door r slechts een straal bevat, is de bedoelde meetkundige plaats een *kubisch regelvlak* met dubbelrechte r en de oneindig ver gelegen rechte l^∞ van het derde projectievlak (focaalrechte der congruentie) tot enkelvoudige richtlijn.

De snijpunten van r met den focaalkegel zijn blijkbaar uniplanaire punten.

OPMERKING. Het regelvlak raakt den focaalkegel volgens een kubische ruimtekromme, die door den top van den kegel gaat, en door het oneindig ver gelegen vlak gesneden wordt in het raakpunt van l^∞ met dien kegel en in de raakpunten der raaklijnen uit het oneindig ver gelegen punt van r aan de oneindig ver gelegen kegelsnede van dien kegel. (H. d. V.)

Vraagstuk CXCVIII.

P 6 f. Tusschen een punt P van het in vraagstuk 196 bedoelde vlak ε en het snijpunt Q van ε met den bij P behoorenden congruentiestraal bestaat een verwantschap. Welke kromme beschrijft P of Q als Q of P een rechte doorloopt? (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE, Dr. F. SCHUH, Dr. A. TOXOPEUS, H. J. VAN VEEN *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

1. Als P een rechte l van ε beschrijft, dan is de meetkundige plaats der bijbehoorende rechte P′P″ de hyperbolische paraboloïde, die l' en l'' tot richtlijnen en het derde projectievlak tot richtvlak heeft. Dus doorloopt het punt Q een *hyperbool* Λ, die blijkbaar de doorgangen van l bevat.

Elke rechte g van ε, die de as van projectie loodrecht kruist, snijdt l, dus ook de hyperbool Λ, in een in het eindige gelegen punt; bij gevolg gaat Λ door het oneigenlijke punt van l. De bijbehoorende asymptoot is gemakkelijk aan te wijzen. Zijn C en D de doorgangen van g, dan komt met het midden P_0 van CD een punt Q overeen dat oneindig ver ligt. Als g het vlak ε beschrijft, dan doorloopt P_0 een rechte m door het snijpunt S van ε met de as van projectie. Nu snijden l en m elkaar in een punt P_0, waarvoor het bijbehoorende punt Q_0 in het oneindige ligt; dus is de rechte g_0 door P_0 de bedoelde asymptoot.

Gaat l door het snijpunt S der doorgangen van ε, dan ontaardt Λ blijkbaar in twee rechten door S, waarvan er een loodrecht staat op de as. Deze rechten vallen samen als l in den stand m komt.

Is l evenwijdig met m dan gaat Λ over in een parabool, waarvan de as loodrecht staat op de as van projectie.

2. We zullen nu nagaan welke de baan is van P, als Q een rechte l_1 van ε doorloopt. Met elk punt Q komen twee punten P overeen (zie vraagstuk 196.)

Laat men, in een vlak ω dat loodrecht op de as van projectie staat, om een punt Q een rechte wentelen, die de projectievlakken in P′ en P″ snijdt, dan beschrijft het punt P

dat P′ en P″ tot projecties heeft, een hyperbool π, welke de loodlijnen uit Q op de projectievlakken tot asymptoten heeft. De snijlijn g van ω en ε heeft twee punten P met π gemeen, die in de bedoelde verwantschap aan Q zijn toegevoegd. Wordt nu ω evenwijdig aan zich zelf verplaatst, zoodat Q de rechte l_1 beschrijft, dan zullen de overeenkomstige punten P een kromme doorloopen welke op ε wordt ingesneden door het oppervlak (π) dat door de veranderende hyperbool π wordt beschreven. Daar π steeds door dezelfde oneindig ver gelegen punten gaat, is dit oppervlak quadratisch. Het bevat de as van projectie, omdat deze π snijdt. Ligt Q in een der doorgangen van l_1, dan ontaardt π in de loodlijnen op de projectievlakken, die elkaar in Q snijden. Wij kennen nu drie kruisende rechten van het bedoelde quadratische oppervlak (π); dit is dus een *hyperboloïde.*

Als l_1 evenwijdig is met een projectievlak, gaat de hyperboloïde over in een hyperbolische paraboloïde. Zij wordt een kegel als l_1 de as snijdt; deze kegel bevat de as en de loodlijnen op de projectievlakken in den doorgang van l_1; hij wordt langs die loodlijnen geraakt door de projecteerende vlakken van l_1.

Laat men nu Q de rechte l_1 doorloopen, dan verplaatsen de beide overeenkomstige punten P zich langs de doorsnede van ε en het oppervlak (π); de gevraagde meetkundige plaats is dus een *kegelsnede.*

Verplaatst men l_1 evenwijdig aan zich zelf tot dat ze de as snijdt, dan gaat (π) over in zijn asymptotenkegel. Naar gelang deze met ε bestaanbare of onbestaanbare rechten gemeen heeft, wordt de meetkundige plaats van P een *hyperbool* of een *ellips.*

Een parabool kan ze niet worden. Wel kan ze ontaarden in twee evenwijdige rechten, maar dan moet ε loodrecht staan op een projectievlak.

Vraagstuk CIC.

M² 4 a. De asymptotische lijnen van het oppervlak $x^2z = y^3$ zijn kubische ruimtekrommen. Bewijs dat elke koorde van zulk een asymptotische lijn door het oppervlak in vier harmonische punten wordt gesneden. (Dr. P. Zeeman Gz.)

Opgelost *door* H. B. Bone Jr., L. de Jong, J. H. Keijsers, Dr. F. Schuh, Dr. A. Toxopeus, H. J. van Veen, Dr. J. de Vries *en* Dr. P. Zeeman Gz.

Oplossing.

Uit $z = x^{-3}y^3$ volgt $r = 12x^{-5}y^3$, $s = -9x^{-4}y^2$, $t = 6x^{-3}y$. De differentiaalvergelijking der projecties van de asymptotische lijnen op XOY, d. i. $rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0$, wordt dus

$$2y^2dx^2 - 3xydxdy + x^2dy^2 = 0.$$

Zij is te splitsen in $xdy - ydx = 0$, welke de rechte lijnen van het oppervlak aanwijst, en in

$$xdy - 2ydx = 0,$$

welke $y = cx^2$ tot integraal heeft, zoodat de asymptotische krommen voorgesteld worden door

$$y = cx^2, \; z = c^2x^3.$$

Zijn P_1 en P_2 punten op een dier krommen, dan wordt hun verbindingslijn aangewezen door

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = c\,\frac{x_1^2 + \lambda x_2^2}{1 + \lambda}, \; z = c^2\,\frac{x_1^3 + \lambda x_2^3}{1 + \lambda}.$$

Voor de snijpunten dezer koorde met de conoïde heeft men dus de betrekking

$$(x_1^3 + \lambda x_2^3)(x_1 + \lambda x_2)^3 - (1 + \lambda)(x_1^2 + \lambda x_2^2)^3 = 0,$$

welke herleidbaar is tot

$$(x_1 - x_2)^3(x_2^3\lambda^3 - x_1^3\lambda) = 0.$$

De punten, welke P_1P_2 nog met de conoïde gemeen heeft, worden aangewezen door

$$x_2^3\lambda^2 = x_1^3;$$

zij worden dus harmonisch gescheiden door P_1 en P_2.

Vraagstuk CC.

04 h. Gegeven is een willekeurige ruimtekromme. Hoe bepaalt men de regeloppervlakken, waarop deze kromme asymptotische lijn en tevens strictielijn is? (Dr. P. Zeeman Gz.)

Opgelost *door* Dr. F. Schuh *en* Dr. P. Zeeman Gz.

Oplossing *van* Dr. F. SCHUH.

Het osculatievlak van een asymptotische lijn in een punt P is het raakvlak in P aan het oppervlak. Is dit een regelvlak, dan gaat het raakvlak door een beschrijvende lijn, waaruit volgt dat de beschrijvende lijn door P van het gevraagde regelvlak in het osculatievlak in P der gegeven ruimtekromme moet liggen. Deze beschrijvende lijn kan willekeurig in het osculatievlak worden aangenomen, terwijl dan de beschrijvende lijnen door de overige punten der ruimtekromme bepaald kunnen worden uit de voorwaarde, dat de gegeven kromme strictielijn moet zijn. De rechte, die de beschrijvende lijn door P en de beschrijvende lijn door een dicht bij P gelegen punt Q der kromme loodrecht snijdt, moet dus aan de grens door P gaan. Snijdt deze rechte de beide beschrijvende lijnen in de punten P′ en Q′, dan naderen beide punten tot P. Daar P′ en Q′ punten van het regelvlak zijn zal P′Q′ in den grensstand in het raakvlak in P aan het regelvlak, dus in het osculatievlak van P liggen. Het vlak door de beschrijvende lijn van P evenwijdig aan de beschrijvende lijn van Q staat loodrecht op P′Q′, staat dus aan de grens loodrecht op het osculatievlak, m. a. w. gaat dan door de binormaal in P. We vinden dus:

Beweegt een rechte zich zoo, dat ze een ruimtekromme snijdt en steeds in het osculatievlak van het snijpunt blijft, terwijl de grensstand van een vlak door een beschrijvende lijn evenwijdig aan de volgende beschrijvende lijn door de binormaal der kromme gaat, dan beschrijft die rechte een regelvlak, waarvan de gegeven ruimtekromme asymptotische lijn en tevens strictielijn is. De beschrijvende lijn door één punt der kromme kan willekeurig in het osculatievlak worden aangenomen.

2. Hieruit kan de vergelijking van het regelvlak worden afgeleid. Daartoe denken we de natuurlijke vergelijkingen der ruimtekromme gegeven, welke de eerste kromming $1:r$ en de tweede kromming $1:\rho$ als functies van den boog s bepalen; dus

$$\frac{1}{r} = f(s), \quad \frac{1}{\rho} = g(s).$$

De door een punt dier kromme gaande beschrijvende lijn denken we aangewezen door den hoek ϕ, dien ze met de raaklijn maakt, en wel den hoek dien de raaklijn getrokken naar

den kant waar s toeneemt, in de richting naar het middelpunt der eerste kromming moet doorloopen om langs de beschrijvende lijn te vallen. Uit de voortbrengingswijze van het regelvlak blijkt, dat ϕ alleen van de eerste kromming afhangt.

Men heeft dus

$$d\phi = -f(s)\,ds,$$

en

$$\phi = -\int f(s)\,ds,$$

welke vergelijking als de vergelijking van het regelvlak is op te vatten. We vinden dus:

Het gevraagde regelvlak wordt beschreven door een op de kromme rustende rechte, die steeds in het osculatievlak blijft en met de raaklijn een hoek maakt gelijk aan $-\int \frac{ds}{r}$.

3. Hieruit laat zich nog een andere voortbrengingswijze afleiden. De hoek ϕ hangt niet van de tweede kromming af; wordt de kromme zoo vervormd, dat hare eerste kromming dezelfde blijft, dan worden de beschrijvende lijnen dus zoo meegevoerd dat ze in het osculatievlak blijven én denzelfden hoek met de raaklijn blijven vormen. Nu kan men de kromme, zonder de eerste kromming te wijzigen, in een vlakke kromme omzetten (door nl. het bij de ruimtekromme behoorende ontwikkelbare oppervlak tot een plat vlak uit te spreiden), waardoor alle binormalen dezelfde richting verkrijgen, zoodat blijkens de eerstgevonden voortbrengingswijze het stelsel beschrijvende lijnen in een stelsel evenwijdige lijnen overgaat. Deze evenwijdige lijnen zijn ontstaan uit geodetische lijnen van het ontwikkelbare oppervlak. De raaklijnen dier geodetische lijnen in de snijpunten met de gegeven kromme zijn de beschrijvende lijnen van het regelvlak. We vinden dus

De beschrijvende lijnen van het gevraagde regelvlak zijn de raaklijnen van een stelsel evenwijdige geodetische lijnen van het bij de gegeven kromme behoorende ontwikkelbare oppervlak in hun snijpunten met de gegeven ruimtekromme.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

De gegeven ruimtekromme zij bepaald door de vergelijkingen

$$x = \phi_1(t),\ y = \phi_2(t),\ z = \phi_3(t)$$

waarin t een willekeurigen parameter vooorstelt.

Zal deze kromme asymptotische lijn zijn van een regeloppervlak, dan moet de beschrijvende lijn van dit oppervlak door een willekeurig punt P dier kromme in het osculatievlak liggen en omgekeerd. Is dus

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0,$$

waarin $a=y'z''-z'y''$, $b=z'x''-x'z''$, $c=x'y''-y'x''$ is, de vergelijking van het osculatievlak, dan zal de beschrijvende lijn van een regelvlak, waarop de kromme asymptotische lijn is, worden bepaald door de beide vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0, \\ A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 1)$$

waarin A, B en C willekeurige functies van den parameter t zijn.

Zal de kromme bovendien striotielijn zijn van het regelvlak, dan moet P het centraalpunt zijn op de beschrijvende lijn, d. w. z. het raakvlak in P of, wat hetzelfde is, het osculatievlak in P, moet loodrecht zijn op het asymptotische vlak door de beschrijvende lijn. De vergelijking van dit vlak is van den vorm

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)+\lambda\{a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)\}=0,$$

waar λ, daar het vlak evenwijdig moet zijn met eene opvolgende beschrijvende lijn, moet voldoen aan de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

Zal het vlak $a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0$ loodrecht zijn op dit asymptotische vlak, dan moet voldaan zijn aan de betrekking

$$Aa+Bb+Cc+\lambda(a^2+b^2+c^2)=0.$$

Tusschen A, B en C moet dus de betrekking

$$(a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} - (Aa+Bb+Cc)\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; 2)$$

bestaan.

De vergelijkingen (1) bepalen derhalve alle regeloppervlakken, waarop de gegeven ruimtekromme asymptotische lijn en tevens strictielijn is, mits voor A, B en C functies van t worden gekozen waar tusschen de betrekking (2) bestaat.

2. Op verschillende wijzen kan men deze uitkomst in een eenvoudiger vorm brengen. Omdat de vergelijking (2) slechts ééne betrekking geeft tusschen de functies A : B en C : B, kan men eene betrekking tusschen deze beide willekeurig aannemen. Kiest men daarvoor

$$Aa + Bb + Cc = 0,$$

waarvan de meetkundige beteekenis dadelijk is in te zien, dan gaat de vergelijking (2), wanneer men alleen op reëele oppervlakken let, over in:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0.$$

De regeloppervlakken, waarop de gegeven ruimtekromme asymptotische lijn en tevens strictielijn is, worden dus ook bepaald door de vergelijkingen (1) mits voor A, B en C functies van t worden genomen, waar tusschen de betrekkingen

$$Aa + Bb + Cc = 0,$$

$$A(bC' - cB') + B(cA' - aC') + C(aB' - bA') = 0$$

bestaan.

Differentieert men de eerste dezer vergelijkingen naar t en elimineert daarna C en C', dan verkrijgt men

$$c(a^2+b^2+c^2)(AB' - A'B) + (Ab - Ba)\{A(ca' - ac') + B(cb' - bc')\} = 0.$$

Stelt men $\frac{A}{B} = P$, dus $\frac{BA' - AB'}{B^2} = \frac{dP}{dt}$, dan gaat deze vergelijking over in

$$c(a^2 + b^2 + c^2)\frac{dP}{dt} + (a - bP)\{P(ca' - ac') + (cb' - bc')\} = 0 \quad . \quad 3)$$

Elke integraal dezer differentiaalvergelijking geeft een regeloppervlak, dat aan de gestelde voorwaarden voldoet. Is

$P = A : B$ gevonden, dan vindt men de daarbij behoorende functie $C : B$ uit $Aa + Bb + Cc = 0$.

De vergelijking (3) is van den vorm

$$\frac{dP}{dt} + \alpha P^2 + \beta P + \gamma = 0,$$

waarin α, β en γ gegeven functies van t zijn. De bepaling van alle regeloppervlakken, die door de gegeven kromme gaan en aan de gegeven voorwaarden voldoen, is hiermee teruggebracht tot de integratie van een differentiaalvergelijking van RICCATI.

REGISTER

OP DE

IN DEEL IX VOORKOMENDE VRAAGSTUKKEN.

A 1 b. 52, 110, 185, 188.
A 2 b. 93.
A 3 b. 133.
A 3 l. 64.
B 4 g. 169.
C 1 c. 152, 154.
C 1 f. 60.
C 2 d. 111, 112, 113.
C 2 h. 28.
C 2 k. 187.
C 5. 19.
D 1 b γ. 49, 51.
D 2 b γ. 23.
D 3 a. 184.
D 4 a. 21, 53.
D 6 e. 149, 186.
E 1 a. 4.
E 5. 20, 22, 24, 25.
H 2 c. 147, 150, 151.
H 5 g. 148.
H 6 b. 103.
H 8 b. 50.
H 8 f. 153.
H 9. 56.
H 9 a. 155.
H 9 d. 140.
I 4 a. 156.
J 1 a. 157.
J 1 b. 189.
J 2 c. 26.
K 1 b δ. 61.
K 1 c. 2, 16, 29. 30, 89, 99, 131, 132, 175, 182.
K 1 d. 17, 18, 44.
K 2 d. 1, 8, 31, 42, 92, 129, 130, 173.
K 2 e. 58.
K 4. 90, 115.
K 5 d. 107, 181.
K 6 b. 36, 139.
K 7 d. 172.
K 8 a. 39, 43, 91.
K 8 b. 47, 134.
K 8 c. 106.
K 8 f. 67, 174.
K 9 d. 57, 135.
K 11 e. 100, 101.
K 13 b. 114, 191.
K 13 c. 62, 119, 128, 161.
K 13 c γ. 48, 162, 164, 176.
K 14 c α. 54.
K 14 d. 95.
K 14 f. 69.
K 18 g. 136, 137.
K 20 d. 190.
K 22 b. 73.
L¹ 3 b. 41.
L¹ 5 e. 70, 71.
L¹ 6 b. 122.
L¹ 16 b. 88.
L¹ 17 a. 102.
L¹ 17 e. 109.
L¹ 18 d γ. 59.
L² 2 f. 78, 79.
L² 3 a. 120.
L² 14 a. 116, 117.
L² 21 b. 76, 77.
M¹ 1 b. 45.
M¹ 1 l. 124, 125.
M¹ 5 c. 46.
M¹ 5 c β. 72.
M¹ 5 b. 10, 123, 170.
M¹ 5 l. 94.
M¹ 5 k. 171.
M¹ 7 b. 86.
M² 1 h. 126.
M² 2 g. 14, 15.
M² 3 a. 197.
M² 4 a. 199.
M² 4 l δ. 74.
M² 8 f. 40.
M² 9 d. 5, 75, 84.
M² 9 e. 167.
M³ 5 a. 193.
M³ 5 c γ. 163.
M³ 5 h. 82.
M³ 5 h α. 80, 81.
M³ 6 l. 12.
N¹ 1 c. 179.
N¹ 1 h. 178.
N¹ 1 l. 159, 168.
N² 1 d. 196.
N² 1 g. 11.
N² 1 g α. 160.
N⁴ 1 b. 138, 177.
N⁴ 1 d. 158.
N⁴ 1 e. 166.
N⁴ 2 c. 33, 34.
N⁴ 2 d. 27.
N⁴ 2 e. 35, 37.
N⁴ 2 h. 32.

N⁴ 2 k.	38, 68.
O 1.	55.
O 2 b.	146, 183.
O 2 f.	141, 144, 145.
O 3 h.	180.
O 4 c.	98.
O 4 h.	104, 105, 200.
O 5 b.	65.
O 5 l β.	97.
O 5 l.	142.
O 5 m.	143.
O 6 a α.	85.
O 6 g.	96.
O 8 a.	108, 127.
P 1 b α.	192.
P 1 e.	6, 118.
P 6 a.	83.
P 6 f.	194, 195, 198.
Q 2.	3, 7, 63, 121.
Q 4 a.	165.
R 1 b.	9.
R 1 c.	87.
R 8 a.	13.
R 8 c.	66

REGISTER

VOLGENS DE

NAMEN VAN DE STELLERS DER VRAGEN.

Aller (C. van) 41, 88, 170, 171, 172.
Allersma (T. J.) 129, 173.
Aubel (Dr. H. van) 1, 2, 16, 17, 18, 42, 43, 44, 89, 90, 91, 92, 130, 131, 132.
Barrau (J. A.) 3, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 174, 175, 176, 177.
Bes (K.) 93, 94.
Bouman (Dr. Z. P.) 95, 96, 97, 98, 140, 141, 142, 143, 178, 179, 180.
Cardinaal (Dr. J.) 45, 46.
Cikot (C. A.) 47, 48.
Griend Jr. (J. van de) 99, 100, 101, 144, 145, 181, 182.
Kapteyn (Dr. W.) 19, 20, 21, 49, 50, 51, 52, 53, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 183, 184, 185, 186.
Kerkhoven (J. A.) 54, 102.
Kluyver (Dr. J. C.) 4, 22, 23, 24, 25, 187, 188.
Mantel (W.) 55, 56, 57, 103, 104, 105, 106, 156, 157, 189, 190, 191.
Modderman (E. A. J. H.) 26.
Neuberg (J.) 5, 6, 27, 28, 58, 59, 60, 61, 62, 107, 108, 109, 158, 159, 160, 192, 193, 194, 195.
Oss (Dr. S. L. van) 63.
Prange (Dr. A. J. A.) 29, 30.
Schoute (Dr. P. H.) 7, 64.
Schouten (Dr. G.) 65, 66, 110, 111, 112, 113.
Schuh (Dr F.) 67, 68, 69, 114, 161, 162.
Speckman (Dr. H. A. W.) 8, 31.
Stolp (Dr. C.) 115.
Vaes (F. J.) 9.
Versluys (Dr. W. A) 10, 70, 71, 72, 163.
Vries (Dr. H. de) 11, 32, 33, 34, 73, 74, 75, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 196, 197, 198.
Vries (Dr. J. de) 12, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 123, 124, 164, 165, 166, 167, 168, 169.
Zeeman Gz. (Dr. P.) 13, 14, 15, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 125, 126, 127, 128, 199, 200.

REGISTER

VOLGENS DE

NAMEN DER OPLOSSERS.

Aller (C. van) 41, 46, 52, 64, 68, 70, 71, 72, 88, 133, 165, 169, 170, 171, 172, 175, 180, 183, 189, 194.

Allersma (T. J.) 1, 2, 16, 17, 28, 31, 36, 41, 42, 43, 44, 46, 55, 58, 59, 60, 61, 67, 69, 74, 88, 89, 91, 92, 100, 102, 105, 107, 109, 114, 122, 128, 129, 130, 131, 132, 134, 135, 138, 162, 164, 172, 173, 174, 177, 183, 192, 193.

Aubel (Dr. H. van) 1, 17, 18, 42, 43, 44, 89, 90, 91, 92, 130, 131, 132.

Barrau (J. A.) 3, 17, 28, 29, 30, 36, 43, 44, 47, 48, 54, 57, 58, 61, 67, 69, 73, 91, 95, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 110, 114, 115, 118, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 146, 157, 158, 161, 162, 164, 165, 174, 175, 176, 177.

Bes (K.) 93, 94.

Bone Jr. (H. B.) 88, 89, 91, 94, 95, 99, 100, 102, 105, 107, 110, 114, 115, 118, 119, 128, 170, 171, 174, 175, 176, 178, 180, 181, 183, 184, 187, 192, 193, 194, 195, 196, 199.

Bouman (Dr. Z. P.) 95, 96, 97, 98, 114, 119, 122, 128, 140, 141, 142, 143, 178, 179, 180.

Bouwman (Dr. W.) 41, 57, 58, 59, 61, 65, 75, 79, 82, 84, 86, 88, 114.

Bremekamp (Dr. H.) 24, 25, 41, 46, 47, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 65, 66, 67, 69, 73, 88, 95, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 115, 122, 133, 134, 135, 137, 139, 141, 146, 147, 151, 156, 158, 161, 162, 164, 174, 175, 176, 183, 184, 187, 192.

Cikot (C. A.) 17, 47, 48, 54, 57, 61, 95.

Dalhuijsen (Mej. Dr. A. A.) 192.

Dorsten (Dr. R. H. van) 16, 17, 18, 28, 29, 30, 31, 36, 39.

Falkenhagen (Dr. J. H. M.) 185, 187, 188, 190.

Geest (Dr. J.) 16, 36.

Griend Jr. (J. van de) 99, 100, 101, 131, 132, 134, 135, 136, 137, 139, 144, 145, 146, 161, 162, 164, 165, 169, 181, 182.

Hulsteede (G.) 131, 133, 134, 135, 139, 141, 146, 147, 151, 154, 156, 157, 161, 162.

Janssen van Raay (W. H. L.) 170, 171, 174, 176, 177, 181, 183, 184, 191, 192, 193.

Jong (L. de) 174, 183, 185, 187, 188, 192, 199.
Jongh Jr. (E. D. J. de) 2, 41, 43, 47, 48, 58, 60, 61, 67, 91, 100, 102, 107, 114, 115, 134, 135, 139, 158, 162, 164, 174, 175, 176.
Kamer (Mej. Dr. E. van de) 134, 135, 137, 146, 151, 155, 164, 165.
Kapteyn (Dr. W.) 19, 20, 21, 49, 50, 51, 52, 53, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 183, 184, 185, 186.
Keesing (A.) 174.
Kerkhoven (J. A.) 16, 17, 29, 30, 41, 54, 67, 88, 95, 100, 102, 131, 132, 134, 135.
Kerkhoven—Wijthoff (Mevr. A. G.) 67, 114, 115, 133, 134, 140, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 161, 162.
Keysers (J. H.) 187, 188, 199.
Kloos (A. W.) 131, 132, 134, 135, 137, 139, 162, 164, 165.
Kluyver (Dr. J. C.) 4, 22, 23, 24, 25, 187, 188.
Laarschot (E. J. M. van de) 24, 25, 41, 46, 47, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 65, 66, 67, 69, 73, 88, 95, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 115, 122.
Lohuizen (T. van) 134, 135, 161, 162, 164.
Mantel (W.) 13, 22, 24, 30, 33, 50, 51, 52, 55, 56, 57, 59, 64, 65, 76, 77, 82, 103, 104, 105, 106, 118, 120, 140, 145, 156, 157, 158, 165, 175, 177, 189, 190, 191.
Masier (J. C. de) 17, 29, 30, 41, 48, 61, 67, 114.
Modderman (E. A. J. H.) 26.
Neuberg (J.) 6, 159, 160.
Nugteren (Dr. G. K.) 67, 114.
Oss (Dr. S. L. van) 7, 63.
Prange (Dr. A. J. A.) 1, 2, 3, 29, 30, 31, 42, 44, 61, 67.
Rutgers (Dr. J. G.) 134, 140, 146, 147, 149, 151, 161, 162, 164, 169, 174, 183, 184, 185, 186, 187, 188.
Schoute (Dr. P. H.) 64, 177, 196, 197, 198.
Schouten (Dr. G.) 65, 66, 110, 111, 112, 113.
Schuh (Dr. F.) 16, 17, 18, 19, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 36, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 80, 84, 85, 86, 87, 88, 91, 93, 94, 95, 99, 100, 101, 107, 108, 109, 110, 112, 114, 115, 118, 119, 127, 128, 131, 132, 134, 137, 138, 139, 141, 146, 150, 151, 155, 161, 162, 164, 165, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 187, 189, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200.
Speckman (Dr. H. A. W.) 8, 16, 31, 39.
Stein (Dr. J.) 4, 9, 10, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 184, 185, 190.
Stolp (Dr. C.) 1, 2, 5, 8, 11, 23, 24, 28, 31, 52, 54, 58, 61, 67, 69, 70, 71, 75, 88, 91, 100, 106, 107, 110, 114, 115, 134, 135, 139, 146, 161, 164, 165, 170, 181, 185, 187, 188.
Thijn (Dr. A. van) 26, 95, 99, 100, 101, 102, 114, 118, 141, 146, 162, 164, 165.
Toxopeus (Dr. A.) 171, 178, 179, 183, 184, 193, 196, 197, 198, 199.
Uven (M. J. van) 46, 49, 51, 56, 59, 61, 67, 85.
Vaes (F. J.) 9, 57, 66, 73, 74.
Veen (H. J. van) 171, 174, 177, 181, 183, 198, 199.

Versluys (Dr. W. A.) 10, 70, 71, 72, 135, 163, 164, 166, 167.
Vries (Dr. H. de) 5, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 32, 33, 34, 41, 46, 48, 59, 61, 62, 63, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 84, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 196, 197, 198.
Vries (Dr. J. de) 5, 9, 10, 12, 27, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 46, 68, 94, 123, 124, 128, 150, 160, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 199.
Wafelbakker (C.) 57, 61, 67, 69, 114, 131, 132, 161, 162, 164, 171, 175.
Wolff (J.) 95, 101, 108, 114, 122.
Wijthoff (Dr. W. A.) 174, 177, 183, 184, 185, 187, 188, 189, 190, 191.
Zeeman Gz. (Dr. P.) 13, 14, 15, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 125, 126, 127, 128, 199, 200.

NIEUWE OPGAVEN.

(Deel IX, N°. 88—128.)

Oplossingen der vraagstukken N°. 88—128 *worden vóór* 1 *November* 1904, *ingewacht door den Redacteur* DR. J. DE VRIES, Maliebaan, Utrecht.

De oplossing van elk vraagstuk moet op een afzonderlijk stuk papier geschreven, onderteekend en zoo behandeld worden, dat het niet noodig is, haar over te schrijven, wanneer ze gedrukt wordt.

Nieuwe Opgaven *moeten vergezeld zijn van een oplossing.*

N°. 88. **L¹ 16 b.** Van een ellips zijn OA en OB de halve assen. Op het verlengde van OA zet men een stuk AC = OB uit en beschrijft een cirkel met OC als middellijn. Men verbindt nu een willekeurig punt D van dien cirkel met O en met A. Snijdt DA den cirkel nog in E, dan is AE de lengte van de halve middellijn der ellips, die langs OD, en AD de lengte van de halve middellijn, die langs OE valt.

Men vraagt een meetkundig bewijs van deze constructie, welke door den Oostenrijkschen generaal-majoor VON ARBTER in „Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens", Jahrgang 1900, S. 719, is medegedeeld. (*C. van Aller.*)

N°. 89. **K 1 c.** P is een punt van den om driehoek ABC beschreven cirkel. Drie rechten, die door een der punten van BROCARD achtereenvolgens met AP, BP, CP evenwijdig loopen, snijden de zijden CA, AB, BC en AB, BC, CA in de collineaire drietallen A_1, B_1, C_1 en A_2, B_2, C_2, terwijl elke der rechten $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ door een vast punt gaat. Men vraagt dit te bewijzen. (*Dr. H. van Aubel.*)

No. 90. **K 4.** Op de zijden van driehoek $A_1A_2A_3$ heeft men buitenwaarts de vierkanten $A_2A_3B_1C_1$, $A_3A_1B_2C_2$, $A_1A_2B_3C_3$, en daarna op B_2C_3, B_3C_1, B_1C_2 buitenwaarts de vierkanten $B_2C_3D_1E_1$, $B_3C_1D_2E_2$, $B_1C_2D_3E_3$ beschreven. Men vraagt den driehoek $A_1A_2A_3$ te construeeren als de middens der rechten D_2E_3, D_3E_1, D_1E_2 gegeven zijn. (*Dr. H. van Aubel.*)

N° 91. **K 8 a.** Zijn I_1, I_2, I_3, I_4 en i_1, i_2, i_3, i_4 de middelpunten der vierkanten welke buitenwaarts en binnenwaarts op de zijden van een vierhoek $A_1A_2A_3A_4$ kunnen beschreven worden, dan is

$$\overline{I_1i_3}^2 + \overline{I_2i_4}^2 + \overline{I_3i_1}^2 + \overline{I_4i_2}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_1}^2.$$

(*Dr. H. van Aubel.*)

N°. 92. **K 2 d.** Uit een punt van de hyperbool van Kiepert trekt men drie rechten achtereenvolgens evenwijdig met de zijden B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 van den eersten driehoek van Brocard. Te bewijzen dat deze rechten de zijden BC, CA, AB van den oorspronkelijken driehoek in drie collineaire punten snijden.

(*Dr. H. van Aubel.*)

N°. 93. **B 8.** Is (X, Y) een wortelstelsel van de vergelijking

$$u_{y_1^2}X^2 - 2u_{x_1y_1}XY + u_{x_1^2}Y^2 = 0,$$

en (Y, Z) een wortelstelsel van

$$u_{x_1^2}Y^2 - 2u_{y_1z_1}YZ + u_{y_1^2}Z^2 = 0,$$

dan voldoet (X, Z) aan

$$u_{z_1^2}Z^2 - 2u_{x_1z_1}XZ + u_{x_1^2}X^2 = 0,$$

mits $u_{x_1^2}$, $u_{x_1y_1}$, $u_{x_1z_1}$, $u_{y_1^2}$, $u_{y_1z_1}$, $u_{z_1^2}$ de waarden voorstellen welke de tweede afgeleiden van een ternairen vorm u, waarvan de discriminant verdwijnt, aannemen, als men daarin aan de veranderlijken waarden geeft, die de eerste afgeleiden van u gelijktijdig doen verdwijnen. Men vraagt het bewijs. (*K. Bes.*)

N°. 94. **M¹ 5 i.** Als twee vlakke kubische krommen elkaar in een punt O aanraken, dan raken alle krommen van den door hen bepaalden bundel elkaar in O aan. Men laat den bundel zoo veranderen, dat O en zes der overige basispunten op hun plaats blijven, terwijl de gemeenschappelijke raaklijn om O wentelt; wat is de meetkundige plaats van het bewegelijke basispunt. (*K. Bes.*)

N°. 95. **K 14 d.** Zijn twee veelvlakken naar den vorm gegeven, en is de som hunner oppervlakken bekend, dan zal de som hunner inhouden een minimum worden, als de inhouden zich als de oppervlakken verhouden. (Steiner's Werke II, 227). Men vraagt het bewijs. (*Dr. Z. P. Bouman.*)

N°. 96. **O 6 g.** Tusschen het lijnelement ds van een asymptotische lijn op een pseudospherisch oppervlak, met kromming $-\frac{1}{\rho^2}$, en het lijnelement ds' van haar afbeelding op den eenheidsbol bestaat de betrekking $ds = \rho ds'$. (*Dr. Z. P. Bouman.*)

N°. 97. **O 5 i β.** Vormen de kromtelijnen van een oppervlak een isothermisch stelsel, dan bestaat tusschen de hoofdkromtestralen ρ_1 en ρ_2 de betrekking

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2(\rho_1-\rho_2)}\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1(\rho_2-\rho_1)}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\right)$$

(*Dr. Z. P. Bouman.*)

N°. 98. **O 4 c.** Op een ontwikkelbaar oppervlak neemt men een stelsel van geodetische lijnen en hun rechthoekige doorsnijdingskrommen als parameterlijnen $v =$ const. en $u =$ const. aan. Men vraagt een uitdrukking voor den geodetischen kromtestraal der lijnen $u =$ const. en de differentiaalvergelijking der geodetische lijnen. (*Dr. Z. P. Bouman.*)

N°. 99. **K 1 c.** Bij een gegeven driehoek het punt te bepalen, waarvoor de som der afstanden tot de hoekpunten maximum of minimum is, en te onderzoeken of het maximum of minimum absoluut of relatief is. (*J. van de Griend Jr.*)

N°. 100. **K 11 e.** Als vier cirkels elkaar, in cyclische volgorde, twee aan twee op een vijfden cirkel snijden, dan liggen hun tweede snijpunten ook op een cirkel. (*J. van de Griend Jr.*)

N°. 101. **K 11 e.** Een van stand en grootte veranderende cirkel N snijdt een vasten cirkel M. Waar moet het momentane uitwendige gelijkvormigheidspunt voor twee op elkaar volgende standen van N liggen, zal de hoek van M en N gedurende het eerste tijdselement constant blijven. (*J. van de Griend Jr.*)

N°. 102. **L¹ 17 a.** De snijpunten van twee parabolen te construeeren, waarvan de assen evenwijdig loopen, als hun brandpunten en richtlijnen gegeven zijn. (*J. A. Kerkhoven.*)

N°. 103. **H 6 b.** Te integreeren

$$(x_2-x_3+x_4-x_5)dx_1+(x_3-x_4+x_5-x_1)dx_2+(x_4-x_5+x_1-x_2)dx_3+$$
$$+(x_5-x_1+x_2-x_3)dx_4+(x_1-x_2+x_3-x_4)dx_5=0.$$

(Forsyth, Theory of differential equations, I, 171.)

(*W. Mantel.*)

No. 104. **O 4 h.** Bepaal de algemeene vergelijking der regelvlakken, welke een gegeven rechte tot richtlijn hebben, terwijl het raakvlak in elk punt van die richtlijn een gegeven hoek maakt met het asymptotische vlak door de beschrijvende lijn, die in dat punt de richtlijn ontmoet. (*W. Mantel.*)

N°. 105. **O 4 h.** Gegeven zijn een cirkel en een rechte, die hem snijdt en loodrecht op zijn vlak staat. Men vraagt naar de vergelijking van een regelvlak, dat deze rechte tot richtlijn en den cirkel tot intrekkingslijn heeft. (*W. Mantel.*)

N°. 106. **K 8 c.** Om een gegeven cirkel een vierzijde te beschrijven, waarvan de middens der drie diagonalen gegeven zijn. (*W. Mantel.*)

N°. 107. **K 5 d.** Van een veranderlijken driehoek ABC bewegen de hoekpunten B en C zich langs een rechte OX, het hoekpunt A langs een rechte OY, loodrecht op OX, terwijl het hoekpunt B′ der hoogtelijn uit B vast ligt. Men vraagt naar de meetkundige plaatsen van het midden van AB, het voetpunt C′ der hoogtelijn uit C en het zwaartepunt; verder naar de omhullenden van AB en CC′. (*J. Neuberg.*)

N°. 108. **O 8 a.** Een gegeven parabool verplaatst zich zoo, dat ze steeds door een gegeven punt P gaat, terwijl haar brandpunt F de rechte PF doorloopt. Men vraagt de beide poolkrommen der beweging te bepalen. (*J. Neuberg.*)

N°. 109. **L¹ 17 e.** Men beschouwt het stelsel van gelijkvormige ellipsen, die een gemeenschappelijken top A hebben en door een gegeven punt P gaan. Gevraagd wordt naar de meetkundige plaats van het tegenpunt A′ van A en de omhullende der raaklijn in A′. (*J. Neuberg.*)

N°. 110. **A 1 b.** Bewijs de identiteit

$$x^n - n_1(x-1)^n + n_2(x-2)^n \ldots\ldots + (-1)^n n_n (x-n)^n \equiv n!,$$

waarin x een willekeurig, n een positief geheel getal is, terwijl n_k een binomiaalcoëfficient voorstelt. (*Dr. G. Schouten.*)

N°. 111. **C 2 d.** Druk, voor bestaanbare waarden van x, de integraal

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^3 - x}}$$

in bekende functies uit. (*Dr. G. Schouten.*)

N°. 112. **C 2 d.** Rectificeer den boog der lemniscaat
$r^2 = a^2 \cos 2\Theta$. (*Dr. G. Schouten.*)

N°. 113. **C 2 d.** Voor bestaanbare waarden van x de integraal

$$\int \frac{ax+b}{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

in bekende functies uit te drukken. (*Dr. G. Schouten.*)

N°. 114. **K 13 b.** In ieder zijvlak van een drievlakkenhoek trekt men door het hoekpunt een rechte loodrecht op de overstaande ribbe. Aan te toonen, dat deze rechten in eenzelfde vlak liggen. (*F. Schuh.*)

N°. 115. **K 4.** Een ongelijkzijdigen driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de grondlijn en de omtrek, als men weet dat de rechten welke de aan de grondlijn gelegen buitenhoeken middendoor deelen (gerekend van de hoekpunten tot aan de verlengde overstaande zijden) even lang zijn. (*Dr. C. Stolp.*)

N°. 116. **L² 14 a.** Men beschouwt een driehoek, die door raaklijnen van een gegeven quadratisch oppervlak wordt gevormd, en construeert nu de punten P die met de hoekpunten van dien driehoek door raaklijnen van het oppervlak verbonden worden. Bepaal de meetkundige plaats der punten in de onderstelling dat het vlak van den driehoek en een der hoekpunten of een der zijden vast blijft. (*Dr. H. de Vries.*)

N°. 117. **L² 14 a.** Als alle ribben van een viervlak een quadratisch oppervlak aanraken, gaan de verbindingslijnen der op overstaande ribben gelegen raakpunten door één punt S. Bepaal de meetkundige plaats van S als het viervlak op dezelfde wijze verandert als in het voorgaande vraagstuk.
(*Dr. H. de Vries.*)

N°. 118. **K 5.** Men beschouwt twee driehoeken, die achtereenvolgens tot zijden hebben de rechten I, II, III en I′, II′, III′, en verbindt in elken driehoek de middens der zijden door de rechten 1, 2, 3 en 1′, 2′, 3′. Te bewijzen dat de drie rechten die de punten (I, I′) (II, II′) (III, III′) achtereenvolgens met (1, 1′) (2, 2′) (3, 3′) verbinden, door één punt gaan.
(*Dr. H. de Vries.*)

N°. 119. **K 13 c.** Gegeven zijn twee driezijdige pyramiden met gemeenschappelijken top T, waarvan de gronddriehoeken

in één vlak liggen. Aan elk hoekpunt van den eersten grondriehoek wordt een hoekpunt van den tweeden toegevoegd. Brengt men door elk dier punten een vlak evenwijdig met het overstaande zijvlak, dan ontstaan twee nieuwe driezijdige pyramiden, waarvan de opstaande zijvlakken in paren zijn gerangschikt. De snijlijnen dezer drie paren bepalen een hyperboloïde, die door den top T gaat. Men vraagt het bewijs.

(*Dr. H. de Vries.*)

N°. 120. **L² 3 a.** Gegeven een quadratisch oppervlak O^2 en twee t. o. v. O^2 aan elkaar toegevoegde rechten g en g'. Construeer een rechte h, die met haar toegevoegde h' en de rechten g, g' een hyperboloïdisch viertal vormt. (*Dr. H. de Vries.*)

N°. 121. **Q 2.** De vergelijking op te stellen van de meetkundige plaats der rechten, die vier willekeurig in een R_4 aangenomen vlakken snijden. Uit deze vergelijking af te leiden, dat tot deze meetkundige plaats nog elf andere vlakken behooren, en de configuratie der bedoelde 15 vlakken te onderzoeken.

(*Dr. H. de Vries.*)

N°. 122. **L¹ 6 b.** De osculatiecirkels van een kegelsnede te construeeren, die haar in een gegeven punt snijden, in het bijzonder als de kegelsnede een parabool is.

(*Dr. H. de Vries.*)

N°. 123. **M¹ 5 h.** Op elke rechte door het punt O construeert men de punten Q_1 en Q_2 zoo, dat ze drievoudige elementen zijn van een kubische involutie, waarvan de snijpunten der rechte met een gegeven kubische kromme een groep vormen. Bepaal de meetkundige plaats der punten Q.

(*Dr. J. de Vries.*)

N°. 124. **M¹ 1 i.** Gegeven zijn een kromme van den n^{den} graad, C^n, en een punt O. Een rechte door O snijdt C^n in de punten A_k ($k = 1$ tot n). Men construeert het punt $B_{kl,m}$ dat door A_m harmonisch wordt gescheiden van de punten A_k en A_l. Bepaal de meetkundige plaats der punten B.

(*Dr. J. de Vries.*)

N°. 125. **M¹ 1 i.** Men beschouwt het stelsel der poolkegelsneden van een kromme van den n^{den} graad met betrekking tot alle punten van haar vlak. Bepaal de meetkundige plaatsen der middelpunten der tot dit stelsel behoorende gelijkzijdige hyperbolen en lijnenparen. (*Dr. P. Zeeman Gz.*)

N°. 126. **M² 1 h.** Men beschouwt de quadratische pooloppervlakken van alle punten der ruimte naar een oppervlak van den n^{den} graad. Bepaal de meetkundige plaatsen der middelpunten der tot dit stelsel behoorende gelijkzijdige hyperboloïden en ontaarde figuren. (*Dr. P. Zeeman Gz.*)

N°. 127. **O 8 a.** Een vlakke figuur beweegt zich zoo in haar vlak dat een van haar punten M een gegeven kromme van den graad n en de klasse m doorloopt, terwijl een rechte der figuur, die door M gaat, om een vast punt draait. Bepaal den graad der beide poolkrommen. (*Dr. P. Zeeman Gz.*)

N°. 128. **K 13 c.** In de zijvlakken van viervlak $A_1A_2A_3A_4$ zijn vier punten B_k zoo aangenomen dat de rechten A_kB_k hyperboloïdisch liggen. Men construeert in elk zijvlak het punt C_k dat met B_k isogonaal verwant is met betrekking tot de zijden van dien driehoek. Te bewijzen, dat de vier rechten A_kC_k eveneens hyperboloïdische ligging hebben.

(*Dr. P. Zeeman Gz.*)

PROGRAMMA[1])

VAN

JAARLIJKSCHE PRIJSVRAGEN,

VOOR HET JAAR 1903,

TER BEANTWOORDING UITGESCHREVEN

DOOR HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP:

Een onvermoeide arbeid komt alles te boven,

TE AMSTERDAM.

1. Men vraagt te bepalen de betrekkingen, die tusschen de coëfficienten der algemeene homogene lineaire differentiaal-vergelijking moeten bestaan, opdat deze door verandering van onafhaukelijk veranderlijke kunne worden herleid tot een soortgelijke vergelijking met constante coëfficienten.

Hierbij te raadplegen HALPHEN, „Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables." *Mém. prés par divers savants à l' Acad. des Sciences de l'Inst.*, T 28).

2. Men beschouwt de reeks $\sum_{m=1}^{m=\infty} \mu(m)\, e^{-mx}$. Met $\mu(m)$ is op de gebruikelijke wijze een functie aangeduid, die in de getallentheorie voorkomt. Splitst men namelijk het geheele getal m in zijne ondeelbare factoren, dan is $\mu(m) = 0$, zoodra twee of meer dier factoren aan elkander gelijk zijn. Zijn

---

1) Wij vestigen er de aandacht op, dat sedert enkele jaren de ingezonden oplossingen niet meer door eene andere hand dan die van den oplosser behoeven geschreven te worden. Wij hopen, dat de wegneming van deze belemmerende bepaling tot vermeerdering der inzendingen aanleiding moge geven.

alle factoren verschillend, dan is $\mu(m) = +1$, wanneer hun aantal even, en $\mu(m) = -1$, wanneer hun aantal oneven is; zoo is $\mu(1) = +1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(10) = +1$, $\mu(12) = 0$, enz.

De bovenstaande reeks is nu voor waarden van x met positief bestaanbaar stuk eene functie dezer veranderlijke. Men vraagt deze functie te onderzoeken in de omgeving van $x = 0$.

3. Gevraagd een onderzoek van de functie:

$$f(s) = \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{s}{2}-1} \vartheta_{g_1, g_2}(v; \tau)\, d\left(\frac{\tau}{i}\right).$$

Met de ϑ-functie onder het integraalteeken wordt bedoeld:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} exp.\ \pi i\tau\,(n + g_2)^2 + 2\pi i\,(v + g_1)\,(n + g_2).$$

4. Voor positieve waarden van s stellen de integralen

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{(1+t^2)^s}\, dt \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{\sin xt}{(1+t^2)^s}\, dt$$

functies van x en s voor. Men vraagt deze functies te onderzoeken en inzonderheid aan te geven, of zij bij negatieve waarden van s blijven bestaan.

5. Gegeven eene ruimtekromme R^n van den n^{den} graad ($n>4$) en het geslacht nul, die niet op een kwadratisch oppervlak ligt. Gevraagd de meetkundige plaats van het middelpunt der kwadratische oppervlakken door negen opvolgende punten der kromme, met uitvoerige behandeling van het eenvoudigste geval $n = 5$.

6. In een ruimte R_{13} van dertien afmetingen zijn 15 punten P_k, ($k = 1, 2, \ldots, 15$) willekeurig en dus zoo aangenomen, dat er geen 14 dezer punten in eene ruimte R_{12} liggen. Men bepaalt de $(15)_3 = 455$ punten P_{klm}, die de snijpunten vormen van de vlakken V_{klm} door drie punten P_k, P_l, P_m uit deze 15 met de ruimten R_{11} door de 12 telkens overblijvende. Vijf dezer punten, die gezamenlijk de 15 indices dragen en daarom vormen wat wij een „volledig vijftal" noemen, liggen steeds in een driedimensionale ruimte R_3.

Gevraagd of — en zoo ja op hoeveel verschillende wijzen — het mogelijk is 91 dier ruimten te vinden, die gezamenlijk door de 455 punten P_{klm} gaan zonder dat twee dier ruimten een punt met elkaar gemeen hebben.

Of, ontdaan van de meetkundige inkleeding: Een aantal van 455 voorwerpen P_{klm} zijn van elkander onderscheiden door dat elk drie ongelijke aanwijzers k, l, m draagt, die van 1 tot 15 opklimmen. Elke groep van vijf dezer voorwerpen, die als $P_{1,2,3}$, $P_{4,5,6}$, $P_{7,8,9}$, $P_{10,11,12}$, $P_{13,14,15}$ gezamenlijk de 15 aanwijzers vertoonen, heet een „volledige groep". Gevraagd, of het mogelijk is (en zoo ja op hoeveel wijzen) deze 455 voorwerpen zoo in 91 volledige groepen te rangschikken, dat bij geen paar dezer groepen twee paren van voorwerpen met hetzelfde zestal aanwijzers voorkomen.

(Dit vraagstuk is een bijzonder geval van een meer algemeen vraagstuk, waarbij men van mn willekeurige punten in de ruimte R_{mn-2} uitgaat. Hier is $m = 5$, $n = 3$ genomen; voor $m = 3$, $n = 2$ treedt het bijzondere geval der configuratie van SEGRE op. Uitbreidingen liggen dus voor de hand en zullen bij de beoordeeling in aanmerking komen. Men vergelijke: *Verslag Kon. Akad. v. Wet.*, Nov. 1901, p. 329).

7. Men beschouwt twee in verschillende vlakken gelegen stralenbundels, waartusschen eene verwantschap (m, n) bestaat. Gevraagd wordt een onderzoek van het stralencomplex, gevormd door de rechten, welke elk op twee overeenkomstige stralen der gegeven bundels rusten.

8. Met den naam „pan-algebraïsche" krommen bestempelt GINO LORIA (*Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven*, Teubner, 1902, blz. 724) de integraalkrommen van eene differentiaalvergelijking der eerste orde van den vorm:

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-r} = 0,$$

waar $f_r(x, y)$ eene geheele stelkundige functie voorstelt. Tot de hierdoor aangewezen groep behooren, behalve de algebraïsche krommen, nagenoeg alle bekende transcendente krommen.

Men vraagt transformaties op te sporen en te onderzoeken, die eene pan-algebraïsche kromme in eene kromme omzetten, welke wederom pan-algebraïsch is.

9. De groepen van eene straleninvolutie van den graad m zijn projectief toegevoegd aan de groepen van eene, in hetzelfde vlak gelegen, straleninvolutie van den graad n. Men vraagt een onderzoek der kromme, welke gevormd wordt door de snijpunten van overeenkomstige stralengroepen.

10. Een onveranderlijk lichaam beweegt zich zoodanig dat het vrijheid van den vierden graad bezit. Alsdan vormen de schroefassen om welke het zich bewegen kan, een complex van den tweeden graad, welks singulier oppervlak eene cylindroïde is. Dit complex bevat ∞^3 congruenties (3,2), die de assen voorstellen, om welke een lichaam met vrijheid van den derden graad zich bewegen kan. Zij laten zich door de methode van CAPORALI afbeelden als oppervlakken van den vierden graad (F^4) met dubbelkegelsnede, die met elkander de dubbele kegelsnede, de enkelvoudige kegelsnede en een rechte lijn, die beide snijdt, gemeen hebben. Door deze basiskromme worden evenwel de ∞^3 oppervlakken F^4 onvoldoende bepaald. Men verlangt: 1°. de bepaling der aanvullende voorwaarden, die het stelsel oppervlakken F^4 bepalen; 2°. eene beschouwing van verschillende enkelvoudig en tweevoudig oneindige stelsels oppervlakken F^4, die onder de ∞^3 oppervlakken kunnen voorkomen; 3°. de verklaring der beteekenis, die deze bepalende elementen, zoowel als de gevonden stelsels, voor de beweging van het lichaam hebben.

(Zie omtrent een en ander de verhandeling van Prof. J. CARDINAAL, *Archives Néerlandaises*, Série II, T VI (1901), p. 117—126).

11. Eene rechte a beweegt zich zoodanig, dat vier harer punten in onveranderlijke platte vlakken blijven. Deze beweging is o. a. onderzocht door MANNHEIM, HALPHEN, SCHÖNFLIES; uit dit onderzoek blijkt, dat a een regelvlak van den vierden graad beschrijft. Men verlangt een nauwkeurig onderzoek naar den aard van dit regelvlak, de plaats die het in eene bekende classificatie inneemt, zijne veelvoudige kromme, enz.

(Vergelijk SCHOENFLIES, *Geometrie der Bewegung*, Teubner, (1886) p. 185 en volg.; MANNHEIM, *Géométrie cinématique*, Gauthier-Villars (1894), p. 169 en volg.)

12. Op een horizontaal vlak is een zware homogene halve bol geplaatst met het ronde oppervlak naar beneden. Op het

platte bovenvlak van dezen eersten halven bol rust een tweede dergelijke, echter met een anderen straal beschreven, evenzeer met het ronde oppervlak naar beneden. Men vraagt de kleine schommelingen na te gaan van dezen toestel om den evenwichtsstand, wanneer het aanrakingspunt van den tweeden halven bol met het bovenvlak van den eersten zich in de nabijheid bevindt van het middelpunt van dit bovenvlak en alle oppervlakken ruw genoeg zijn om glijding te beletten.

Deze prijsvraag werd in 1898 opgelost voor het geval dat de halve bollen geene of althans slechts eene geringe aanvankelijke spinnende beweging om de stralen der aanrakingspunten bezitten. (Zie *Nieuw Archief*, tweede reeks, deel IV (1900), p. 205).

Men vraagt thans eene oplossing, waarbij aangenomen wordt dat eene zoodanige spinnende beweging met eindige rotatiesnelheid aanwezig is.

13. In zijne dissertatie „Het beginsel van Huygens" geeft Dr. D. P. Moll (zie p. 50) eene definitie van hetgeen hij verstaat onder een phase-oppervlak. Zulk een phase-oppervlak gaande door een punt A, zal in het algemeen in den loop van den tijd veranderen (zie p. 133).

Men vraagt voor één of meer bijzondere gevallen de bestudeering van de verandering, welke een phase-oppervlak, waarop een gegeven punt gelegen is, ondergaat.

14. Met behulp van de vergelijkingen der electromagnetische lichttheorie de lichtbeweging te onderzoeken in een homogeen niet geleidend medium, dat de eigenschappen van een éénassig kristal heeft en zich naar alle zijden tot in het oneindige uitstrekt, hetzij voor het geval dat eene aanvankelijke tot de ruimte binnen een gesloten oppervlak beperkte evenwichtsverstoring gegeven is, hetzij voor het geval dat in eene zeer kleine ruimte voortdurend eene gegevene electromotorische kracht werkt, die eene enkelvoudig periodieke functie van den tijd is. Van de kleurschifting mag worden afgezien.

15. Verschillende natuurkundigen (zie bijv. LECHER, *Eine Studie über electrische Resonanzerscheinungen*, *Wied. Ann.*, deel 41, bladz. 850 en COHN, *Ueber die Ausbreitung electrischer Schwingungen im Wasser*, *Wied. Ann.*, deel 45, bldz.

370) hebben proeven genomen over de voortplanting van electrische golven langs twee evenwijdige metaaldraden, een verschijnsel waarvan de theorie zeer eenvoudig is, zoo men de draden als volkomen geleidend beschouwt en onderstelt dat de geheele omringende ruimte met een enkel homogeen diëlectricum gevuld is. Er is dan een bewegingstoestand mogelijk, waarbij de golffronten loodrecht op de draden staan en de electrische krachtlijnen in de golffronten van den eenen draad naar den anderen loopen. De voortplantingssnelheid heeft de bekende van de diëlectrische constante afhankelijke waarde.

Bij de proeven met vloeistoffen waren deze besloten in eene de draden omringende cylindrische of prismatische ruimte met de beschrijvende lijnen evenwijdig aan de draden; zoodra nu echter de afstanden der punten van het cylinderoppervlak tot de draden niet zeer groot zijn in vergelijking met den afstand a dezer laatste onderling, zullen eenige krachtlijnen buiten den cylinder treden en zal dus de voortplanting ten deele in de omringende lucht plaats hebben.

Met het oog hierop wordt het volgende vraagstuk gesteld:

Een vloeibaar diëlectricum is door een horizontaal vlak van de lucht gescheiden; het strekt zich naar beneden en in alle horizontale richtingen tot in het oneindige uit. De twee draden liggen in een horizontaal vlak op eindige diepte h beneden den vloeistofspiegel. Hoe groot is thans de snelheid, waarmede zich electrische trillingen langs de draden kunnen voortplanten?

Ook eene benaderde oplossing, eene zoodadige bijv. waarbij h aanmerkelijk grooter dan a ondersteld wordt en termen met de tweede en hoogere machten van a/h worden verwaarloosd, kan voor bekroning in aanmerking komen.

Alle beoefenaren der Wiskunde worden door het Bestuur uitgenoodigd, om hunne oplossingen van een of meer dezer Vraagstukken vóór den eersten December 1903, vrachtvrij aan ondergeteekende, wonende te Amsterdam, Vondelstraat 104*f*, in te zenden; terwijl in het bijzonder de Leden van het Genootschap uitgenoodigd worden, gelijke inzendingen te doen

van zoodanige Vraagstukken, als hun geschikt mochten voorkomen, om in het vervolg als Prijsvragen te worden opgegeven. De verdere formaliteiten, bij deze inzendingen in acht te nemen, en de voorwaarden van prijsuitloving zijn:

1°. De in te zenden stukken moeten, liefst in de Nederlandsche taal, duidelijk gesteld en met eene gemakkelijk leesbare hand geschreven zijn; terwijl de oplossing van elk vraagstuk een afzonderlijk geschrift moet uitmaken, waarvan de bladen slechts aan ééne zijde beschreven zijn.

2°. De oplossingen van de voorgestelde vragen, en de voorstellen, bestemd om in het vervolg als Prijsvragen te worden opgegeven, moeten bij de inzending vergezeld gaan van een verzegeld briefje, waarin de naam en het adres des inzenders vermeld wordt, en dat tot opschrift heeft eene spreuk, waarmede elke oplossing, of elk opgegeven voorstel, bij dat naambriefje behoorende, zal moeten onderteekend zijn. Is een opgegeven vraagstuk niet oorspronkelijk, maar door den inzender uit eenig binnen- of buitenlandsch geschrift overgenomen, dan moet zulks bij de opgave aangewezen worden.

3°. Bij de oplossingen moeten in alles gevolgd worden de bepalingen en omschrijvingen, welke het Bestuur noodig geoordeeld heeft bij sommige der opgegeven vraagstukken te voegen; behoudens nochtans de bevoegdheid der oplossers, om zoodanige andere oplossingen, gevolgtrekkingen, aanmerkingen en leeringen, welke het Bestuur niet gevraagd mocht hebben, er bij te voegen, als hun in den loop hunner beschouwingen voor den geest komen. Zulke bijvoegingen zullen, indien zij eenige verdiensten bezitten, bij de beoordeeling gunstig in aanmerking genomen worden.

4°. De uitslag van de beoordeeling der oplossingen en opgaven, die volgens dit Programma worden ingezonden, zal op de Algemeene Vergadering van het jaar 1904 den leden en daarna algemeen worden bekend gemaakt; terwijl in die Vergadering de naambriefjes, tot goedgekeurde stukken behoorende, geopend en voorgelezen, doch de overige ongeopend verbrand zullen worden. Voor zoo verre er onder de stukken,

die tot een zelfde naambriefje behooren, eenige voldoende en andere onvoldoende bevonden mochten zijn, zal van de laatste volstrekt geene melding gemaakt worden; het Bestuur verbindt zich daaromtrent de stipste geheimhouding in acht te nemen. De inzender van de onvoldoend gekeurde stukken zal echter op zijne aanvrage, bij den ondergeteekende, gedurende één maand na die Algemeene Vergadering, een uittreksel uit het rapport der beoordeeling, voor zooveel die afkeuring betreft, kunnen bekomen

5°. De bekroonde oplossingen kunnen in het NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE worden opgenomen.

6°. Ieder lid, die tien der voornoemde prijsvragen in het zelfde jaar, of in verschillende jaren, voldoende beantwoordt, verwerft daardoor den rang van Lid van Verdienste, en zal als zoodanig ter Algemeene Vergadering geproclameerd worden, dadelijk nadat, bij het openen van het naambriefje, zijn naam zal zijn bekend geworden.

AMSTERDAM,
December 1902.

Op last van het bestuur,
D. J. KORTEWEG.

PROGRAMMA[1])

VAN

JAARLIJKSCHE PRIJSVRAGEN,

VOOR HET JAAR 1904,

TER BEANTWOORDING UITGESCHREVEN

DOOR HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP:

Een onvermoeide arbeid komt alles te boven,

TE AMSTERDAM.

1. Men vraagt te bepalen de betrekkingen, die tusschen de coëfficienten der algemeene homogene lineaire differentiaal-vergelijking moeten bestaan, opdat deze door verandering van onafhankelijk veranderlijke kunne worden herleid tot eene soortgelijke vergelijking met constante coëfficienten.

Hierbij te raadplegen HALPHEN, „Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables." *Mém. prés. par divers savants à l'Acad. des Sciences de l'Inst.*, T 28).

2. Men beschouwt de reeks $\sum_{m=1}^{m=\infty} \mu(m)\, e^{-mx}$. Met $\mu(m)$ is op de gebruikelijke wijze eene functie aangeduid, die in de getallentheorie voorkomt. Splitst men namelijk het geheele getal m in zijne ondeelbare factoren, dan is $\mu(m) = 0$, zoodra twee of meer dier factoren aan elkander gelijk zijn. Zijn

[1]) Wij vestigen er de aandacht op, dat sedert enkele jaren de ingezonden oplossingen niet meer door eene andere hand dan die van den oplosser behoeven geschreven te worden. Wij hopen, dat de wegneming van deze belemmerende bepaling tot vermeerdering der inzendingen aanleiding mag geven.

alle factoren verschillend, dan is $\mu(m) = +1$, wanneer hun aantal even, en $\mu(m) = -1$, wanneer hun aantal oneven is; zoo is $\mu(1) = +1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(10) = +1$, $\mu(12) = 0$, enz.

De bovenstaande reeks is nu voor waarden van x met positief bestaanbaar stuk eene functie dezer veranderlijke. Men vraagt deze functie te onderzoeken in de omgeving van $x = 0$.

3. Men vraagt de integraal $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\theta}{(k^2 + 1 - 2k \cos \theta)^s} d\theta$ als functie van s en van x te onderzoeken.

4. De raaklijnen eener kegelsnede zijn gerangschikt in de groepen eener involutie van den graad n. Men vraagt een onderzoek naar de eigenschappen der kromme, welke de onderlinge snijpunten van de rechten eener groep bevat. Daarbij vooral te letten op de bijzonderheden, die zich voordoen als de involutie groepen met meer dan één dubbelelement of andere niet in eene algemeene involutie voorkomende bijzonderheden bevat.

5. Wat beschrijft het middelpunt van de poolkegelsnee van eene gegevene kromme met betrekking tot een punt van deze kromme, als dit punt de kromme doorloopt?

Men verlangt de Plücker'sche getallen der meetkundige plaats in die der gegevene kromme uitgedrukt te zien.

6. In eene ruimte R_{13} van dertien afmetingen zijn 15 punten P_k, $(k = 1, 2, \ldots, 15)$ willekeurig en dus zoo aangenomen, dat er geen 14 dezer punten in eene ruimte R_{12} liggen. Men bepaalt de $(15)_3 = 455$ punten P_{klm}, die de snijpunten vormen van de vlakken V_{klm} door drie punten P_k, P_l, P_m uit deze 15 met de ruimten R_{11} door de 12 telkens overblijvende. Vijf dezer punten, die gezamenlijk de 15 indices dragen en daarom vormen wat wij een „volledig vijftal" noemen, liggen steeds in eene driedimensionale ruimte R_3. Gevraagd of — en zoo ja op hoeveel verschillende wijzen — het mogelijk is 91 dier ruimten te vinden, die gezamenlijk door de 455 punten P_{klm} gaan zonder dat twee dier ruimten een punt met elkaar gemeen hebben.

Of, ontdaan van de meetkundige inkleeding: Een aantal van 455 voorwerpen P_{klm} zijn van elkander onderscheiden

door dat elk drie ongelijke aanwijzers k, l, m draagt, die van 1 tot 15 opklimmen. Elke groep van vijf dezer voorwerpen, die als $P_{1,2,3}$, $P_{4,5,6}$, $P_{7,8,9}$, $P_{10,11,12}$, $P_{13,14,15}$ gezamenlijk de 15 aanwijzers vertoonen, heet een „volledige groep". Gevraagd of het mogelijk is (en zoo ja op hoeveel wijzen) deze 455 voorwerpen zoo in 91 volledige groepen te rangschikken, dat bij geen paar dezer groepen twee paren van voorwerpen met hetzelfde zestal aanwijzers voorkomen.

(Dit vraagstuk is een bijzonder geval van een meer algemeen vraagstuk, waarbij men van mn willekeurige punten in de ruimte R_{mn-2} uitgaat. Hier is $m = 5$, $n = 3$ genomen; voor $m = 3$, $n = 2$ treedt het bijzondere geval der configuratie van SEGRE op. Uitbreidingen liggen dus voor de hand en zullen bij de beoordeeling in aanmerking komen. Men vergelijke: *Verslag Kon. Akad. v. Wet.*, Nov. 1901, p. 329).

7. Men beschouwt twee in verschillende vlakken gelegen stralenbundels, waartusschen eene verwantschap (m, n) bestaat. Gevraagd wordt een onderzoek van het stralencomplex, gevormd door de rechten, welke elk op twee overeenkomstige stralen der gegeven bundels rusten.

8. Met den naam „pan-algebraïsche" krommen bestempelt GINO LORIA (*Spezielle algebraische und trancendente ebene Kurven*, Teubner, 1902, blz. 724) de integraalkrommen van eene differentiaalvergelijking der eerste orde van den vorm:

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-r} = 0,$$

waar $f_r(x, y)$ eene geheele stelkundige functie voorstelt. Tot de hierdoor aangewezen groep behooren, behalve de algebraïsche krommen, nagenoeg alle bekende transcendente krommen.

Men vraagt transformaties op te sporen en te onderzoeken, die eene pan-algebraïsche kromme in eene kromme omzetten, welke weder pan-algebraïsch is.

9. De groepen van eene straleninvolutie van den graad m zijn projectief toegevoegd aan de groepen van eene, in hetzelfde vlak gelegen, straleninvolutie van den graad n. Men vraagt een onderzoek der kromme, welke gevormd wordt door de snijpunten van overeenkomstige stralengroepen.

10. Aan te geven, welke verschillende soorten van meet-

kundige plaatsen en omhullenden van punten, lijnen, vlakken en ruimten met drie afmetingen in de ruimte met vier afmetingen denkbaar zijn en de eenvoudigste van deze in haar ontstaan en eigenschappen te schetsen.

(Men vergelijke o.a. de verhandeling van G. VERONESE in het 19e deel der *Math. Annalen*).

11. Een onveranderlijk lichaam beweegt zich zoodanig dat het vrijheid van den vierden graad bezit. Alsdan vormen de schroefassen om welke het zich bewegen kan, een complex van den tweeden graad, welks singulier oppervlak eene cylindroïde is. Dit complex bevat ∞^3 congruenties (3,2), die de assen voorstellen, om welke een lichaam met vrijheid van den derden graad zich bewegen kan. Zij laten zich door de methode van CAPORALI afbeelden als ∞^3 oppervlakken van den vierden graad (F^4) met dubbelkegelsnede, die met elkander de dubbelkegelsnede, de enkelvoudige kegelsnede en eene rechte lijn, die beide snijdt, gemeen hebben. Men verlangt: 1°. eene beschouwing van verschillende enkelvoudig en tweevoudig oneindige stelsels oppervlakken F^4, die onder de ∞^3 oppervlakken kunnen voorkomen; 2°. de verklaring der beteekenis, die de gevonden stelsels voor de beweging van het lichaam hebben.

(Zie omtrent een en ander de verhandeling van Prof. J. CARDINAAL, *Archives Néerlandaises*, Série II, T VI (1901), p. 117—126).

12. Eene rechte *a* beweegt zich zoodanig, dat vier harer punten in onveranderlijke platte vlakken blijven. Deze beweging is o. a. onderzocht door MANNHEIM, HALPHEN, SCHÖNFLIES; uit dit onderzoek blijkt, dat *a* een regelvlak van den vierden graad beschrijft. Men verlangt een nauwkeurig onderzoek naar den aard van dit regelvlak, de plaats die het in eene bekende classificatie inneemt, zijne veelvoudige kromme, enz.

(Vergelijk SCHOENFLIES, *Geometrie der Bewegung*, Teubner, (1886) p. 185 en volg.; MANNHEIM, *Géométrie cinématique*, Gauthier-Villars (1894), p. 169 en volg.).

13. Op een horizontaal vlak is een zware homogene halve bol geplaatst met het ronde oppervlak naar beneden. Op het platte bovenvlak van dezen eersten halven bol rust een tweede dergelijke, echter met een anderen straal beschreven, even-

zeer met het ronde oppervak naar beneden. Men vraagt de kleine schommelingen na te gaan van dezen toestel om den evenwichtsstand, wanneer het aanrakingspunt van den tweeden halven bol met het bovenvlak van den eersten zich in de nabijheid bevindt van het middelpunt van dit bovenvlak en alle oppervlakken ruw genoeg zijn om glijding te beletten.

Deze prijsvraag werd in 1898 opgelost voor het geval dat de halve bollen geene of althans slechts eene geringe aanvankelijke spinnende beweging om de stralen der aanrakingspunten bezitten. (Zie *Nieuw Archief*, tweede reeks, deel IV (1900), p. 205).

Men vraagt thans eene oplossing, waarbij aangenomen wordt dat eene zoodanige spinnende beweging met eindige rotatiesnelheid aanwezig is, hetzij bij beide halve bollen, hetzij bij één van beiden.

14. Men verlangt een onderzoek naar de beweging eener onbegrensde onsamendrukbare vloeistof met wrijving, in welke een bolvormig lichaam zich met standvastige snelheid a voortbeweegt; de vloeistof wordt ondersteld niet langs het lichaam te glijden.

Men wenscht daarbij in de eerste plaats uitgemaakt te zien, hetzij door eene algemeene beschouwing, hetzij, zoo dit middel tot het doel kan leiden, met behulp van reeksontwikkelingen naar de opklimmonde machten van a, waarbij slechts een beperkt aantal termen in aanmerking wordt genomen, of inderdaad, zooals KORTEWEG verwachtte (Phil. Magazine (5), vol 16, p. 118, 1883), geen stationaire toestand kan worden gevonden, zoodra men de tweede en hoogere machten der snelheden in rekening brengt. Mocht zulk een toestand wel mogelijk blijken, dan berekene men den term met a^3 in de reeksontwikkeling voor den weerstand dien het lichaam ondervindt.

15. Door HERTZ is de vormverandering berekend, die plaats heeft wanneer twee isotrope vaste lichamen met eene gegevene kracht tegen elkander worden gedrukt. (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 92, p. 156, 1881; ook opgenomen in *Schriften vermischten Inhalts*, p. 155) Men vraagt eene uitbreiding van dit onderzoek tot anisotrope lichamen, waarbij men, zoo dit wenschelijk blijkt, het eene

lichaam isotroop kan onderstellen, en zich, wat het andere betreft, tot een enkel bijzonder eenvoudig geval van anisotropie kan beperken.

Alle beoefenaren der Wiskunde worden door het Bestuur uitgenoodigd, om hunne oplossingen van een of meer dezer Vraagstukken vóór den eersten December 1904, vrachtvrij aan ondergeteekende, wonende te Amsterdam, Vondelstraat 104*f*, in te zenden; terwijl in het bijzonder de Leden van het Genootschap uitgenoodigd worden, gelijke inzendingen te doen van zoodanige Vraagstukken, als hun geschikt mochten voorkomen, om in het vervolg als Prijsvragen te worden opgegeven. De verdere formaliteiten, bij deze inzendingen in acht te nemen, en de voorwaarden van prijsuitloving zijn:

1°. De in te zenden stukken moeten, liefst in de Nederlandsche taal, duidelijk gesteld en met eene gemakkelijk leesbare hand geschreven zijn; terwijl de oplossing van elk vraagstuk een afzonderlijk geschrift moet uitmaken, waarvan de bladen slechts aan ééne zijde beschreven zijn.

2°. De oplossingen van de voorgestelde vragen, en de voorstellen, bestemd om in het vervolg als Prijsvragen te worden opgegeven, moeten bij de inzending vergezeld gaan van een verzegeld briefje, waarin de naam en het adres des inzenders vermeld wordt, en dat tot opschrift heeft eene spreuk, waarmede elke oplossing, of elk opgegeven voorstel, bij dat naambriefje behoorende, zal moeten onderteekend zijn.

Is een opgegeven vraagstuk niet oorspronkelijk, maar door den inzender uit eenig binnen- of buitenlandsch geschrift overgenomen, dan moet zulks bij de opgave aangewezen worden.

3°. Bij de oplossingen moeten in alles gevolgd worden de bepalingen en omschrijvingen, welke het Bestuur noodig geoordeeld heeft bij sommige der opgegeven vraagstukken te voegen; behoudens nochtans de bevoegdheid der oplossers, om zoodanige andere oplossingen, gevolgtrekkingen, aanmerkingen en leeringen, welke het Bestuur niet gevraagd mocht hebben, er bij te voegen, als hun in den loop hunner beschouwingen voor den geest komen. Zulke bijvoegingen zullen, indien zij eenige verdienste bezitten, bij de beoordeeling gunstig in aanmerking genomen worden.

4°. De uitslag van de beoordeeling der oplossingen en opgaven, die volgens dit Programma worden ingezonden, zal op de Algemeene Vergadering van het jaar 1905 den leden en daarna algemeen worden bekend gemaakt; terwijl in die Vergadering de naambriefjes, tot goedgekeurde stukken behoorende, geopend en voorgelezen, doch de overige ongeopend verbrand zullen worden. Voor zoo verre er onder de stukken, die tot een zelfde naambriefje behooren, eenige voldoende en andere onvoldoende bevonden mochten zijn, zal van de laatste volstrekt geene melding gemaakt worden; het Bestuur verbindt zich daaromtrent de stipste geheimhouding in acht te nemen. De inzender van de onvoldoend gekeurde stukken zal echter op zijne aanvrage, bij den ondergeteekende, gedurende ééne maand na die Algemeene Vergadering, een uittreksel uit het rapport der beoordeeling, voor zooveel die afkeuring betreft, kunnen bekomen.

5°. De bekroonde oplossingen kunnen in het NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE worden opgenomen.

6°. Ieder lid, die tien der voornoemde prijsvragen in het zelfde jaar, of in verschillende jaren, voldoende beantwoordt, verwerft daardoor den rang van Lid van Verdienste, en zal als zoodanig ter Algemeene Vergadering geproclameerd worden, dadelijk nadat, bij het openen van het naambriefje, zijn naam zal zijn bekend geworden.

AMSTERDAM,
December 1903.

Op last van het bestuur,
D. J. KORTEWEG.

FEB 25 1905

4

PROGRAMMA[1])

VAN

JAARLIJKSCHE PRIJSVRAGEN,

VOOR HET JAAR 1905,

TER BEANTWOORDING UITGESCHREVEN

DOOR HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP:

Een onvermoeide arbeid komt alles te boven,

TE AMSTERDAM.

1. Men vraagt alle harmonische differentiaalvergelijkingen te bepalen die met behulp van de methode van LAPLACE geïntegreerd kunnen worden. (Zie DARBOUX, „*Leçons sur la théorie générale des surfaces*", 2e *Partie*, (1889), p. 217.)

2. In de „*Oeuvres complètes*" van ABEL (*Ed.* SYLOW *et* LIE, I, p. 20) vindt men de formule:

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})=\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2}\, v\, dv \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2}\, dt.$$

Deze formule is onjuist, zooals reeds werd opgemerkt door BERTRAND (zie de aangehaalde editie der „*Oeuvres complètes*" van ABEL, *Notes*, *II*, p. 290). Men vraagt haar te verbeteren.

---

[1]) Wij vestigen er de aandacht op, dat sedert enkele jaren de ingezonden oplossingen niet meer door eene andere hand dan die van den oplosser behoeven geschreven te worden. Wij hopen, dat de wegneming van deze belemmerende bepaling tot vermeerdering der inzendingen aanleiding moge geven.

3. Men vraagt de integraal $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\theta}{(k^2+1-2k\cos\theta)^s}\, d\theta$ als functie van s en van x te onderzoeken.

4. Men vraagt te bepalen, liefst over het geheele veld en in elk geval in de nabijheid van den oorsprong, het beloop der krommen voorgesteld door de differentiaalvergelijking:

$$(ay + bx^2 + cxy + dy^2)\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right] + (ey + fx^2 + gxy + hy^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Zie omtrent de beteekenis van dit vraagstuk voor de kennis van den loop der kromtelijnen in de nabijheid van een dubbelombilikaalpunt: *Versl. Kon. Akad. v. Wet.*, *Dl.* 13, Nov. 1904, p. 393. (Zie ook de Engelsche vertaling *Proc. Kon. Akad.*, *Dl.* 7, Dec. 1904, wegens de aldaar toegevoegde noot.) Daarbij valt op te merken dat de daar optredende coëfficiënten niet geheel van elkander onafhankelijk zijn. Tusschen hen bestaat namelijk eene betrekking hier overeenkomende met: $g = 2b - 2d$. Zoo deze betrekking een belangrijken invloed uitoefent op het gevraagde beloop, dient dit bijzonder geval nader te worden beschouwd. Overigens kan men zich bepalen tot het onderzoek der algemeene gevallen welke geene bijzondere betrekkingen tusschen de coëfficiënten onderstellen en de daartusschen bestaande overgangsgevallen, zoo er meerdere algemeene gevallen te onderscheiden zijn.

5. In onze ruimte vormen de hoekpunten van het dodekaeder tweemaal genomen de hoekpunten van vijf gelijkmiddelpuntige even groote kuben. Gevraagd voor de ruimten tot en met die van twintig afmetingen een volledige opgaaf der met bovenstaande stelling analoge betrekking tusschen de hoekpunten-groepen van twee regelmatige polytopen eener zelfde ruimte.

6. Aan te geven, welke verschillende soorten van meetkundige plaatsen en omhullenden van punten, lijnen, vlakken en ruimten met drie afmetingen in de ruimte met vier afmetingen denkbaar zijn en de eenvoudigste van deze in haar ontstaan en eigenschappen te schetsen.

(Men vergelijke o.a. de verhandeling van G. VERONESE in het 19e deel der *Math. Annalen*).

7. De raaklijnen eener kegelsnede zijn gerangschikt in de groepen eener involutie van den graad n. Men vraagt een onderzoek naar de eigenschappen der kromme, welke de onderlinge snijpunten van de rechten eener groep bevat. Daarbij vooral te letten op de bijzonderheden, die zich voordoen als de involutie groepen met meer dan één dubbelelement of andere niet in eene algemeene involutie voorkomende bijzonderheden bevat.

8. Men beschouwt twee in verschillende vlakken gelegen stralenbundels, waartusschen eene verwantschap (m, n) bestaat. Gevraagd wordt een onderzoek van het stralencomplex, gevormd door de rechten, welke elk op twee overeenkomstige stralen der gegeven bundels rusten.

9. Met den naam „pan-algebraïsche" krommen bestempelt Gino Loria (*Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven*, Teubner, 1902, blz. 724) de integraalkrommen van eene differentiaalvergelijking der eerste orde van den vorm:

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-r} = 0,$$

waar $f_r(x, y)$ eene geheele stelkundige functie voorstelt. Tot de hierdoor aangewezen groep behooren, behalve de algebraïsche krommen, nagenoeg alle bekende transcendente krommen.

Men vraagt transformaties op te sporen en te onderzoeken, die eene pan-algebraïsche kromme in eene kromme omzetten, welke weder pan-algebraïsch is.

10. Eene figuur van onveranderlijke gedaante beweegt zich zoo in haar vlak dat een punt P dier figuur eene vaste kromme C van het vlak doorloopt, terwijl eene rechte lijn der figuur, op welke lijn P gelegen is, steeds door een vast punt O van het vlak gaat. Wanneer voor de kromme C de Plücker'sche getallen gegeven zijn, vraagt men die getallen voor de beide poolkrommen, die bij deze beweging optreden, te bepalen en na te gaan welke wijzigingen deze getallen ondergaan, wanneer de kromme C een bijzonderen stand inneemt ten opzichte van de lijn en de imaginaire cirkelpunten in het oneindige.

11. Een onveranderlijk lichaam beweegt zich zoodanig dat het vrijheid van den vierden graad bezit. Alsdan vormen de schroefassen, om welke het zich bewegen kan, een complex van den tweeden graad, welks singulier oppervlak eene cylindroïde is. Dit complex bevat ∞^3 congruenties (3,2), die de assen voorstellen, om welke een lichaam met vrijheid van den derden graad zich bewegen kan. Zij laten zich door de methode van CAPORALI afbeelden als ∞^8 oppervlakken van den vierden graad (F^4) met dubbelkegelsnede, die met elkander de dubbelkegelsnede, de enkelvoudige kegelsnede en eene rechte lijn, die beide snijdt, gemeen hebben. Men verlangt: 1°. eene beschouwing van verschillende enkelvoudig en tweevoudig oneindige stelsels oppervlakken F^4, die onder de ∞^3 oppervlakken kunnen voorkomen; 2°. de verklaring der beteekenis, die de gevonden stelsels voor de beweging van het lichaam hebben.

(Zie omtrent een en ander de verhandeling van Prof. J. CARDINAAL, *Archives Néerlandaises*, Série II, T. VI (1901), p. 117—126.)

12. Een rechte a beweegt zich zoodanig, dat vier harer punten in onveranderlijke platte vlakken blijven. Deze beweging is o. a. onderzocht door MANNHEIM, HALPHEN, SCHÖNFLIES; uit dit onderzoek blijkt, dat a een regelvlak van den vierden graad beschrijft. Men verlangt een nauwkeurig onderzoek naar den aard van dit regelvlak, de plaats die het in eene bekende classificatie inneemt, zijne veelvoudige kromme, enz.

(Vergelijk SCHOENFLIES, *Geometrie der Bewegung*, Teubner. (1886), p. 185 en volg.; MANNHEIM, *Géométrie cinématique*, Gauthier-Villars (1894), p. 169 en volg.)

13. Men vraagt een onderzoek naar het complex gevormd door de lijnen die zoodanig gekozen worden dat wanneer een lichaam van onveranderlijke gedaante, zich op eene gegeven wijze bewegende, plotseling gedwongen wordt om zulk eene lijn als as te wentelen, bijv. doordat het in twee zijner punten vastgehouden wordt, de levende kracht der wenteling eene gegevene fractie zij der oorspronkelijke levende kracht.

14. Men verlangt een onderzoek naar de beweging eener onbegrensde onsamendrukbare vloeistof met wrijving, in welke een bolvormig lichaam zich met standvastige snelheid a voortbeweegt; de vloeistof wordt ondersteld niet langs het lichaam te glijden.

Men wenscht daarbij in de eerste plaats uitgemaakt te zien, hetzij door eene algemeene beschouwing, hetzij, zoo dit middel tot het doel kan leiden, met behulp van reeksontwikkelingen naar de opklimmende machten van a, waarbij slechts een beperkt aantal termen in aanmerking wordt genomen, of inderdaad, zooals KORTEWEG verwachtte (Phil. Magazine (5), vol. 16, p. 118, 1883), geen stationaire toestand kan worden gevonden, zoodra men de tweede en hoogere machten der snelheden in rekening brengt. Mocht zulk een toestand wel mogelijk blijken, dan berekene men den term met a^3 in de reeksontwikkeling voor den weerstand dien het lichaam ondervindt.

15. Door HERTZ is de vormverandering berekend, die plaats heeft wanneer twee isotrope vaste lichamen met eene gegevene kracht tegen elkander worden gedrukt. (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 92, p. 156, 1881; ook opgenomen in *Schriften vermischten Inhalts*, p. 155). Men vraagt eene uitbreiding van dit onderzoek tot anisotrope lichamen, waarbij men, zoo dit wenschelijk blijkt, het eene lichaam isotroop kan onderstellen, en zich, wat het andere betreft, tot een enkel bijzonder eenvoudig geval van anisotropie kan beperken.

Alle beoefenaren der Wiskunde worden door het Bestuur uitgenoodigd, om hunne oplossingen van een of meer dezer Vraagstukken vóór den eersten December 1905, vrachtvrij aan ondergeteekende, wonende te Amsterdam, Vondelstraat 104*f*, in te zenden; terwijl in het bijzonder de Leden van het Genootschap uitgenoodigd worden, gelijke inzendingen te doen van zoodanige Vraagstukken, als hun geschikt mochten voorkomen, om in het vervolg als Prijsvragen te worden opgegeven. De verdere formaliteiten, bij deze inzen-

dingen in acht te nemen, en de voorwaarden van prijsuitloving zijn:

1°. De in te zenden stukken moeten, liefst in de Nederlandsche taal, duidelijk gesteld en met eene gemakkelijk leesbare hand geschreven zijn; terwijl de oplossing van elk vraagstuk een afzonderlijk geschrift moet uitmaken, waarvan de bladen slechts aan ééne zijde beschreven zijn.

2°. De oplossingen van de voorgestelde vragen, en de voorstellen, bestemd om in het vervolg als Prijsvragen te worden opgegeven, moeten bij de inzending vergezeld gaan van een verzegeld briefje, waarin de naam en het adres des inzenders vermeld wordt, en dat tot opschrift heeft eene spreuk, waarmede elke oplossing, of elk opgegeven voorstel, bij dat naambriefje behoorende, zal moeten onderteekend zijn.

Is een opgegeven vraagstuk niet oorspronkelijk, maar door den inzender uit eenig binnen- of buitenlandsch geschrift overgenomen, dan moet zulks bij de opgave aangewezen worden.

3°. Bij de oplossingen moeten in alles gevolgd worden de bepalingen en omschrijvingen, welke het Bestuur noodig geoordeeld heeft bij sommige der opgegeven vraagstukken te voegen; behoudens nochtans de bevoegdheid der oplossers, om zoodanige andere oplossingen, gevolgtrekkingen, aanmerkingen en leeringen, welke het Bestuur niet gevraagd mocht hebben, er bij te voegen, als hun in den loop hunner beschouwingen voor den geest komen. Zulke bijvoegingen zullen, indien zij eenige verdienste bezitten, bij de beoordeeling gunstig in aanmerking genomen worden.

4°. De uitslag van de beoordeeling der oplossingen en opgaven, die volgens dit Programma worden ingezonden, zal op de Algemeene Vergadering van het jaar 1906 den leden en daarna algemeen worden bekend gemaakt; terwijl in die Vergadering de naambriefjes, tot goedgekeurde stukken behoorende, geopend en voorgelezen, doch de overige ongeopend verbrand zullen worden. Voor zoo verre er onder de stukken, die tot een zelfde naambriefje behooren, eenige voldoende en andere onvoldoende bevonden mochten zijn, zal van de laatste volstrekt geene melding gemaakt worden;

het Bestuur verbindt zich daaromtrent de stipste geheimhouding in acht te nemen. De inzender van de onvoldoend gekeurde stukken zal echter op zijne aanvrage, bij den ondergeteekende, gedurende ééne maand na die Algemeene Vergadering, een uittreksel uit het rapport der beoordeeling, voor zooveel die afkeuring betreft, kunnen bekomen.

5°. De bekroonde oplossingen kunnen in het NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE worden opgenomen.

6°. Ieder lid, die tien der voornoemde prijsvragen in hetzelfde jaar, of in verschillende jaren, voldoende beantwoordt, verwerft daardoor den rang van Lid van Verdienste, en zal als zoodanig ter Algemeene Vergadering geproclameerd worden, dadelijk nadat, bij het openen van het naambriefje, zijn naam zal zijn bekend geworden.

AMSTERDAM,
December 1904.

Op last van het Bestuur,
D. J. KORTEWEG.

5

PROGRAMMA[1])

VAN

JAARLIJKSCHE PRIJSVRAGEN,

VOOR HET JAAR 1906,

TER BEANTWOORDING UITGESCHREVEN

DOOR HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP:

Een onvermoeide arbeid komt alles te boven,

TE AMSTERDAM.

1. Men vraagt alle harmonische differentiaal-vergelijkingen te bepalen die met behulp van de methode van LAPLACE geïntegreerd kunnen worden. (Zie DARBOUX, „*Leçons sur la théorie générale des surfaces*", 2e *Partie*, (1889), p. 217.)

2. In de „*Œuvres complètes*" van ABEL (*Éd.* SYLOW *et* LIE, I, p. 20) vindt men de formule:

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})=\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2y^2}\,v\,dv\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)\,e^{-v^2t^2}\,dt.$$

Deze formule is onjuist, zooals reeds werd opgemerkt door BERTRAND (zie de aangehaalde editie der „*Œuvres complètes*" van ABEL, *Notes*, *II*, p. 290). Men vraagt haar te verbeteren.

---

[1]) Wij vestigen er de aandacht op, dat sedert eenige jaren de ingezonden oplossingen niet meer door eene andere hand dan die van den oplosser behoeven geschreven te worden. Wij hopen, dat de wegneming van deze belemmerende bepaling tot vermeerdering der inzendingen aanleiding moge geven.

3. Aan het slot van § 2 zijner verhandeling: „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" (*Ges. Werke*, 2*e Aufl.*, S. 234) spreekt RIEMANN de volgende stelling uit:

Als eene periodieke functie $f(x)$ van de bestaanbare veranderlijke x gegeven is, bestaat er altijd eene functie $\varphi(x+iy)$, die eindig is voor $y>0$ en die voor $y=0$ overgaat in $f(x)$.

Het bewijs zoude in RIEMANN's proefschrift te vinden zijn.

De aandacht werd op deze stelling gevestigd door SCHWARZ (*Ges. Werke* II, S. 189, *Note*) en in zijne briefwisseling met HERMITE twijfelt STIELTJES beslist aan de juistheid er van (*Correspondance d'Hermite et de Stieltjes.* I, p. 216, 219). Volgens STIELTJES zoude de stelling slechts bij uitzondering kunnen gelden. Men vraagt in deze een nader onderzoek.

4. Men vraagt te bepalen, niet alleen in de nabijheid van den oorsprong maar ook over het geheele veld, het beloop der krommen voorgesteld door de differentiaalvergelijking:

$$(ay+bx^2+cxy+dy^2)\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1\right]+(ey+fx^2+gxy+hy^2)\frac{dy}{dx}=0.$$

Zie omtrent de beteekenis van dit vraagstuk voor de kennis van den loop der kromtelijnen in de nabijheid van een dubbelombilikaalpunt: *Versl. Kon. Akad. v. Wet.*, *Dl.* 13 Nov. 1904, p. 393. (Zie ook de Engelsche vertaling *Proc. Kon. Akad.*, *Dl.* 7, Dec. 1904, wegens de aldaar toegevoegde noot.) Daarbij valt op te merken, dat de daar optredende coëfficiënten niet geheel van elkander onafhankelijk zijn. Tusschen hen bestaat namelijk eene betrekking hier overeenkomende met: $g=2b-d$. Zoo deze betrekking een belangrijken invloed uitoefent op het gevraagde beloop, dient dit bijzonder geval nader te worden beschouwd. Overigens kan men zich bepalen tot het onderzoek der algemeene gevallen, welke geene bijzondere betrekkingen tusschen de coëfficiënten onderstellen, en de daartusschen bestaande overgangsgevallen, zoo er meerdere algemeene gevallen te onderscheiden zijn.

Voorts kan men raadplegen voor het beloop in de nabijheid van den oorsprong: A. WAHLGREN, „Sur la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic" (*Arkiv för Mat. Astr. och Fys.* Bd. 1, 1903, p. 43), aldaar pp. 52—56.

5. Gevraagd wordt te onderzoeken het minimaaloppervlak, dat door eene gewone schroeflijn gaat en welks raakvlakken in de punten der schroeflijn evenwijdig zijn aan eene gegevene rechte lijn.

6. In de ruimte zijn vier punten willekeurig gegeven. Gevraagd de meetkundige plaats van de assen der omwentelingscylinders door die punten.

7. In een ruimte R_4 is een bundel van kwadratische gebogen ruimten gegeven. Wordt gevraagd de meetkundige plaats van het middelpunt, van de hoofdassen, van de hoofdvlakken en de omhullende van de hoofdruimten. Eveneens de meetkundige plaats van de toppen en van de twee- en driedimensionale hoofddoorsneden.

Voor eenige onderdeelen van het overeenkomstige vraagstuk in drie afmetingen vergelijke men: *Versl. Kon. Akad. v. Wet.*, *Dl.* 13, 1904/05, pp. 411, 537 en 730.

8. In zijn studie „Zur Geometrie der Zahlen" (*Verhandlungen des dritten internationalen Mathematikerkongresses*, Heidelberg, 1904, vergelijk *Rev. sem.* XIII 2, p. 161), stelt H. Minkowski de volgende vraag, die verband houdt met de theorie der kristalstruktuur:

„Wij denken ons in de ruimte een grondlichaam willekeurig gegeven en stellen nu in de ruimte een oneindig aantal hiermee kongruente en evenwijdig georienteerde lichamen zoo op, dat hunne zwaartepunten een parallelopipedumvormig puntstelsel vormen en niet twee der lichamen elkaar gedeeltelijk doordringen. Onder welke omstandigheden is de ruimtevulling zoo volkomen mogelijk?"

Voor het geval van het octaeder wordt de oplossing door figuren aangewezen; de ruimtevullingsgraad bedraagt dan $\frac{18}{19}$.

Men vraagt bovenstaande uitkomst af te leiden en het vraagstuk met de er mede verbondene opmerkingen op andere lichamen en op vierdimensionale cellen en meerdimensionale polytopen uit te breiden.

9 Het aantal rechte lijnen, gelegen op een oppervlak van den n^{den} graad, dat geen regelvlak is, kan niet grooter zijn dan $n\,(11\,n - 24)$. (Vergelijk bijv. Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes*, T. II, 3e *Auflage*, 1880, S. 634).

Voor $n = 4$ wordt dit 80. Men vraagt nu te onderzoeken, of werkelijk bikwadratische oppervlakken bestaan, waarop 80 rechte lijnen gelegen zijn, of zoo dit niet het geval mocht zijn, welk het grootste aantal rechte lijnen is, die op een bikwadratisch oppervlak kunnen liggen.

10. De raaklijnen eener kegelsnede zijn gerangschikt in de groepen eener involutie van den graad n. Men vraagt een onderzoek naar de eigenschappen der kromme, welke de onderlinge snijpunten van de rechten eener groep bevat. Daarbij vooral te letten op de bijzonderheden, die zich voordoen als de involutie groepen met meer dan één dubbelelement of andere niet in eene algemeene involutie voorkomende bijzonderheden bevat.

11. In een bewegend stelsel Σ vormen de punten, welker banen 4-puntig rakende osculatievlakken bezitten, een cubisch oppervlak S^3. Op S^3 liggen: de cubische kromme, die de meetkundige plaats is der buigpunten van de banen harer punten; de kromme van den zesden graad, die de meetkundige plaats is der punten, welker banen 5-puntig rakende osculatievlakken bezitten, en de kromme van den zesden graad, die de meetkundige plaats is der punten, welker banen 4-puntig rakende kromtecirkels bezitten.

Wordt gevraagd te onderzoeken, of dit oppervlak S^3 algemeen is, dan wel of het bijzonderheden bevat en het type, waartoe het behoort, te omschrijven; een gelijk onderzoek, waaruit dus de karakteristieke getallen volgen, wordt gevraagd voor de drie genoemde krommen.

Vergelijk SCHOENFLIES, *Geometrie der Bewegung*, p. 138 vgg.; STURM, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, p. 202 vgg.

12. Het is duidelijk, dat een zeker aantal gelijke elkander afstootende materieele punten aan de binnenvlakte van een volkomen gladden bol op meer dan ééne wijze kunnen worden geplaatst zoodanig, dat zij in evenwicht zijn. Zoo bijv. zes punten, zoowel in de hoekpunten van een regelmatigen zeshoek, als in die van eene regelmatige vijfhoekige pyramide, van een rechthoekig driezijdig prisma, van een regelmatig octaëder en wellicht nog op andere wijzen.

Men vraagt nu na te gaan de mogelijke evenwichtsfiguren van n zoodanig geplaatste punten, die elkander volgens de m^{de} macht van den afstand afstooten, en deze op hunne stabiliteit te onderzoeken; minstens tot en met het geval $n = 7$.

13. In het *Arkiv för Mat. Astr. och Fys.* Bd. 2, No. 11, komt eene verhandeling voor van WALFRID EKMAN „On the influence of the earth's rotation on ocean currents." Daarin wordt vooreerst behandeld het geval van een onsamendrukbare, homogene vloeistofmassa, bedekkende een oneindig uitgebreide, platte, om eene bepaalde verticale as roteerende aarde en onderworpen 1e aan eene (verticale) homogeen verdeelde zwaartekracht, 2e aan wrijvingskrachten, welke kunnen worden gekarakteriseerd door een enkelen standvastigen wrijvingscoëfficient, 3e aan een homogeen over de geheele oppervlakte verdeelden tangentieelen winddruk, 4e aan een (uit eene geringe constante helling der oppervlakte voortvloeiend) homogeen verdeeld drukverval. Verder wordt getracht door het stellen van eene grensvoorwaarde het probleem uit te breiden tot het geval dat de vloeistof naar ééne of meer zijden begrensd is.

De bedoelde grensvoorwaarde, daarin bestaande dat de totale vloeistofverplaatsing door eene verticale strook der begrenzing nul is, brengt de vereenvoudiging met zich, dat ook thans nog van verticale bewegingen in de vloeistof kan worden afgezien, doch doet klaarblijkelijk aan de strengheid der oplossing te kort, daar zij had moeten uitdrukken, dat in elk punt de vloeistofverplaatsing door de begrenzing nul zal zijn.

Gevraagd wordt in de *eerste* plaats: bij de behandeling van het laatste probleem de grensvoorwaarde te verscherpen en, in verband daarmede, ook de verticale beweging te beschouwen; in de *tweede* plaats: in het eerstgenoemde probleem de oneindig uitgebreide platte aarde met gegeven tangentieelen winddruk en helling der vloeistofoppervlakte te vervangen door eene eindige bolvormige aarde met eene of andere eenvoudige verdeeling van den tangentieelen winddruk als gegeven; in de *derde* plaats: dit laatste onderzoek uit te breiden tot het geval van eene begrenzing der vloeistofmassa volgens twee meridianen.

Ook de beantwoording van eene enkele der hier gestelde vragen kan voor bekroning in aanmerking komen.

14. Men verlangt een onderzoek naar de beweging eener onbegrensde onsamendrukbare vloeistof met wrijving, in welke een bolvormig lichaam zich met standvastige snelheid a voortbeweegt; de vloeistof wordt ondersteld niet langs het lichaam te glijden.

Men wenscht daarbij in de eerste plaats uitgemaakt te zien, hetzij door eene algemeene beschouwing, hetzij, zoo dit middel tot het doel kan leiden, met behulp van reeksontwikkelingen naar de opklimmende machten van a, waarbij slechts een beperkt aantal termen in aanmerking wordt genomen, of inderdaad, zooals KORTEWEG verwachtte (*Phil. Mag.* (5), vol. 16, p. 118, 1883), geen stationaire toestand kan worden gevonden, zoodra men de tweede en hoogere machten der snelheden in rekening brengt. Mocht zulk een toestand wel mogelijk blijken, dan berekene men den term met a^3 in de reeksontwikkeling voor den weerstand, dien het lichaam ondervindt.

15. Door HERTZ is de vormverandering berekend, die plaats heeft wanneer twee isotrope vaste lichamen met eene gegevene kracht tegen elkander worden gedrukt. (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 92, p. 156, 1881; ook opgenomen in *Schriften vermischten Inhalts*, p. 155). Men vraagt eene uitbreiding van dit onderzoek tot anisotrope lichamen, waarbij men, zoo dit wenschelijk blijkt, het eene lichaam isotroop kan onderstellen, en zich, wat het andere betreft, tot een enkel bijzonder eenvoudig geval van anisotropie kan beperken.

Alle beoefenaren der Wiskunde worden door het Bestuur uitgenoodigd, om hunne oplossingen van een of meer dezer Vraagstukken vóór den eersten December 1906, vrachtvrij aan ondergeteekende, wonende te Amsterdam, Vondelstraat 104*f*, in te zenden; terwijl in het bijzonder de leden van het Genootschap uitgenoodigd worden, gelijke inzendingen te doen van zoodanige Vraagstukken, als hun geschikt mochten voorkomen, om in het vervolg als Prijsvragen te worden opgegeven. De verdere formaliteiten, bij deze inzendingen in acht te nemen, en de voorwaarden van prijsuitloving zijn:

1°. De in te zenden stukken moeten, liefst in de Nederlandsche taal, duidelijk gesteld en met eene gemakkelijk leesbare hand geschreven zijn; terwijl de oplossing van elk vraagstuk een afzonderlijk geschrift moet uitmaken, waarvan de bladen slechts aan ééne zijde beschreven zijn.

2°. De oplossingen van de voorgestelde vragen, en de voorstellen, bestemd om in het vervolg als Prijsvragen te worden opgegeven, moeten bij de inzending vergezeld gaan van een verzegeld briefje, waarin de naam en het adres des inzenders vermeld wordt, en dat tot opschrift heeft eene spreuk, waarmede elke oplossing, of elk opgegeven voorstel, bij dat naambriefje behoorende, zal moeten onderteekend zijn. Is een opgegeven vraagstuk niet oorspronkelijk, maar door den inzender uit eenig binnen- of buitenlandsch geschrift overgenomen, dan moet zulks bij de opgave aangewezen worden.

3°. Bij de oplossingen moeten in alles gevolgd worden de bepalingen en omschrijvingen, welke het Bestuur noodig geoordeeld heeft bij sommige der opgegeven vraagstukken te voegen; behoudens nochtans de bevoegdheid der oplossers, om zoodanige andere oplossingen, gevolgtrekkingen, aanmerkingen en leeringen, welke het Bestuur niet gevraagd mocht hebben, er bij te voegen, als hun in den loop hunner beschouwingen voor den geest komen. Zulke bijvoegingen zullen, indien zij eenige verdienste bezitten, bij de beoordeeling gunstig in aanmerking genomen worden.

4°. De uitslag van de beoordeeling der oplossingen en opgaven, die volgens dit Programma worden ingezonden, zal op de Algemeene Vergadering van het jaar 1907 den leden en daarna algemeen worden bekend gemaakt; terwijl in die Vergadering de naambriefjes, tot goedgekeurde stukken behoorende, geopend en voorgelezen, doch de overige ongeopend verbrand zullen worden. Voor zoo verre er onder de stukken, die tot een zelfde naambriefje behooren, eenige voldoende en andere onvoldoende bevonden mochten zijn, zal van de laatste volstrekt geene melding gemaakt worden; het Bestuur verbindt zich daaromtrent de stiptste geheimhouding in acht te nemen. De inzender van de onvoldoend gekeurde stukken zal echter op zijne aanvrage, bij den

ondergeteekende, gedurende ééne maand na die Algemeene Vergadering, een uittreksel uit het rapport der beoordeeling, voor zooveel die afkeuring betreft, kunnen bekomen.

5°. De bekroonde oplossingen kunnen in het NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE worden opgenomen.

6°. Ieder lid, die tien der voornoemde prijsvragen in hetzelfde jaar, of in verschillende jaren, voldoende beantwoordt, verwerft daardoor den rang van Lid van Verdienste, en zal als zoodanig ter Algemeene Vergadering geproclameerd worden, dadelijk nadat, bij het openen van het naambriefje, zijn naam zal zijn bekend geworden.

AMSTERDAM,
December 1905.

Op last van het Bestuur,
D. J. KORTEWEG.

3 2044 102 938 701